Correction DM 5 - Intégrales à paramètres

Exercice 1 - CCINP PSI 2024 (Exercice - Formule de Stirling)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+^\star$.
   - **En 0 :** On a $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $1-x<1$ (Riemann en 0). Donc, par critère d'équivalence, f_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$, c'est-à-dire $x>0$.
   - **En $+\infty$:** On a $f_x(t) = o\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$ car $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (croissances comparées). Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable en $+\infty$ (car $1/2>0$). Donc, par critère de négligeabilité, f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

   Ainsi, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$ si et seulement si $x>0$. De plus, f_x est positive donc son intégrabilité est équivalente à la convergence de l'intégrale.

   Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } x>0.}$

2. Soit $x>0$. On pose $u : t\mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$.
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus, uv possède des limites finies aux bornes :
   - En 0^+ : $u(t)v(t) = -t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ car $x>0$.
   - En $+\infty$: $u(t)v(t) = -t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

   Donc, par le théorème d'intégration par parties généralisée, les intégrales $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u'\,v$ sont de même nature et, en cas de convergence :

   $$\int_{]0,+\infty[} u\,v' = [uv]_0^{+\infty} - \int_{]0,+\infty[} u'\,v$$

   Or $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\,v' = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(x+1)$, qui est convergente d'après la question 1 (car $x+1>0$). Donc :

   $$\Gamma(x+1) = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0-0+x\Gamma(x)$$

   D'où : $\boxed{\forall x>0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$
   De plus, un calcul direct donne :

   $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

   En posant $u_n = \Gamma(n+1)$, on a donc pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $u_n = nu_{n-1}$ et $u_0=1$. C'est exactement la définition de la factorielle. D'où :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$$

   On en déduit que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$

3. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.
   On a $u_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

   $$u_{n+1} = \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n+1}{2}u_n$$

Par récurrence :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2}\times\frac{2n-3}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^n\cdot(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^n\cdot 2^n\cdot n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Calculons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. On pose $\varphi : u \mapsto u^2$, définie de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective. Donc par changement de variable (avec $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$), les intégrales :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{u}\times 2u\mathrm{d}u$$

ont même nature et sont égales en cas de convergence. Or la première intégrale est $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, que l'on sait convergente. Donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = 2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Ainsi : $\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}}$ (relation valable aussi pour $n = 0$).

4. Remarquons que puisque la fonction ln est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, les ρ_k sont bien définis pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La relation de Chasles et les propriétés du logarithme fournissent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\ln k - \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln t\mathrm{d}t\\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}k\right) - \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\mathrm{d}t\\
&= \ln((n-1)!) - \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La convention citée par l'énoncé dit que ce résultat reste valable pour $n = 1$. Donc, d'après la question 2 :

$$\boxed{\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1}\rho_k}$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Le changement de variable $u = t - k$ fournit :

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln t\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln(u+k)\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(u+k)\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{1}{2}}\ln(u+k)\mathrm{d}u$$

Puis en posant $w = -u$, on a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(u+k)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}}\ln(k-w)\mathrm{d}w$. Finalement :

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \ln k - \int_0^{\frac{1}{2}}\ln(t+k)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{1}{2}}\ln(k-t)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(2\ln k - \ln(t+k) - \ln(k-t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{k^2}{(k+t)(k-t)}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\rho_k = -\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \mathrm{d}t}$$

6. La fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est croissante sur $[0,1[$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$0 \leqslant -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

En intégrant :

$$0 \leqslant \rho_k \leqslant \frac{1}{2} \times \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)\right)$$

Or $-\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8k^2}$. Par équivalence, les deux termes sont positifs au voisinage de $+\infty$. À un facteur près, la série $\sum \frac{1}{8k^2}$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2}\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)\right)$ converge.

Puis, par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}^\star} \rho_k \text{ converge.}}$

7. D'après la question 4, on a $\ln\Gamma(n) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$.

Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k$ (qui existe d'après la question 6). Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = S + o(1)$.

De manière générale, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ *alors* $u_n = \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ *et réciproquement.*

La fonction ln admet pour primitive $t \mapsto t\ln t - t$. Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \mathrm{d}t &= [t\ln t - t]_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1 \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1
\end{aligned}$$

Or $\left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n} = -\frac{1}{2}$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2}$$

D'où :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \mathrm{d}t = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} + o(1)$$

Posons $c = S + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$. On obtient :

$$\boxed{\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)}$$

Ce qui donne : $\Gamma(n) = \exp\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)\right) = n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{c}\mathrm{e}^{o(1)}$.
Ici il faut se rappeler que $o(1)$ veut juste dire quelque chose qui tend vers 0. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{o(1)} = 1$.
Donc, on obtient :

$$\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{c} n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x > 0$. En posant $u = \frac{t}{n}$, ce qui est un changement de variable affine donc licite ($t = nu$ et $\mathrm{d}t = n\mathrm{d}u$) :
$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u$$
Les intégrales sont bien convergentes d'après l'énoncé.
D'où : $\boxed{\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u}$

