# TD14 - Fonctions sur un espace vectoriel normé

**Exercice 1.** On se place dans $E = \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ avec $d \geqslant 1$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est un ouvert de $E$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est dense dans $E$.
   *On pourra, une matrice $A \in E$ étant fixée, considérer les matrices de la forme $A - t\,I$.*
3. Montrer que $\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ est fermé.
4. Montrer que $\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide.

**Exercice 2.** Soit $d \geqslant 1$ un entier. On note $E = \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$.
Montrer que le sous-ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $E$.

**Exercice 3.** On fixe un entier $d \geqslant 2$. On note $E = \mathbb{R}_d[X]$.

1. Montrer qu'un élément $P \in E$ unitaire et de degré exactement $d$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im} z|^d.$$
2. En déduire que l'ensemble $S$ des $P \in E$ unitaires, de degré exactement $d$, et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $E$.
3. En déduire que l'ensemble $T$ des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$.
4. L'ensemble $D$ des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ est-il dense dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 4** (applications linéaires continues)**.** Soient $E$ et $F$ des espaces normés et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que les phrases suivantes sont équivalentes :

1. $u$ est bornée sur la sphère unité ;
2. $u$ est lipschitzienne ;
3. $u$ est continue ;
4. $u$ est continue en $0$ ;
5. $u$ est bornée au voisinage de $0$.

**Exercice 5** (norme subordonnée)**.** Soient $E$ un espace normé.
On considère l'espace vectoriel $A = \mathcal{L}(E, E) \cap \mathcal{C}^0(E, E)$ des endomorphismes continus de $E$. On admet les résultats de l'exercice précédent.
Si $u \in A$, on note $|||u||| = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|$.

1. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $A$ et que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant |||u|||\,\|x\|$.
2. Calculer $|||\mathrm{id}|||$ puis montrer que $\forall (u, v) \in A^2,\ |||u \circ v||| \leqslant |||u||| \cdot |||v|||$.

**Exercice 6** (d'après CCP MP 2019/2018/... : quotient de Rayleigh)**.**
Soient $E$ un espace euclidien et $f$ un endomorphisme symétrique de $E$.
On note $\mathbb{S} = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ la sphère unité de $E$ et on considère
$$\mathrm{M} = \sup_{v \in \mathbb{S}} \langle v, f(v) \rangle.$$

1. Justifier que $\mathrm{M}$ est un réel bien défini et qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{S}$ tel que $\langle a, f(a) \rangle = \mathrm{M}$.

On fixe dans la suite un tel vecteur $a$.

2. Soient $v \in a^{\perp}$ et $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\dfrac{\langle a + t\,v,\ f(a + t\,v) \rangle}{\|a + t\,v\|^2} \underset{t \to 0}{=} M + 2t\,\langle v, f(a) \rangle + O(t^2)$.
   (b) En remarquant que $\frac{a + t\,v}{\|a + t\,v\|} \in \mathbb{S}$, en déduire que $f(a) \perp v$.
3. En déduire que $a$ est un vecteur propre de $f$.

**Exercice 7** (CCP 2018)**.** On considère $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \right\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y) \in E$.
2. Montrer que $E$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 8** (CCP 2011 Officiel de la Taupe)**.** On définit trois suites $(a_d)$, $(b_d)$ et $(c_d)$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}b_d \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_d + c_d \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_d + b_d) \end{cases}$$

On note $X_d = \begin{pmatrix} a_d \\ b_d \\ c_d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_d$ pour tout entier $n$.
2. $A$ est-elle diagonalisable ?
3. Trouver $P$ inversible telle que $P^{-1}AP = D$.
4. Montrer que $\Phi$ définie par $\Phi(M) = PMP^{-1}$ est continue sur $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $(A^n)$ converge vers $Q$ représentant un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.
6. Montrer que $(a_d)$, $(b_d)$ et $(c_d)$ convergent.

# Solutions

**Exercice 1.** 1. C'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application det, qui est continue (par exemple car polynomiale en les coefficients de son argument).

