TD13 - Variables aléatoires discrètes

1 Notion de variable aléatoire

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et N des variables aléatoires discrètes indépendantes sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et les X_n ont toutes la même loi, à valeurs réelles. On définit $X = \max(X_0, \dots, X_N)$ par : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \max\big(X_0(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\big).$$

1. Montrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (*Indication :* pour tout réel x, montrer que $(X \leq x) \in \mathcal{A}$).
2. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leq x)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_0 \leq x)$ et de la loi (plutôt de la fonction génératrice) de N.

Exercice 2 (urnes de Pólya)**.** Une urne contient au départ 1 boules noires et 1 boule blanche. On effectue une suite de tirages qui consiste à tirer une boule de l'urne, regarder sa couleur, et la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur avant le tirage suivant. On cherche à déterminer l'évolution de la proportion de boules noires dans l'urne.
On note X_n le nombre de boules noires dans l'urne à l'issue du n-ième tirage. On a en particulier $X_0 = 1$.

1. Quelle est la loi de X_1 ? Démontrer que X_2 suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.
2. Démontrer par récurrence que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
3. On note A_n l'évènement « tirer une boule noire lors du n-ième tirage » : à l'aide de la loi de X_n, déterminer la probabilité de l'évènement A_{n+1}. Quelles sont vos remarques ?

Exercice 3. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de loi donnée par

$$X_1(\Omega) = \{-1, 0, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X_1 = -1) = p \qquad \mathbb{P}(X_1 = 0) = q \qquad \mathbb{P}(X_1 = 1) = r$$

avec $(p, q, r) \in]0, 1[^3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que S_{n-1} a même loi que $T_{n-1} = \sum_{k=2}^{n} X_k$. En déduire, pour $k \in \mathbb{Z}$, que

$$P_{X_1=-1}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-1} = k+1), \qquad P_{X_1=0}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-1} = k), \qquad P_{X_1=1}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-1} = k-1).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Déduire de la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = p\mathbb{P}(S_{n-1} = k+1) + q\mathbb{P}(S_n = k) + r\mathbb{P}(S_n = k-1).$$

2 Lois usuelles infinies

Exercice 4. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. A l'aide de la formule des probabilité totales, déterminer $\mathbb{P}(X < Y)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 5. Jean va au téléski et emprunte l'une des N perches de l'appareil. On admet qu'entre cet instant et la prochaine remontée de Jean, le nombre de skieurs se présentant au téléski suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Quelle est la probabilité que Jean reprenne la même perche ?

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Majorer la probabilité $\mathbb{P}(X \geq n + 1)$.
2. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, $\qquad \mathbb{P}(X \geq n) \sim \mathbb{P}(X = n)$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, et Y la variable aléatoire égale à 0 si X est paire et 1 sinon. Déterminer la loi de Y.

Exercice 8 (Mines-Telecom PC RMS 2016)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y = n)$.

Exercice 9 (BEOS exo 3372 CCP PC 2017 - exo 2)**.** Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres n, p avec $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. Déterminer la loi de Y.

Solutions

Exercice 1. 1) Comme les X_i, pour $i \in \mathbb{N}$, suivent tous la même loi, si on note $E = X_0(\Omega)$ (qui est fini ou dénombrable car X_0 est discrète), alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $X_i(\Omega) = E$, et donc pour tout ω, $X(\omega)$ est le maximum d'un certain nombre fini (variable) d'éléments de E, donc appartient à E, donc

$$X(\Omega) \subset E$$

(donc X est discrète).
Comme $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} (N = n).$$

Puis, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
(X \leq x) &= (X \leq x) \cap \Omega \\
&= (X \leq x) \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (N = n) \right) \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty} \big((X \leq x) \cap (N = n) \big) \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty} \Big(\big(\max(X_0, \ldots, X_n) \leq x \big) \cap (N = n) \Big) \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty} \Big((X_0 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x) \cap (N = n) \Big)
\end{aligned}$$

(car si on sait $(N = n)$, on peut remplacer N par n dans la définition de X). Or, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, X_k est une variable aléatoire, donc $(X_k \leq x) \in \mathcal{A}$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$. N est une variable aléatoire, donc $(N = n) \in \mathcal{A}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Par intersection finie d'évènements,

$$(X_0 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x) \cap (N = n) \in \mathcal{A}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis par union dénombrable d'évènements,

$$(X \leq x) \in \mathcal{A}$$

pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.
En faisant de même (en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes), on a

$$(X < x) \in \mathcal{A}$$

pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Mais on l'a aussi directement, car $(X < x) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left(X \leq x - \frac{1}{n} \right)$ est la réunion dénombrable d'évènements, donc est un évènement.

