Chapitre 14 - Fonctions sur un espace vectoriel normé

1 Topologie d'un espace vectoriel normé

1.1 Points intérieurs, parties ouvertes

Définition : Point intérieur

Soit E un evn. Soient $A \subset E$ et $a \in A$. On dit que a est un point intérieur de A s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\mathring{B}(a,r) \subset A.$$

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs.

Exemples : 0 est un point intérieur de $\mathbb{R}$. C'est aussi un point intérieur de $]-1,1[$. En revanche, ce n'est pas un point intérieur de $\mathbb{R}_+$.

Remarque : l'intuition est que « être un point intérieur » est équivalent à « ne pas être sur le bord ».

Définition : Partie ouverte

Soit E un evn. Soit $A \subset E$. On dit que A est une partie ouverte de E si tous les points de A sont intérieurs de A, c'est-à-dire si $A = \mathring{A}$.

Exemples :

- $]0,1[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. $[0,1]$, $[0,1[$ et $]0,1]$ ne le sont pas.
- E est une partie ouverte de lui-même. $\varnothing$ est également une partie ouverte.

Remarque : l'intuition est que le bord de A ne fait pas partie de A lui-même. On rendra cette intuition plus précise un peu plus tard.

Proposition

Les boules ouvertes sont ouvertes.

Propriétés :

- La réunion (quelconque) de parties ouvertes est ouverte ;
- L'intersection (finie) de parties ouvertes est ouverte.

Exemples : avec $\cup]1/n;1[$, $]0,2[\cap]1,3[$ et $\cap]-1/n, 1/n[$.

1.2 Parties fermées, adhérence, partie dense

Définition : Partie fermée

Soit E un evn. Soit $A \subset E$. On dit que A est une partie fermée de E si son complémentaire dans E est ouvert, c'est-à-dire lorsque $E \backslash A$ est ouvert.

Exemples :

- $[0,1]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$. $]0,1[$, $[0,1[$ et $]0,1]$ ne le sont pas.
- Les boules fermées sont fermées. Les sphères sont fermées.

Remarque : Attention, ouvert n'est pas le contraire de fermé ! Par exemple $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé. Il existe également des ensembles à la fois ouvert et fermé. En particulier, E et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition : Caractérisation séquentielle des fermés

Soit $A \subset E$. A est fermée si et seulement si la limite de suite convergente d'éléments de A est un élément de A.

Démonstration : ***À faire ?*** □

Exemple : $\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$

Propriétés :

- La réunion (finie) de parties fermées est fermée ;
- L'intersection (quelconque) de parties fermées est fermée.

Remarque : cela résulte du passage au complémentaire des propriétés pour les ouverts.

Exemples : avec $\cap[1/n;1]$, $[0,2] \cup [1,3]$ et $\cup[-1+1/n, 1-1/n]$.

Définition : Point adhérent

Soit $a \in E$. On dit que a est un point adhérent à A lorsque :

$$\forall r > 0,\ \mathring{B}(a,r) \cap A \neq \varnothing.$$

L'ensemble des points adhérents de A est appelé l'adhérence de A et est noté $\overline{A}$.

Remarques :

- Tout point de A est adhérent à A. La réciproque est fausse.
- 0 est adhérent à $]0,1]$ mais pas à $]1/n,1]$, ni même à $[1/n,1]$.
- L'idée est que a est *juste sur le bord* de A.

Proposition : Caractérisation séquentielle

Soit $a \in E$. $a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.

Démonstration : ***À faire ?*** □

Exemple : On peut retrouver le fait que 0 est adhérent à $]0,1]$.

Corollaire

A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

Exemple : Comme on le disait $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé, donc on a $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{Q}$. Et effectivement, on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. En fait cela est une situation très intéressante liée à la définition suivante.
Remarque : C'est hors-programme, mais on peut définir la frontière de A par $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$. On remarque alors que A est fermée si et seulement si $\partial A \subset A$. Et on remarque que A est ouvert si et seulement si $\partial A \cap A = \varnothing$. Cela correspond à nos intuitions sur les bords.

Définition : Partie dense

Soient A et B deux parties de E. On dit que B est dense dans A lorsque $\overline{B} = A$.

Exemple : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Application : déterminer toutes les applications *continues* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Remarque : toutes les définitions précédentes dépendent de la norme choisie... Enfin presque, on a la propriété suivante.

Proposition

Les notions topologiques précédentes sont invariantes par passage à une norme *équivalente*.

Remarque : en particulier, en dimension finie, ces notions ne dépendent pas de la norme choisie.

2 Limite et continuité en un point

2.1 Limite en un point

Définition : Limite en point

Soit f une application de $A \subset E$ à valeurs dans F où E et F sont deux evn. Soit $a \in E$ adhérent à A. Soit $b \in F$.
On dit que f admet b comme limite au point a si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \epsilon.$$

Dans ce cas, b est unique et on note $b = \lim_{x \to a} f(x)$ (ou parfois $b = \lim_a f$).