2. Soit $A \in E$, et cherchons à approcher $A$ arbitrairement près par des éléments de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Pour ce faire, perturbons $A$ en la translatant dans la direction de l'identité : posons $B(t) = A - t\,I$. D'après le cours sur le polynôme caractéristique,
$$B(t) \notin \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \iff t \in \mathrm{Sp}(A).$$
Il n'existe donc qu'un nombre fini de valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $B(t) \notin \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. En particulier, il existe une suite $(t_n)$ telle que $t_n \to 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ A - t_n\,I \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Dès lors $A - t_n\,I \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $A - t_n\,I \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, donc $A \in \overline{\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})}$, et ce pour toute matrice $A \in E$.

3. C'est l'image réciproque du fermé $\{I\}$ par l'application $A \mapsto A^\top A$. Or cette dernière est, par exemple, composée de $A \mapsto (A^\top, A)$, qui est continue car linéaire, et de $(A, B) \mapsto AB$, qui est continue car bilinéaire.

4. Montrons que tout élément de $\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ peut être approché arbitrairement près par un élément de $E\backslash \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$, et considérons les matrices de la forme $\lambda\,A$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\,A \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \iff \lambda^2 = 1$, et on peut donc construire une suite $(\lambda_n)$ telle que $\lambda_n \to 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n\,A \notin \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

**Exercice 2.** Soit $A \in E$. D'après le cours, $A$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, donc on peut écrire $A = P\,T\,P^{-1}$ avec $P$ inversible et $T$ triangulaire supérieure. Il suffit alors de perturber légèrement $T$ par une matrice diagonale $D_n$ telle que $D_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en faisant en sorte que les coefficients diagonaux de $T + D_n$ soient tous distincts, par exemple en prenant $D_n$ de la forme $\mathrm{diag}(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{d}{n})$ ; dès lors, $A_n = P\,(T + D_n)\,P^{-1}$ est diagonalisable et $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$.

**Exercice 3.** 1. Soit $P \in E$ unitaire de degré $d$.

$\Rightarrow$ Supposons $d$ scindé sur $\mathbb{R}$, de sorte que $P$ s'écrive $\prod_{i=1}^{d}(X - r_i)$ avec des $r_i$ toutes réelles. Alors, si $z \in \mathbb{C}$,
$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \prod_{i=1}^{d} |z - r_i| \\
&\geqslant \prod_{i=1}^{d} |\mathrm{Im} z| && (\forall s \in \mathbb{C},\ |s| \geqslant |\mathrm{Im} s|) \\
&= |\mathrm{Im} z|^d.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Supposons l'inégalité de l'énoncé vraie. Alors toutes les racines complexes de $P$ doivent avoir une partie imaginaire nulle, ce qui prouve que $P$ est en fait scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons
$$f_z : \left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & |P(z)| - |\mathrm{Im} z|^d. \end{array}\right.$$
Cette application est continue, car il s'agit à une constante près de l'application $P \mapsto |P(z)|$, composée de l'application linéaire $P \mapsto P(z)$ et de l'application lipschitzienne $s \mapsto |s|$. Alors $S$ est l'intersection de l'ensemble des polynômes unitaires de degré $d$, qui est fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par l'application linéaire $P \mapsto c_d(P)$, et de
$$\bigcap_{z\in\mathbb{C}} f_z^{-1}([0, +\infty[)$$
qui est fermée comme intersection (quelconque) de fermés.

3. $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ est dans $T$ si et seulement si $\chi_A \in S$. Autrement dit, $T$ est l'image réciproque du fermé $S$ par l'application $A \mapsto \chi_A$. Or cette application est continue, par exemple parce que tous les coefficients de $\chi_A$ sont des polynômes en les coefficients de $A$.

4. Non, car il est inclus dans $T$, qui n'est lui-même pas dense : plus précisément, si $A$ n'est pas diagonalisable, il n'existe même aucune suite $(A_n)$ de matrices *tri*gonalisables telle que $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$.

**Exercice 4.**1 $\Rightarrow$ 2 Supposons que $\|u\| \leqslant M$ sur $S(0,1)$. Soit $x \in E$. Si $x \neq 0$, alors $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc $\|u(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant M$, donc $\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$, relation qui reste vraie y compris si $x = 0$. Soient ensuite $x$ et $y$ dans $E$, alors

$$\|u(x) - u(y)\| \leqslant \|u(x-y)\| \leqslant M\|x-y\|$$

donc $u$ est $M$-lipschitzienne.

2 $\Rightarrow$ 3 C'est du cours.