Alors, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$(X = x) = (X \leq x) \cap \overline{(X < x)} \in \mathcal{A}.$$

Donc X est une variable aléatoire discrète (avec $X(\Omega) \subset E$).
2) Comme les évènements $(N = n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux incompatibles, c'est aussi le cas, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, des évènements

$$(X_0 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x) \cap (N = n).$$

Donc, par σ-additivité de P, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big((X_0 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x) \cap (N = n) \Big)$$

Remarque. C'est le résultat que l'on aurait obtenu en appliquant directement la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements associé à N. Mais on ne pouvait pas le faire tant qu'on ne savait pas que $(X \leq x)$ était un évènement. On a donc repris la démonstration du cours, en s'arrêtant au moment adéquat pour justifier que l'on avait bien un évènement.

Par indépendance, on a alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 \leq x) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leq x) \times \mathbb{P}(N = n)$$

En notant F la fonction

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X_0 \leq x),$$

comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k a la même loi que X_0, alors

$$\mathbb{P}(X_k \leq x) = F(x).$$

Et donc, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(x)^{n+1}\mathbb{P}(N = n) = \boxed{F(x) \times G_N\big(F(x)\big)}$$

Exercice 2. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

- B_k l'évènement « obtenir une boule blanche au tirage numéro k »,
- N_k l'évènement « obtenir une boule noire au tirage numéro k ».

1) On a

$$X_1(\Omega) = \{1, 2\}.$$

Puis,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}.$$

Donc X_1 suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$.
On a

$$X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\},$$

$(X_2 = 1) = B_1 \cap B_2$ donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

et $(X_2 = 3) = N_1 \cap N_2$, donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Enfin, $(X = 2) = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$ est une intersection de deux évènements incompatibles (car $B_1 \cap N_1 = \emptyset$, par exemple), donc on a

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)P_{B_1}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)P_{N_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Remarque. Puisque $X_2(\Omega) \subset \{1, 2, 3\}$, on peut aussi dire

$$\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}.$$

Mais on peut aussi utiliser ceci pour vérifier que l'on n'a pas fait d'erreur dans les calculs de la loi de X_2...

On a bien que X_2 suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.
2) Initialisation : le cas $n = 1$ et $n = 2$ a été fait à la question précédente.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$. Alors en particulier

$$X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!].$$

X_{n+1} renvoie un nombre de boules, en particulier $X_{n+1}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Or, la description de l'expérience fait qu'à chaque tirage, soit le nombre de boules noires reste le même, soit il augmente de 1, et donc

$$1 \leq X_n \leq X_{n+1} \leq X_n + 1 \leq (n+1) + 1 = n+2.$$

Donc

$$X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+2]\!].$$

Soit alors $k \in [\![1, n+2]\!]$. Comme X_n est une variable aléatoire avec $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$, on sait que $\big((X_n = i)\big)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements, et la formule des probabilités totales donne alors :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = i) P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} P_{X_n=i}(X_{n+1} = k)$$

(car X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$, par hypothèse de récurrence). Ensuite, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, le fait que

$$X_n \leq X_{n+1} \leq X_n + 1$$

donne $P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = 0$ si $i \leq k-2$ ou $i \geq k+1$.
Puis, $P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k)$ est la probabilité de tirer une boule noire dans une urne qui contient $k-1$ boules noires car $X_n = k-1$ (et à chaque étape, comme on rajoute une boule, à l'issue du n-ième tirage on a une urne qui contient $n+2$ boules, dont $k-1$ noires), soit par équiprobabilité des tirages d'une boule,

$$P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}.$$

Et $P_{X_n=k}(X_{n+1} = k)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne qui contient k boules noires car $X_n = k$ (et qui contient $n+2$ boules, dont k noires), soit par équiprobabilité des tirages d'une boule,

$$P_{X_n=k}(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1}\frac{n+2-k}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

On a donc bien X_{n+1} qui suit une loi uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$.

