CHAPITRE 16 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

1.1 Dérivée en un point

Définition : Dérivée en un point suivant un vecteur

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $v \in \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$.
Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in]-\delta, \delta[, \; a + tv \in U.$$

On pose alors pour tout $t \in]-\delta, \delta[$:

$$\varphi_v(t) = f(a + tv).$$

Si φ_v est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée suivant le vecteur v en a.
On note cette dérivée $\mathrm{D}_v f(a)$ et on a :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \varphi_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Définition : Dérivées partielles

On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable lorsque f admet une dérivée en a suivant le vecteur e_j.
On note cette dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ou parfois $\partial_j f(a)$.

Remarque : On peut étendre ces définitions au cas des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, en considérant les fonctions coordonnées $(f_1, \ldots, f_n)$.

Définition : Fonctions dérivées partielles

Si f admet une dérivée partielle en a par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable en tout point de U, on définit sur U la $i^{\text{ème}}$ fonction dérivée partielle à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{array} \right.$$

1.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U.

Exemples : Les fonctions coordonnées sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
Propriétés : Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur U alors :

- $f + g$ est $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial (\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$;
- fg est $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial (fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$;
- si g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} g - f \frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$;
- Si φ est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I telle que $f(U) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial (\varphi \circ f)}{x_i} = \varphi' \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Exemples :

- les fonctions polynômes de p variables sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- les fonctions quotients de polynômes sont également $\mathcal{C}^1$ sur tout ouvert U où leur dénominateur ne s'annule pas.

Proposition : Développement limité des fonctions $\mathcal{C}^1$

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et si $a = (a_1, \ldots, a_p)$ est un point de I alors pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in U$, on a :

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + (x_p - a_p) \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + \|x - a\| \epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1.

Démonstration : ***Hors-programme*** □

Proposition : U

ne fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U.

Démonstration : *Se déduit du résultat précédent.* □

Définition : Différentielle en un point

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. La différentielle de f au point a, notée $\mathrm{d}f_a$ est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$\mathrm{d}f_a : (h_1, \ldots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Remarques :

- On notera $\mathrm{d}f_a.h = \mathrm{d}f_a(h)$. Cette notation souligne la formule de produit scalaire qui apparaît dans la différentielle.
- Pour tout $v \in \mathbb{R}^p$, on a :
$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f_a.v.$$
- On peut réexprimer le développement limité :
$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f_a.(x-a) + \|x-a\|\epsilon(x).$$
- **Attention !** L'existence des dérivées partielles n'implique pas l'existence d'un développement limité. De même, on évitera de parler de la différentielle si la fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$ (même si ces dérivées partielles existent).
- Dans $\mathbb{R}^3$, si on note x, y, z les *fonctions* coordonnées, on a alors :
$$\mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$
Cela rappelle les notations des physiciens et ce n'est pas un hasard. En fait, on peut pousser tout cela **beaucoup** plus loin et développer la notion de *formes différentielles* (complètement hors-programme) qui permet de généraliser et rendre très joli tous les calculs avec les rotationnels, divergences, etc.

2 Règle de la chaîne

2.1 Généralités

Proposition : Règle de la chaîne

Soit f une application réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soient x_1, ..., x_p p fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I telles que : $\forall t \in I,\ (x_1(t), \ldots, x_p(t)) \in U$.
Alors $g : t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_p(t)) x_i'(t).$$

Démonstration : *Passer par le DL* □

Remarque : cas particulier $p \in \{2, 3\}$.
Exemple : Calculer de deux manière différente $g'(t)$ pour $g(t) = f(t, t^2)$ avec $f(x, y) = xe^y$.

Corollaire

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et soient x_1, ..., x_n n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ telles que $\forall u \in U$, $(x_1(u), \ldots, x_n(u)) \in V$.
$g : u \mapsto f(x_1(u), \ldots, x_n(u))$ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec :

$$\forall u \in U,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(u), \ldots, x_n(u)) \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u).$$

Exemple : coordonnées polaires

2.2 Applications

Corollaire

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe de U de $\mathbb{R}^p$.
f est constante si et seulement si ses dérivées partielles sont nulles sur U.