9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ l'assertion H_n : « Pour tout $x > 0$, $\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$. »
Initialisation : Pour tout $x > 0$:
$$\Gamma_1(x) = 1 \times \int_0^1 u^{x-1}(1-u)\mathrm{d}u = \left[\frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1^x \cdot 1!}{x(x+1)}$$
Donc H_1 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que H_n est vraie. Soit $x > 0$.
On a $\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\mathrm{d}u$.
On procède à une intégration par parties avec :
$$\alpha(u) = (1-u)^{n+1}, \quad \alpha'(u) = -(n+1)(1-u)^n, \quad \beta'(u) = u^{x-1}, \quad \beta(u) = \frac{u^x}{x}$$
Comme $x > 0$, on a $\lim_{u\to 0} \alpha(u)\beta(u) = 0$ et $\alpha(1)\beta(1) = 0$. Donc :
$$\begin{aligned}\Gamma_{n+1}(x) &= (n+1)^x \left[\alpha(u)\beta(u)\right]_0^1 + (n+1)^x \int_0^1 (n+1)(1-u)^n \frac{u^x}{x}\mathrm{d}u \\ &= \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1 u^{(x+1)-1}(1-u)^n\mathrm{d}u \\ &= \frac{(n+1)^{x+1}}{x} \times \frac{\Gamma_n(x+1)}{n^{x+1}}\end{aligned}$$
Par hypothèse de récurrence H_n appliquée à $x+1$:
$$\begin{aligned}\Gamma_{n+1}(x) &= \frac{(n+1)^{x+1}}{x} \times \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1+n)} \\ &= \frac{(n+1)^x \cdot (n+1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\end{aligned}$$
Ainsi H_{n+1} est vraie.
Conclusion : Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x > 0,\ \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$

10. Désignons par $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :
$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$
Pour $x > 0$ fixé, on a : $\forall n \geqslant 1,\ \Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.
Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :
   - **Mesurabilité :** Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur l'intervalle d'intégration $\mathbb{R}_+^\star$.
   - **Convergence simple :** Soit $t > 0$ fixé. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $0 < t < n$.
   Ainsi, pour $n \geqslant n_0$:
   $$f_n(t) = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)$$

Or :

$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)=n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-t+o(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-t.$$

Par composition de limite avec la fonction exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$ (donc en $-t$), on a : $f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge donc simplement vers $f:t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

- **Domination :** Par concavité de ln, on a $\forall u>-1,\ \ln(1+u)\leqslant u$. Par croissance de l'exponentielle :

$$\forall t\in]0,n[,\quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

et l'inégalité reste vraie pour $t\geqslant n$ (car $f_n(t)=0$). Donc :

$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}=f(t)$$

et f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$ puisque $\Gamma(x)$ existe (question 1).

Le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(x)}$$

La question 9 fournit alors :

$$\boxed{\forall x>0,\quad \Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

11. Soit $x>0$ fixé. Une récurrence utilisant le résultat de la question 2 montre que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad \Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\cdot x\cdot\Gamma(x)$$

Donc :

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\,n^x}=\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x)}{(n-1)!\,n^x}=\frac{x(x+1)\cdots(x+n)\Gamma(x)}{(x+n)(n-1)!\,n^x}$$

Or $(x+n)(n-1)!=(x+n)(n-1)!\sim n\cdot(n-1)!=n!$ quand $n\to+\infty$. Donc :

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\,n^x}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)\Gamma(x)}{n!\,n^x}$$

On déduit alors de la question 10 que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\,n^x}=1}$$

Avec $x=\frac{1}{2}$, on obtient $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\sim\Gamma(n)\sqrt{n}$.

D'après la question 3 : $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

Mais d'après la question 2 : $(2n)!=\Gamma(2n+1)$ et $n!=n\Gamma(n)$. Donc :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\sim\Gamma(n)\sqrt{n}$$

soit :

$$\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi}\sim n\Gamma^2(n)\sqrt{n}\cdot 2^{2n}$$

On utilise ensuite la question 7 sur $\Gamma(2n+1)$ et $\Gamma^2(n)$:

- $\Gamma(2n+1)\sim\mathrm{e}^c(2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-(2n+1)}=\mathrm{e}^c(2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2n-1}$
- $\Gamma^2(n)\sim\mathrm{e}^{2c}n^{2n-1}\mathrm{e}^{-2n}$

On obtient :

$$e^c(2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n-1}\sqrt{\pi} \sim n \cdot e^{2c}n^{2n-1}e^{-2n} \cdot \sqrt{n} \cdot 2^{2n}$$

Soit :

$$e^c(2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-1}\sqrt{\pi} \sim e^{2c}n^{2n+\frac{1}{2}} \cdot 2^{2n}$$

D'où :

$$e^c \sim \frac{(2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{n^{2n+\frac{1}{2}} \cdot 2^{2n} \cdot e} = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{e}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$ et $\sqrt{\frac{2n+1}{n}} \sim \sqrt{2}$.
Donc :

$$e^c = e \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{e} = \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{e^c = \sqrt{2\pi}}$$

Et finalement : $\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}}$

C'est-à-dire : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ **(formule de Stirling)**.