Remarque. En toute rigueur, il faut calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2)$ à part, car de la formule des probabilités totales, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

(car $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)$ est la probabilité d'obtenir une boule blanche dans une urne avec $n+2$ boules dont 1 seule noire), et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2) = \mathbb{P}(X_n = n+1) P_{X_n=n+1}(X_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

(car $P_{X_n=n+1}(X_{n+1} = n+2)$ est la probabilité d'obtenir une boule noire dans une urne avec $n+2$ boules dont 1 seule blanche).

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\big((X_n = i)\big)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$:

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k) P_{X_n=k}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Cette probabilité est indépendante de n : à chaque tirage, on a une chance sur deux d'avoir une boule noire (on a aussi bien sûr $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$: l'égalité reste vraie pour $n = 0$).

Exercice 3. **1)** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ (pour que S_{n-1} existe...).

• Notons

$$f : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} x_k.$$

Alors

$$S_{n-1} = f(X_1, \dots, X_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad T_{n-1} = f(X_2, \dots, X_n).$$

Puis, $(X_1, \dots, X_{n-1})$ et $(X_2, \dots, X_n)$ ont même loi (car la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est i.i.d.), donc par le cours, S_{n-1} et T_{n-1} aussi.

• Remarquons déjà que $\mathbb{P}(X_1 = -1) > 0$, donc la probabilité conditionnelle considérée existe. Puis, comme $T_{n-1} = S_n - X_1$, on a

$$P_{X_1=-1}(S_n = k) = \frac{P\big((X_1 = -1) \cap (S_n = k)\big)}{\mathbb{P}(X_1 = -1)} = \frac{P\big((X_1 = -1) \cap (T_{n-1} = k + 1)\big)}{\mathbb{P}(X_1 = -1)}.$$

Puis, $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendants, donc par le lemme des coalitions, X_1 et $f(X_2, \dots, X_n) = T_{n-1}$ sont indépendants. Donc

$$P_{X_1=-1}(S_n = k) = \frac{P\big((X_1 = -1) \cap (T_{n-1} = k + 1)\big)}{\mathbb{P}(X_1 = -1)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(T_{n-1} = k + 1)}{\mathbb{P}(X_1 = -1)} = \mathbb{P}(T_{n-1} = k + 1).$$

Enfin, S_{n-1} suit la même loi que T_{n-1}, donc

$$P_{X_1=-1}(S_n = k) = \mathbb{P}(T_{n-1} = k + 1) = \mathbb{P}(S_{n-1} = k + 1).$$

De même,

$$\begin{aligned} P_{X_1=0}(S_n = k) &= \frac{P\big((X_1=0)\cap(S_n=k)\big)}{\mathbb{P}(X_1=0)} = \frac{P\big((X_1=0)\cap(T_{n-1}=k)\big)}{\mathbb{P}(X_1=0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(T_{n-1}=k)}{\mathbb{P}(X_1=0)} = \mathbb{P}(T_{n-1} = k) = \mathbb{P}(S_{n-1} = k) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{X_1=1}(S_n = k) &= \frac{P\big((X_1=1)\cap(S_n=k)\big)}{\mathbb{P}(X_1=1)} = \frac{P\big((X_1=1)\cap(T_{n-1}=k-1)\big)}{\mathbb{P}(X_1=1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(T_{n-1}=k-1)}{\mathbb{P}(X_1=1)} = \mathbb{P}(T_{n-1} = k-1) = \mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) \end{aligned}$$

2) On a $X_1(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, donc $\big((X_1 = -1), (X_1 = 0), (X_1 = 1)\big)$ est un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales donne alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}(X_1 = -1)P_{X_1=-1}(S_n = k) + \mathbb{P}(X_1 = 0)P_{X_1=0}(S_n = k) + \mathbb{P}(X_1 = 1)P_{X_1=1}(S_n = k) \\ &= p\mathbb{P}(S_{n-1} = k + 1) + q\mathbb{P}(S_n = k) + r\mathbb{P}(S_n = k - 1) \end{aligned}$$

grâce à la question précédente.