Démonstration : ***À faire*** □

Remarques :

- L'hypothèse convexe est forte (on peut l'assouplir), mais il faut une hypothèse. C'est le parallèle de l'hypothèse de travailler sur un intervalle pour $f' = 0 \to f$ constante. Exemple du plan infiniment chargé.
- On peut adapter le théorème précédent, en regardant uniquement une dérivée partielle.
  Que dire par exemple si $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$?
- Que dire maintenant si :
$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ ?}$$

3 Gradient

Définition : Gradient

Soit f une application réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$.
Le gradient de f au point a est le vecteur :
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right).$$

Remarques :

- Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, on a : $\mathrm{d}f_a.h = \langle \nabla f(a), h\rangle$.
- Si v est unitaire, on a d'après Cauchy-Schwarz :
$$|\mathrm{d}f_a.v| = |\langle \nabla f(a), v\rangle| \leqslant \|\nabla f(a)\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1}.$$
  En particulier, on a égalité, si et seulement si v est colinéaire à $\nabla f(a)$.
  Ainsi, si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

4.1 Généralités

Définition : Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction réelle de p variables définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, si la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle à l'ordre 1 de f admet une dérivée partielle à l'ordre 1 par rapport à la $j^{\text{ème}}$ coordonnée au point a de U, alors cette dérivée, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ est une dérivée partielle d'ordre 2 de f en a.
Si elle existe en tout point a de U, on définit sur U la fonction dérivée partielle d'odre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Remarques :

- L'ordre des variables au dénominateur est naturel puisque :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$
- Lorsque l'on dérive deux fois par rapport à la même variable, on note :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Définition : Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et lorsque ses fonctions dérivées partielles sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème : Théorème de Schwarz

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U alors en tout point a de U :
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

4.2 Matrice hessienne et formule de Taylor-Young

Définition : Matrice hessienne

La matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :

$$H_f(a) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a))_{i,j}.$$

Remarque : Puisque f est $\mathcal{C}^2$, la matrice hessienne est symétrique. Comme elle est symétrique réelle, elle est *diagonalisable*.

Proposition : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, a un point de U et h un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^p$ tel que $a+h \in U$.
On identifie $\mathbb{R}^p$ et $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ pour la formulation suivante. On a :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|^2)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|^2).$$

5 Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

5.1 Extremums et points critiques

Définition : Extremum global, local

Soit f une fonction réelle définie sur un partie Δ de $\mathbb{R}^p$.

- f admet un **maximum global** (respectivement un minimum global) au point a de Δ si :

$$\forall x \in \Delta,\ f(x) \leqslant f(a) \text{ (respectivement } f(x) \geqslant f(a)).$$

- f admet un **maximum local** (respectivement un minimum local) au point a de Δ si :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in \overline{B}(a,r) \cap \Delta,\ f(x) \leqslant f(a) \text{ (respectivement } f(x) \geqslant f(a)).$$

Le mot extremum est le mot générique qui désigne un maximum ou minimum.

Définition : Point critique

Soit f une application réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. Soit $a \in U$.
a est un point critique de f si le gradient de f s'annule en a.

Remarque : Pour $p = 1$, cela revient simplement à $f'(a) = 0$. On commence à discerner ici pourquoi on va s'intéresser aux points critiques : au moins pour $p = 1$, si on a un extremum local en a, alors a est un point critique.

5.2 Condition nécessaire et condition suffisante pour un extremum

Proposition : Condition nécessaire sur un ouvert

Soit f une application réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. Soit $a \in U$.
Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique.

Remarque : Attention ! L'hypothèse d'ouvert est importante. Regarder un exemple simple $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Proposition : Condition suffisante pour une fonction $\mathcal{C}^2$

Si f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f sur U :

- Si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f atteint un minimum local strict en a ;
- Si $H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de minimum en a.

Démonstration : *Idée de démo avec Taylor ?* □

Corollaire : Cas du maximum

Si f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f sur U :

- Si $-H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f atteint un maximum local strict en a ;
- Si $-H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de maximum en a.

Proposition : Cas à 2 variables

Si f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point critique de f sur U :

- Si $\det H_f(a) < 0$, f n'a pas d'extremum en a.
- Si $\det H_f(a) > 0$, f atteint en a un extremum strict qui est :
  - un minimum si $\mathrm{tr}(H_f(a)) > 0$;
  - un maximum si $\mathrm{tr}(H_f(a)) < 0$.

Remarque : Si $\det H_f(a) < 0$, on dit que a est un point selle (ou un point colle).
Exemple d'étude : Trouver les extremums globaux de f sur le rectangle $[0,3] \times [1,5]$ de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$.