Remarques :

- Cela correspond à la définition usuelle de la limite pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à condition d'utilisation $|\cdot|$ pour la norme.
- Cela correspond également au sens que l'on avait donné à la continuité pour les applications complexes dans le cadre des séries entières, en utilisant le module comme norme.

Proposition : caractérisation séquentielle

Dans le même contexte, f a pour limite a en b si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers b.

Remarques :

- Le sens direct $\Rightarrow$ est une simple composition de limite.
- Le sens réciproque permet cependant de généraliser une propriété valable sur les suites. C'est notamment ce qui permet de faire fonctionner le théorème de convergence dominée avec les paramètres continues.

2.2 Opérations sur les limites

Proposition : Limite d'une combinaison linéaire

Soient f et g deux applications de A dans F admettant pour limites respectives b et c au point d'adhérence a. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\lim_a \alpha f + g = \alpha b + c.$$

Proposition : Limite d'un produit par une application scalaire

Soient f une application de A dans F et u une fonction de A dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\lim_{x\to a} u(x)f(x) = \lim_{x\to a} u(x) \lim_{x\to a} f(x)$$

Proposition : Limite d'une composition

Soient f et g deux applications. f est définie sur A à valeurs dans F et g est définie sur $B \subset F$ à valeurs dans G.
Si a est adhérent à A, b est la limite de f en a, si b est adhérent à B et c est la limite de g en b alors :

$$\lim_a g \circ f = \lim_b g$$

2.3 Continuité en un point

Définition : Continuité en point

Soit f une application de $A \subset E$ à valeurs dans F où E et F sont deux evn. Soit $a \in A$
On dit que f est continue en a si $\lim_a f = f(a)$.

Remarque : Si $a \notin A$ mais si a est adhérent à A, on peut définie le prolongement par continuité de f en a.

Proposition : caractérisation séquentielle

Dans le même contexte, f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

3 Continuité sur une partie

3.1 Généralités

Définition : Continuité sur un domaine

Soit $f : A \to F$. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Remarques :

- On voit ici que la continuité est une propriété locale. Elle est d'abord définie en un point puis se généralise sur l'ensemble. C'est pourquoi être continue sur un ensemble de domaines A_n revient à être continue sur l'union de ces domaines.
- L'ensemble des fonctions continues de A dans F est notée $\mathcal{C}^0(A, F)$.

Propriétés :

- La restriction d'une application continue est continue
- La composition de deux applications continues est continue
- Les combinaisons linéaires d'applications continues sont continues
- Le produit par une application scalaire continue, ou la division par une application scalaire continue qui ne s'annule pas, préserve la continuité

3.2 Image réciproque de parties ouvertes/fermées

Proposition : Image réciproque d'un ouvert/d'un fermé

Soit f de E dans F continue. Alors l'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E.
De même, l'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E.

Remarques :

- dans le cas particulier où $f : E \to \mathbb{R}$, cela signifie que l'ensemble $\{x \in E,\ f(x) > 0\}$ est un ouvert. En revanche, $\{x \in E,\ f(x) = 0\}$ et $\{x \in E,\ f(x) \geqslant 0\}$ sont fermés.
- On retrouve le résultat : les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.
- Le résultat est **faux** pour les images directes. Par exemple, $f(]-1,1[) = [0,1[$ si $f : x \mapsto x^2$.

3.3 Fonctions lipschitziennes

Définition

Soit f définie de A dans F. Soit $k > 0$. On dit que f est k-lipschitzienne sur A lorsque :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E.$$

Remarques :

- L'application $x \mapsto \|x\|$ est 1 lipschitzienne.
- La composition d'une fonction k lipschitzienne avec une fonction k' lipschitzienne est une fonction kk' lipschitzienne.

- Si $k \in [0,1[$, on parle parfois d'application k-contractante.

Proposition

Toute application k lipschitzienne sur A est continue sur A.

Démonstration : ***À faire.*** □

Exemple : l'application norme est continue sur E.

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Rappel : équivalence des normes.

Théorème : Théorème des bornes atteintes

Une fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normée de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration : ***Hors-programme.*** □

Proposition : Continuité des applications linéaires

Soit f une application linéaire de E dans F, espaces de dimension finie.
Alors :

- Il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.
- f est K-lipschitzienne sur E.
- f est continue sur E.

Remarques :

- Donc en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues !
- Par exemple, la trace est une application continue.
- C'est évidemment faux en dimension infinie...

Proposition : Continuité des applications multilinéaires

Soit f une application linéaire de $(\mathbb{K}^n)^p$ dans E, espace de dimension finie.
Alors :

- Il existe $k > 0$ tel que $\forall (X_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in (\mathbb{K}^n)^p,\ \|f(X_1,\dots,X_p)\|_E \leqslant k\prod_{i=1}^{p}\|X_i\|_{\mathbb{K}^n}$.
- f est continue sur $(\mathbb{K}^n)^p$.

Exemples : Le produit matriciel est continue, ainsi que le déterminant. On en déduit par exemple que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert et que l'ensemble des matrices non-inversibles est un fermé.