

DM 5 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES

À rendre le mardi 27/01/2026

1. Ce travail est facultatif pour les 3/2.
2. Rendre une copie pour deux.

Exercice 1 - CCINP PSI 2024 (Exercice - équivalent de Stirling)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

3. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\rho_k = \ln k - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 \ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt$$

6. En déduire que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

7. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\ln \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln n - n + c + o(1)$$

En déduire que lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\Gamma(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$$

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

10. On définit la fonction $\mathbf{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}$, en posant $\mathbf{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0,n[}(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question 7.

On pourra faire appel aux résultats des questions 1 et 3.