3 $\Rightarrow$ 4 C'est une conséquence directe de la définition de la continuité.

4 $\Rightarrow$ 5 Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$, alors $u(x) \underset{x\to 0}{=} O(1)$ (en cas de doute, revenir à la définition en fixant $\epsilon > 0$ arbitraire (par exemple $\epsilon = 1$) et faire intervenir la continuité en 0).

5 $\Rightarrow$ 1 Soit $V$ un voisinage de 0 sur lequel $u$ soit bornée par $M$. Alors $V$ contient une boule de rayon $r > 0$ centrée en 0 ; dès lors, si $x \in S(0,1)$, alors $r\,x \in V$. Donc $\|u(rx)\| \leqslant M$, ce qui revient à dire que $\|u(x)\| \leqslant \frac{M}{r}$.

**Exercice 5.** 1. • Fonction bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ : c'est une conséquence de l'implication 3 $\Rightarrow$ 1 de l'exercice précédent.

- Condition « $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant |||u|||\,\|x\|$ » : même démarche que pour la preuve de l'implication 1 $\Rightarrow$ 2 de l'exercice précédent.
- Caractère positivement homogène : soient $u \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $x \in S(0,1)$. Alors $\|(\lambda\,u)(x)\| = |\lambda|\,\|u(x)\| \leqslant |\lambda|\,|||u|||$, donc en passant au sup $|||\lambda\,u||| \leqslant |\lambda|\,|||u|||$. Prouvons l'inégalité réciproque. Si $\lambda = 0$, c'est évident ; sinon, écrivons $\|u(x)\| = \|(\lambda\,u)(x/\lambda)\| \leqslant |||\lambda, u|||\,\|x/\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|}\,|||\lambda, u|||\,\|x\|$. En particulier, si $x \in S(0,1)$, alors $\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\,|||\lambda, u|||$, d'où la majoration recherchée en passant au sup.
- Inégalité triangulaire : soient $u$ et $v$ dans $A$, et $x \in S(0,1)$. Alors

$$\|(u+v)(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\| \leqslant |||u||| + |||v|||,$$

d'où le résultat en passant au sup.
- Axiome de séparation : supposons que $|||u||| = 0$. Alors la condition « $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant |||u|||\,\|x\|$ »assure que $u$ est nulle sur $E$.

2. • On obtient immédiatement $|||\mathrm{id}||| = 1$.

- Soient $u$ et $v$ dans $A$ et $x \in S(0,1)$. Alors

$$\begin{aligned}\|(u\circ v)(x)\| &= \|u(v(x))\| \\ &\leqslant |||u|||\,\|v(x)\| \\ &\leqslant |||u|||\,|||v|||\end{aligned}$$

d'où le résultat en passant au sup.

**Exercice 6.** 1. La fonction $x \mapsto \langle x, f(x)\rangle$ est continue comme composée de l'application linéaire $x \mapsto (x,x)$ et de l'application bilinéaire $(x,y) \mapsto \langle x, f(y)\rangle$. Et $\mathbb{S}$ est fermée et bornée. Il suffit donc d'appliquer le théorème des bornes atteintes.

2. (a) Développons :

$$\begin{aligned}\frac{\langle a+t\,v,\ f(a+t\,v)\rangle}{\|a+t\,v\|^2} &= \frac{\langle a, f(a)\rangle + t\,(\langle a, f(v)\rangle + \langle v, f(a)\rangle + t^2\langle v, f(v)\rangle)}{\|a\|^2 + 2t\langle a, v\rangle + t^2\|v\|^2} \\ &= \frac{M + 2t\,\langle a, f(v)\rangle + O(t^2)}{1 + O(t^2)} \\ &= M + 2t\,\langle a, f(v)\rangle + O(t^2).\end{aligned}$$

(b) Comme $\frac{a+t\,v}{\|a+t\,v\|} \in \mathbb{S}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}M &\geqslant \left\langle \tfrac{a+t\,v}{\|a+t\,v\|}, f(\tfrac{a+t\,v}{\|a+t\,v\|})\right\rangle \\ &= \frac{\langle a+t\,v,\ f(a+t\,v)\rangle}{\|a+t\,v\|^2} \\ &= M + 2t\,\langle v, f(a)\rangle + O(t^2).\end{aligned}$$

Bilan :

$$2t\langle v, f(a)\rangle \leqslant O(t^2)$$

mais une fonction linéaire ne peut être inférieure au voisinage de 0 à un multiple de la fonction carré que si sa pente en l'origine est nulle, donc $\langle v, f(a)\rangle = 0$.