Remarque. Cette relation s'obtient de manière directe en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\big((X_n = -1), (X_n = 0), (X_n = 1)\big)$.
J'aurais pu l'éviter en cherchant à travailler sur $S_{n-1} + X_n^2$ au lieu de S_n, par exemple (pour « casser la symétrie »), mais l'étude de S_n a plus de sens (en probabilité) que l'étude de $S_{n-1} + X_n^2$.

Exercice 4. ★ Soit $n \in \mathbb{N}$, alors par σ-additivité de P (et car les évènements $(Y = k)$, pour $k \geq n+1$, sont deux à deux incompatibles),

$$\mathbb{P}(n < Y) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} (Y = k)\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} pq^{k-1} = p\frac{q^n}{1-q} = q^n$$

(car, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq n + 1$, on a $k \geq 1$, donc $\mathbb{P}(Y = k) = pq^{k-1}$).

Remarque. Une autre façon d'obtenir ceci est d'utiliser la formule des probabilités totales : Y est une variable aléatoire avec $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, donc $\big((Y=k)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(n<Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P\big((Y=k)\cap(n<Y)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} P\big((Y=k)\cap(n<k)\big).$$

Puis, $(n<k)=\Omega$ si $k \in [\![n+1,+\infty[\![$, et $(n<k)=\emptyset$ si $k \leq n$. Donc

$$\mathbb{P}(n<Y) = 0 + \sum_{k=\max(1,n+1)}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k)$$

(car $n \geq 0$, donc $\max(1,n+1)=n+1$), puis on finit le calcul comme avant.

Donc, par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\big((X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'en est un car X est une variable aléatoire avec $X(\Omega)=\mathbb{N}$), on a :

$$\mathbb{P}(X<Y) = \sum_{n=0}^{\infty} P\big((X=n)\cap(X<Y)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} P\big((X=n)\cap(n<Y)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(n<Y)$$

en utilisant que X et Y sont indépendantes. Puis, comme $\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X<Y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}q^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda q} = \boxed{e^{-\lambda p}}$$

★ Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\big((X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'en est un car X est une variable aléatoire avec $X(\Omega)=\mathbb{N}$) et en utilisant que X et Y sont indépendants (et en utilisant $\mathbb{P}(Y=0)=0$), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\big((X=n)\cap(X=Y)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\big((X=n)\cap(n=Y)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n) \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}pq^{n-1} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda q)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p}{q}\left(e^{\lambda q}-1\right) \\
&= \boxed{\frac{p}{1-p}(e^{-p\lambda}-e^{-\lambda})}
\end{aligned}$$

Exercice 5. Notons X le nombre de skieurs qui se présentent entre les deux remontées de Jean (Jean exclu). On a l'égalité entre les évènements :

$$\text{« Jean reprendra la même perche »} = \bigcup_{k=0}^{\infty}(X=N-1+kN).$$

Par conséquent (par incompatibilité deux à deux des évènements $(X = N-1+kN)$ pour $k \in \mathbb{N}$, et σ-additivité de P), la probabilité voulue vaut

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = N-1+kN) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^{N-1+kN-1} = pq^{N-2}\sum_{k=0}^{\infty}(q^N)^k = \boxed{\frac{pq^{N-2}}{1-q^N}}$$

Exercice 6. 1) Par σ-additivité de P (et car les évènements $(X = k)$, pour $k \geq n+1$, sont deux à deux incompatibles), on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq n+1) &= P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}(X = k)\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&\underset{i=k-n-1}{=} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{(n+2)\dots(n+i+1)}\right) \\
&\leq e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}\right) = \boxed{\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}}
\end{aligned}$$

car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, i]\!]$, on a

$$0 < \frac{1}{n+1+k} \leq \frac{1}{k}$$

donc, par produit d'inégalités positives dans le même sens,

$$\frac{1}{(n+2)\dots(n+i+1)} = \prod_{k=1}^{i}\frac{1}{n+1+k} \leq \prod_{k=1}^{i}\frac{1}{k} = \frac{1}{i!}.$$

