Chapitre 15 - Espérance et variance

1 Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

1.1 Généralités

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0, +\infty]$. On définit l'espérance de X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Remarques :

- Pour donner un sens à cette somme, on adopte la convention $x\mathbb{P}(X = x)$ si $\mathbb{P}(X = x) = 0$ y compris lorsque $x = +\infty$.
- L'espérance est en conséquence à valeurs dans $[0, +\infty]$. Ainsi une variable aléatoire positive a toujours une espérance, si on s'accorde à utiliser la valeur $+\infty$ dans les cas de non convergence de la somme.

Définition : Variable d'espérance finie

Une variable aléatoire discrète X à valeurs réelles ou complexe est **d'espérance finie** si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))$ est sommable. Dans ce cas, la somme finie de cette famille est **l'espérance de X.**

Remarques :

- Si $X(\Omega)$ est fini, X est d'espérance finie. Ainsi, l'année dernière, on n'avait pas eu besoin de se poser la question de l'existence de l'espérance. Désormais, il faudra.
- On dit que X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.
- Comme on avait vu en début d'année, le caractère sommable permet d'éviter la question houleuse de l'ordre de sommation. On peut donc sommer dans l'ordre que l'on désire, et le théorème de sommation par paquets est disponible.

Exemple : montrer que $X \sim \mathcal{G}(p)$ est d'espérance finie.

Proposition : S

i X est à valeur dans $\mathbb{N} \cap \{+\infty\}$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Démonstration : ***À faire.*** □

Application : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ si $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Proposition : S

i $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Démonstration : ***À faire.*** □

1.2 Transfert et linéarité

Théorème : Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète. Soit f une application numérique définie sur $X(\Omega)$.
$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $(f(x)P(X = x))$ est sommable. De plus, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

Démonstration : ***À faire.*** □

Remarques :

- Ce théorème n'est pas une tautologie ! Normalement l'espérance de $f(X)$ s'écrirait :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{y \in f(X)(\Omega)} yP(f(X) = y).$$

Le théorème *tranfert* sur le calcul en utilisant plutôt les valeurs et les propabilités pour les valeurs de X plutôt que celles de $f(X)$.

- Le théorème est valable pour les couples. $Z = g(X,Y)$ est d'espérance finie si et seulement si $(f(x,y)P(X = x, Y = y))$ est sommable et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X = x, Y = y).$$

- En fait, on peut même généraliser à n variables aléatoires.

Proposition : Linéarité

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérance finie. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $X + \lambda Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda\mathbb{E}(Y).$$

Remarque : En particulier, $X - E(X)$ est centrée.

1.3 Théorèmes d'existence et de comparaison

Proposition : Positivité et croissance

Si $X \leqslant 0$ est d'espérance finie, alors $E(X) \leqslant 0$
Si $X \leqslant Y$ avec X et Y d'espérances finies, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Proposition : Comparaison

Si $|X| \leqslant Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Proposition

Si X est positive et d'espérance nulle, alors $X = 0$ presque sûrement.

Proposition : Espérance du produit

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Remarques :

- ce résultat se généralise sans difficultés à n variables mutuellement indépendantes.
- La réciproque est fausse même s'il est difficile de trouver des contre-exemples.

En voici un tout de même : X telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$. $Y \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. On les suppose indépendantes
On pose $Z = XY$. Calculer $E(ZY) - E(Z)E(Y)$. Mais Z et Y ne sont pas indépendantes (cas $Z = 0$ et $Y = 1$).

2 Variance d'une variable aléatoire discrète réelle

2.1 Variance

Proposition

Si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie.

Remarque : Attention, on n'a pas toujours $x \leqslant x^2$! Faire la démo si besoin.

Proposition : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY aussi et :

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

Il y a égalité si et seulement si il existe un réel t tel que $X + tY = 0$ presque sûrement.

Démonstration : ***À faire*** □

Définition : Variance

Si X^2 est d'espérance finie, alors $(X - E(X))^2$ est d'espérance finie. On appelle variance de X le réel :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Proposition : Formule de Kœnig-Huygens

Si X^2 est d'espérance finie alors :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Remarques :

- On dit que X est réduite si $V(X) = 1$.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors $V(X) \geqslant 0$.

- En conséquence, si $V(X) = 0$, alors $X = E(X)$ presque sûrement.
- On note $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ l'écart-type de X lorsqu'il existe.

Proposition

Soit X tel que X^2 est d'espérance finie. On a :

$$V(aX + b) = a^2V(X) \text{ et } \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Remarque : Si $V(X) > 0$, alors $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Proposition

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $V(X) = \lambda$.

2.2 Covariance

Définition : Covariance

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, leur covariance est :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Remarques :

- La covariance est symétrique
- bilinéaire
- positive, dans le sens suivant : $Cov(X, X) = V(X) \geqslant 0$.
- Il manque le caractère défini pour en faire un produit scalaire. En fait c'est un produit scalaire à condition de se mettre sur les variables aléatoires *centrées* et d'identifier les variables presque sûrement égale à 0 avec la variable nulle.
- On a $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- Donc si X et Y sont indépendantes, $Cov(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse.

Proposition

Soient (X_i) une famille finie de variables dont le carré admet une espérance finie. On a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} (E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)).$$

Remarque : c'est juste une formule de développement de carré avec les doubles sommes à droite.

Proposition

Dans les mêmes conditions, si les X_i sont deux à deux indépendantes :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

3 Fonctions génératrices

3.1 Généralités

Proposition

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série entière $\sum P(X = n)t^n$ est de rayon de convergence R_X au moins égal à 1 et converge normalement sur $[-1, 1]$.

Remarque : Par transfert, on remarque que pour tout $t \in]-R_X, R_X[$:

$$E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

Définition : Fonction génératrice

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa série génératrice par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

Proposition

Par unicité du développement en série entière, si deux variables ont même séries génératrices, elles ont même loi.
Ainsi, la loi d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.

Exemples :

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $G_X(t) = 1 - p + pt$ (rayon de convergence infinie).
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ (rayon de convergence infinie).
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ (rayon de convergence $\frac{1}{1-p}$).
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ (rayon de convergence infinie).

3.2 Applications

Proposition

La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$.

Proposition

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

Remarque : Comme G_X est une série entière, c'est le cas dès que $R_X > 1$.

Proposition

Si X et Y sont deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Remarque : ce résultat se généralise à toute famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Exemple : somme de variables binomiales indépendantes.

4 Inégalités probabilistes

Proposition

Si X est une variable aléatoire réelle discrète positive d'espérance finie alors :

$$\forall t > 0,\ P(X \geqslant t) \leqslant \frac{E(X)}{t}.$$

Démonstration : ***À faire.*** ☐

Proposition

Si X est une variable aléatoire réelle discrète telle que X^2 est d'espérance finie alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Démonstration : ***À faire.*** ☐

Proposition : Loi faible des grands nombres

Si (X_n) est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$ on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration : ***À faire.*** ☐

Remarque : interprétation « la moyenne se rapproche de l'espérance lorsqu'on augmente le nombre d'itération ».