3. On vient de prouver que $a^\perp$ est stable par $f$, donc $\mathrm{Vect}(a)$ aussi puisque $f$ est autoadjoint, donc $a$ est un vecteur propre de $f$.

**Exercice 7.** 1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \chi_{\lambda I - \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1\end{pmatrix}} &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -y \\ -x & \lambda - 1\end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1) - xy \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - xy.\end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme vaut

$$9 - 4(2 - xy) = 1 - 4xy.$$

De là, trois situations sont possibles.

- $1 - 4xy < 0$ : le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle, la matrice associée ne peut pas être diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc $(x, y) \notin E$.
- $1 - 4xy = 0$ : le polynôme caractéristique admet une racine réelle double, donc la matrice associée admet une valeur propre réelle double. Mais elle ne peut pas non plus être diagonalisable, car sinon elle serait proportionnelle à la matrice identité, ce qui est impossible vu ses coefficients diagonaux. Donc $(x, y) \notin E$.
- $1 - 4xy > 0$ : la matrice admet deux valeurs propres réelles distinctes, donc (condition suffisante mais pas nécessaire) elle est diagonalisable, et $(x, y) \in E$.

Bilan :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 4xy > 0\}.$$

2. $E$ est l'image réciproque de $]0, +\infty[$ par la fonction continue (car polynomiale) $(x, y) \mapsto 1 - 4xy$.

**Exercice 8.** **1)** La matrice

$$\boxed{A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}$$

convient.

**2)** On a

$$\chi_A = X^3 - \frac{13}{16}X - \frac{3}{16} = (X-1)\left(X + \frac{3}{4}\right)\left(X + \frac{1}{4}\right).$$

Donc

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right\}.$$

La matrice $A$ est de taille 3, a trois valeurs propres réelles deux à deux différentes, donc est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et tous les espaces propres sont de dimension 1.

**3)** Après calculs : soit

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7\end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2\end{pmatrix},$$

alors

$$E_{-\frac{3}{4}} = \mathrm{Vect}(U), \qquad E_1 = \mathrm{Vect}(V) \qquad \text{et} \qquad E_{-\frac{1}{4}} = \mathrm{Vect}(W).$$

Comme la matrice $A$ est diagonalisable, et que l'on vient de trouver une base de chaque espace propre de $A$, on peut affirmer que la matrice

$$\boxed{P = (V|W|U) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 1 \\ 16 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

est inversible, et vérifie

$$P^{-1}AP = D.$$

**4)** L'application $\Phi$ est linéaire, comme conséquence de la bilinéarité du produit matriciel : pour tout $(M,N) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda M + N) = P(\lambda M + N)P^{-1} = \lambda PMP^{-1} + PNP^{-1} = \lambda\Phi(M) + \Phi(N).$$

Comme son espace de départ est $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, on en déduit que l'application $\Phi$ est continue.
**5)** • Notons

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

alors en multipliant par $P$ à gauche, $P^{-1}$ à droite, on a

$$A = PDP^{-1},$$

et par récurrence sur $n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \Phi(D^n).$$

• Or, comme la matrice $D$ est une matrice diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{4}\right) \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: J,$$

car $\left|-\dfrac{3}{4}\right| < 1$ et $\left|-\dfrac{1}{4}\right| < 1$, donc

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \left(-\frac{3}{4}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ainsi, toutes les suites coordonnées (dans la base canonique) de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, ce qui assure la convergence de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$).
• Par continuité de l'application $\Phi$, par composition de limites, on en déduit que

$$A^n = \phi(D^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q := \Phi(J) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

• Remarquons que

$$J^2 = J,$$

donc

$$Q^2 = PJP^{-1}PJP^{-1} = PJ^2P^{-1} = PJP^{-1} = Q,$$

donc $Q$ est bien une matrice d'un projecteur (on peut sinon faire comme dans l'exercice **??**).
• Déterminons $\mathrm{Ker}(Q)$ et $\mathrm{Im}(Q)$ :
**Méthode 1 :** ◇ Soit $X \in E_{-\frac{1}{4}}$, alors

$$AX = -\frac{1}{4}X,$$

puis par récurrence directe, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^nX = \left(-\frac{1}{4}\right)^n X.$$