Remarque. Dans le sujet E3A PC 2017 (exercice 3 question 4a), on montre que si $n > \lambda - 1$, alors

$$\mathbb{P}(X \geq n+1) \leq \frac{n+1}{n+1-\lambda}\mathbb{P}(X = n+1).$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(X \geq n) = (X = n) \cup (X > n) = (X = n) \cup (X \geq n+1),$$

car X est à valeurs entières. Et cette union est disjointe, donc

$$\mathbb{P}(X \geq n) = P\big((X = n) \cup (X \geq n+1)\big) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X \geq n+1) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} + \mathbb{P}(X \geq n+1),$$

or

$$\mathbb{P}(X \geq n+1) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right),$$

car on a

$$0 \leq \frac{\mathbb{P}(X \geq n+1)}{\frac{\lambda^n}{n!}} \leq \frac{\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\lambda^n}{n!}} = \frac{\lambda}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X \geq n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n).$$

Exercice 7. Y suit une loi de Bernoulli car Y ne prend que 0 et 1 comme valeurs.

$$(Y=1)=\bigcup_{n=0}^{\infty}(X=2n+1),$$

et comme les évènements $(X=p)$, pour $p\in\mathbb{N}$, sont deux à deux incompatibles, on a par σ-additivité de P :

$$\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=2n+1)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}=e^{-\lambda}\cosh(\lambda)=\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$$

Donc

$$\boxed{Y\sim\mathcal{B}\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\right)}.$$

Exercice 8. X et Y sont indépendants, suivent une loi de Poisson, donc par le cours, on sait que $X+Y$ suit une loi de Poisson, de paramètres $\lambda+\mu$.
On a $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}$, alors

$$P_{X+Y=n}(X=k)=\frac{P\big((X=k)\cap(X+Y=n)\big)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}=\frac{P\big((X=k)\cap(Y=n-k)\big)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}=\frac{\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

(la dernière égalité provenant de l'indépendance de X et Y).

- Si $k>n$, alors $n-k<0$, donc $(Y=n-k)=\emptyset$, donc

$$\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=n-k)=\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(\emptyset)=0,\qquad\text{puis}\qquad P_{X+Y=n}(X=k)=0.$$

- Si $0\leq k\leq n$, alors $n-k\geq 0$, donc

$$\mathbb{P}(Y=n-k)=e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Or,

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\qquad\text{et}\qquad\mathbb{P}(X+Y=n)=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}.$$

Donc

$$P_{X+Y=n}(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

Comme

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}=1\qquad\text{et}\qquad\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\geq 0,$$

on en déduit que la loi de X sachant $(X+Y=n)$ est une loi binomiale

$$\boxed{\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)}.$$

Exercice 9. 1) • $\boxed{X(\Omega)=\mathbb{N}}$, puis, pour $n\in\mathbb{N}$, si $X=n$, Y suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$, donc prend toutes les valeurs de $[\![0,n]\!]$. Plus précisément,

$$Y(X=n)=[\![0,n]\!].$$

Puis, $X(\Omega)=\mathbb{N}$, donc $\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X=n)$, puis

$$Y(\Omega)=Y\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X=n)\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Y(X=n)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![0,n]\!]=\boxed{\mathbb{N}}.$$

- Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, alors

$$P\big((X=n)\cap(Y=k)\big)=\mathbb{P}(X=n)P_{X=n}(Y=k)$$

(car $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$, pour que la probabilité conditionnelle existe), et comme Y suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$ pour la probabilité $P_{X=n}$, on a :

$$P\big((X=n)\cap(Y=k)\big) = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

ce qui termine la loi du couple (X,Y).

2) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\big((X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est un système complet d'évènements, car X est une variable aléatoire discrète, et car $X(\Omega) = \mathbb{N}$). On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\big((X=n)\cap(Y=k)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \underbrace{P\big((X=n)\cap(Y=k)\big)}_{=0} + \sum_{n=k}^{\infty} P\big((X=n)\cap(Y=k)\big) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}p^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&\underset{j=n-k}{=} e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

On en déduit que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp :

$$\boxed{Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)}.$$