Or, $\left|-\dfrac{1}{4}\right| < 1$, donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0, \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{n\to\infty}(A^n X) = 0_{3,1}.$$

Mais, le produit matriciel est continu (car bilinéaire et défini sur des espaces de dimension finie), donc

$$\lim_{n\to\infty}(A^n \times X) = \left(\lim_{n\to\infty} A^n\right) \times X = Q \times X.$$

Par unicité de la limite, on en déduit

$$QX = 0_{3,1}, \qquad \text{soit} \qquad X \in \mathrm{Ker}(Q).$$

Et donc

$$E_{-\frac{1}{4}} \subset \mathrm{Ker}(Q).$$

⋄ Comme $\left|-\dfrac{3}{4}\right| < 1$, on a de même

$$E_{-\frac{3}{4}} \subset \mathrm{Ker}(Q).$$

⋄ Puis des espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe, et $\mathrm{Ker}(Q)$ est un espace vectoriel, donc

$$E_{-\frac{1}{4}} \oplus E_{-\frac{3}{4}} \subset \mathrm{Ker}(Q).$$

En particulier,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(Q)\big) \geqslant \dim\left(E_{-\frac{1}{4}} \oplus E_{-\frac{3}{4}}\right) = \dim\big(E_{-\frac{1}{4}}\big) + \dim\big(E_{-\frac{3}{4}}\big) = 1 + 1 = 2.$$

⋄ Puis, pour $X \in E_1$, on a

$$AX = X,$$

puis par récurrence directe, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n X = X,$$

et donc (par continuité du produit matriciel),

$$X = A^n X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} QX,$$

donc (par unicité de la limite)

$$QX = X, \qquad \text{soit} \qquad X \in \mathrm{Im}(Q).$$

Donc

$$E_1 \subset \mathrm{Im}(Q),$$

et donc

$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) \geqslant \dim\big(E_1\big) = 1.$$

⋄ Enfin, le théorème du rang appliqué à $Q$ donne

$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(Q)\big) = 3,$$

ce qui force

$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) = 1 = \dim\big(E_1\big) \qquad \text{et} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(Q)\big) = 2 = \dim\left(E_{-\frac{1}{4}} \oplus E_{-\frac{3}{4}}\right).$$

⋄ Avec une inclusion et l'égalité des dimensions, on en déduit

$$\boxed{\mathrm{Im}(Q) = E_1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Ker}(Q) = E_{-\frac{1}{4}} \oplus E_{-\frac{3}{4}}}.$$

**Méthode 2 :** $\diamond$ Soit $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(Q) &\Leftrightarrow QX = 0_{3,1} \\
&\Leftrightarrow PJP^{-1}X = 0_{3,1} \\
&\Leftrightarrow JP^{-1}X = 0_{3,1} \\
&\Leftrightarrow P^{-1}X \in \operatorname{Ker}(J) \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mid P^{-1}X = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mid X = P\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+b \\ a-b \\ 2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = aU + bW
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}(Q) = \operatorname{Vect}(U,W)}$$

(et $(U,W)$ est une famille libre, car c'est une famille de vecteurs propres de $A$ associés à des valeurs propres différentes, donc $(U,W)$ est une base de $\operatorname{Ker}(Q)$).
$\diamond$ Puis, $\operatorname{rg}(Q) = 1$ : on l'obtient, soit par le théorème du rang appliqué à $Q$, soit car $\operatorname{rg}(J) = 1$ est direct, et multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang, donc

$$\operatorname{rg}(Q) = \operatorname{rg}(PJP^{-1}) = \operatorname{rg}(J) = 1.$$

Donc il suffit de trouver un vecteur non nul dans $\operatorname{Im}(Q)$ pour en avoir une base. Or,

$$AV = V,$$

donc par récurrence directe,

$$A^n V = V$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et à la limite (par continuité du produit matriciel),

$$QV = V, \qquad \text{soit} \qquad V \in \operatorname{Im}(Q),$$

et $V \neq 0_{3,1}$, donc

$$\boxed{\operatorname{Im}(Q) = \operatorname{Vect}(V) = E_1(A)}.$$

**Méthode 3 :** on a

$$Q = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad \text{donc} \qquad QP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant

$$P = \left( \; V \mid W \mid U \; \right)$$

en colonne, par calcul matriciel par blocs, on a

$$QP = Q\left( \; V \mid W \mid U \; \right) = \left( \; QV \mid QW \mid QU \; \right) \qquad \text{et} \qquad P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left( \; V \mid W \mid U \; \right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left( \; V \mid 0_{3,1} \mid 0_{3,1}$$

Donc

$$QV = V, \qquad \text{soit} \qquad V \in \operatorname{Im}(Q),$$

et donc

$$E_1 = \operatorname{Vect}(V) \subset \operatorname{Im}(Q),$$

mais aussi

$$QW = QU = 0_{3,1}, \qquad \text{donc} \qquad W \in \mathrm{Ker}(Q) \quad \text{et} \quad U \in \mathrm{Ker}(Q),$$

soit

$$E_{-\frac{3}{4}} \oplus E_{-\frac{1}{4}} = \mathrm{Vect}(W,U) \subset \mathrm{Ker}(Q).$$

On en déduit

$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) \geqslant \dim(E_1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(Q)\big) \geqslant \dim\big(\mathrm{Vect}(W,U)\big) = 2.$$

Mais le théorème du rang appliqué à $Q$ donne

$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(Q)\big) = 3,$$

ce qui force

$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) = 1 = \dim(E_1) \qquad \text{et} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(Q)\big) = 2 = \dim\big(\mathrm{Vect}(W,U)\big).$$

Et donc, une inclusion et l'égalité des dimensions donnent

$$\boxed{\mathrm{Im}(Q) = E_1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Vect}(W,U) = E_{-\frac{3}{4}} \oplus E_{-\frac{1}{4}}}.$$

**6)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = AX_d,$$

donc par récurrence directe sur $n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_d = A^n X_0,$$

et à la limite,

$$A^n X_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} QX_0$$

(par continuité du produit matriciel, ou bien par continuité de l'application

$$M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto MX_0 \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$$

qui est continue car linéaire et définie sur un espace de dimension finie). Donc la suite de matrices colonnes $(X_d)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, ce qui revient à dire que les suites numériques

$$(a_d)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (b_d)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (c_d)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent, et de plus

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_d \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_d \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_d \end{pmatrix} = QX_0.$$

La question ne demandait pas de déterminer ces limites. Cependant, on peut calculer $QX_0$ ainsi :

**Méthode 1 :** on a $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et $QX_0$ est le projeté de $X_0$ sur $E_1 = \mathrm{Vect}(V)$ parallèlement à $E_{-\frac{1}{4}} \oplus E_{-\frac{3}{4}} = \mathrm{Vect}(U,W)$. On détermine alors les valeurs (uniques) $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$X_0 = xV + yU + zW$$

(en posant le système correspondant, puisque l'on connaît $X_0$, $U$, $V$ et $W$), et alors

$$QX_0 = xV.$$

**Méthode 2 :** on a

$$QX_0 \in \mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Vect}(V),$$

donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$QX_0 = \alpha V = \begin{pmatrix} 12\alpha \\ 16\alpha \\ 7\alpha \end{pmatrix}.$$
On a
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(par calcul direct), donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} AX_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_d = a_d + b_d + c_d,$$
donc la suite numérique
$$\left(a_d + b_d + c_d\right)_{n \in \mathbb{N}}$$
est constante, donc égale à
$$a_0 + b_0 + c_0 = a + b + c.$$
Puis,
$$a + b + c = \lim_{n \to \infty} (a_d + b_d + c_d) = \left((QX_0)_1 + (QX_0)_2 + (QX_0)_3\right) = 12\alpha + 16\alpha + 7\alpha = 35\alpha,$$
donc
$$\alpha = \frac{a+b+c}{35},$$
ce qui donne
$$QX_0 = \frac{a+b+c}{35} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_d = \frac{12}{35}(a+b+c)}, \qquad \boxed{\lim_{n \to \infty} b_d = \frac{16}{35}(a+b+c)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{n \to \infty} c_d = \frac{7}{35}(a+b+c)}.$$