TD15 - Espérance et variance

1 Espérance et variance

Exercice 1. Soit U une urne avec une boule blanche et une boule noire. On joue de la façon suivante : On tire une boule de l'urne.

- Si elle est blanche, on gagne et le jeu s'arrête.
- Si elle est noire, on remet la boule dans l'urne et on rajoute m boule(s) noire(s), puis on recommence.

Soit X la variable aléatoire réelle qui vaut le numéro du tirage où l'on gagne, si cela arrive, et 0 sinon.
Donner la loi de X lorsque $m = 1$, puis lorsque $m = 2$. Dans les deux cas, est-ce que X a une espérance finie ? Si oui, une variance ?

Exercice 2 (*pool testing*)**.** On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat positif) d'une maladie non contagieuse dont on sait qu'elle affecte une personne donnée avec la probabilité p. On a pour cela deux méthodes :

- Méthode I : on analyse le sang de chacune des N personnes.
- Méthode II : on regroupe les N individus en g groupes de n individus. On met le sang des n individus d'un même groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on analyse alors le sang des n individus du groupe.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire réelle X égale au nombre de groupes positifs.
2. Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre d'analyse dans la deuxième méthode. Calculer en fonction de N, n et p l'espérance et la variance de Y.
3. Comparer les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

Exercice 3. On effectue une suite illimitée de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. X_i est la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si le i-ème lancer donne un résultat « pile », et 0 si c'est « face ».

1. Pour $i \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on désigne par Y_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'on obtient 2 « pile » à la suite, lors des $(i-1)$-ème lancer et i-ème lancer, et 0 sinon. Autrement dit : $Y_i = X_{i-1} \times X_i$. Pour $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \sum_{i=2}^{n} Y_i$.
   (a) Quelle est la loi suivie par X_i ? Calculer $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathbb{V}(X_i)$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})$.
   (b) Quelle est la loi suivie par Y_i ? Calculer $\mathbb{E}(Y_i)$, $\mathbb{V}(Y_i)$ et $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$, puis $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$.
2. Pour $i \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on désigne par Z_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque le $(i-1)$-ème et le i-ème tirage donnent des résultats différents (pile puis face ou face puis pile), 0 sinon. Et pour $n \geqslant 2$, on pose $T_n = \sum_{i=2}^{n} Z_i$. T_n indique le nombre de « changements » dans la suite des résultats des n premiers lancers.
   Démontrer que $Z_i = X_i + X_{i-1} - 2Y_i$. Calculer $\mathbb{E}(Z_i)$, $\mathbb{V}(Z_i)$, $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_{i+1})$ et enfin $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit deux nouvelles variables aléatoires par $Y = (1+X)^{-1}$ et $Z = A^X$ (avec $A > 0$). Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 5. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X une variable aléatoire discrète vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = pq^n$. Montrer que X^2 a une espérance finie, et la calculer.

Exercice 6 (extrait Centrale MP 2016)**.** Soit S et T deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que T et $-T$ ont même loi. Montrer que

$$\mathbb{E}\big(\cos(S+T)\big) = \mathbb{E}\big(\cos(S)\big)\mathbb{E}\big(\cos(T)\big).$$

Exercice 7. Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée par :

$$\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}^2,\qquad \mathbb{P}(X=i,Y=j)=\tfrac{\alpha}{2^{i+1}j!}$$

1. Déterminer α.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y (*indication : avant de calculer la variance, regarder* $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$).
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 8. Soit $p\in]0,1[$, on note $q=1-p$. On considère deux variables aléatoires L_1 et L_2 à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ chacune, de sorte que, pour tout $(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbb{P}(L_1=n,L_2=k)=p^kq^{n+1}+q^kp^{n+1}$$

(*L_1 suit la loi de la variable donnant, dans une infinité de lancers d'une pièce qui donne Pile avec probabilité p, la longueur de la première série de valeurs consécutives, L_2 celle de la deuxième série*).
Montrer que L_1L_2 a une espérance finie, et la calculer.

Exercice 9. Soit p et q deux réels de l'intervalle $]0,1[$.

1. Vérifier que l'on définit une probabilité P sur $\mathbb{N}^2$ en posant, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $P\big((i,j)\big)=p\,q\,(1-p)^i\,(1-q)^j$.
2. (a) Déterminer les lois des variables aléatoires discrètes X et Y définies sur $\big(\mathbb{N}^2,\mathcal{P}(\mathbb{N}^2),\mathbb{P}\big)$ par : pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,
   $$X(i,j)=i\quad\text{et}\quad Y(i,j)=j.$$
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$ et $\mathbb{P}(X>Y)$.
3. Soit Z la variable aléatoire discrète définie par : pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,
   $$Z(i,j)=\begin{cases}1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs}\\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont impairs}\\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont de parités différentes}\end{cases}$$
   Montrer que Z admet une espérance finie et la calculer.
4. Justifier que la famille $\Big(Z(i,i)\mathbb{P}\big((i,i)\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 10. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles discrètes strictement positives, de même loi et indépendantes. On pose $U=X_1+X_2$, $T=X_1-X_2$, $Y_1=\frac{X_1}{U}$ et $Y_2=\frac{X_2}{U}$.

1. Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi et, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, Y_1^k et Y_2^k ont une espérance finie. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathbb{E}(Y_2)$.
2. Soit $Z=\frac{T}{U}$, montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, Z^k a une espérance finie. Déterminer $\mathbb{E}\,(Z)$, puis $\mathbb{V}\,(Z)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y_1)$.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire discrète qui possède une espérance finie. Soit A un évènement de probabilité non nul. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant A possède une espérance finie.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire ayant une variance. Soit $\mathrm{e}>0$ et $U=\mathrm{e}-X+\mathbb{E}(X)$. Soit $B=\mathbb{1}_{(U>0)}$ la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $(U>0)$.

1. Justifier que l'on a $U\leqslant UB$.
2. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué aux variables aléatoires U et B, montrer l'inégalité :
   $$\mathbb{P}\big(X-\mathbb{E}(X)\geqslant\mathrm{e}\big)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\mathrm{e}^2}.$$
3. Montrer de même que : $P\big(X-\mathbb{E}(X)\leqslant-\mathrm{e}\big)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\mathrm{e}^2}$.

4. Donner un majorant de $\mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \mathrm{e}\big)$ et comparer avec le majorant fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 13. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant une variance, définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}\big)$. On suppose que les limites $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(Y_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{V}(Y_n)=0$ existent. Montrer que, pour tout $\mathrm{e}>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big(|Y_n-\ell|>\mathrm{e}\big)=0$.

Exercice 14 (CCP PSI 2016 BEOS)**.** Soit X, Y des variables aléatoires vérifiant les hypothèse suivantes :

1. X et Y ont chacune une espérance finie,
2. X et $X-Y$ sont indépendantes,
3. Y et $X-Y$ sont indépendantes.

Montrer que $X-Y$ est presque sûrement constante. *Indication : On montrera l'existence, puis la nullité de* $\mathbb{V}(X-Y)$.

Exercice 15 (CCP PC RMS 2016 - exo 2)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Z=X+Y$. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 16 (CCP PSI 2015 BEOS)**.** Une machine tire au hasard un nombre dans $\mathbb{N}^*$: c'est $n\in\mathbb{N}^*$ avec probabilité $p_n=\frac{1}{2^n}$.
Le jeu : le joueur gagne n points si le nombre tiré n est pair, et perd n points si le nombre tiré n est impair.

1. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Soit G la variable aléatoire qui est égale au gain du joueur. Calculer l'espérance et la variance de G.

Exercice 17. Soit $p\in]0,1[$. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose $U=\min(X,Y)$ et $V=\max(X,Y)$.

1. Déterminer les lois de U et V. Calculer $\mathbb{E}(U)$, puis $\mathbb{E}(V)$ de deux manières différentes.
2. Quelle est la loi de $U+V$?
3. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X+Y\leqslant Z)$.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Y=\frac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance finie et la calculer.

Exercice 19. Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation. Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros, x et y sont des réels strictement positifs. Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.
On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X. On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison. On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X\leqslant n$ et qui vaut 0 si $X>n$.
On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. En distinguant deux cas selon la valeur de U montrer que : $\quad Y_n=\big(xX-(n-X)y\big)U+nx(1-U)$.
2. (a) Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $\{0,1,\dots,n\}$.
   (b) Exprimer, sous forme de somme, l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.
   (c) Montrer enfin que
   $$\mathbb{E}(Y_n)=(x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)\mathbb{P}(X=k)+nx.$$

   Dans la suite, on suppose que $(x+y)\mathbb{P}(X=0)<x$.
3. (a) Exprimer $\mathbb{E}(Y_{n+1})-\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de x, y et $\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que
   $$\sum_{k=0}^{n_0}\mathbb{P}(X=k)<\frac{x}{x+y}\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=0}^{n_0+1}\mathbb{P}(X=k)\geqslant\frac{x}{x+y}.$$

(c) En déduire que ce commerçant maximise son espérance de gain, avec un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.

4. Une étude statistique faite au cours des saisons précédentes donne que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha > 0$.
   (a) Exprimer $\mathbb{P}(X = k+1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = k)$.
   (b) Utiliser ce résultat pour écrire un programme en python permettant de calculer et d'afficher n_1 lorsque l'utilisateur fourni les valeurs de x, y et α.

Exercice 20. Soit X et Y deux variables aléatoires, X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, et Y « de loi de Poisson de paramètre X », c'est-à-dire que la loi de Y pour la probabilité $P_{(X=n)}$ est une loi de Poisson[1] $\mathcal{P}(n)$. Déterminer la loi de Y (*en laissant la probabilité sous forme d'une somme*) puis l'espérance de Y (*sous forme simplifiée*).

Exercice 21. Soit X et Y deux variables ayant une variance, et telles que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. Montrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$.

2 Fonctions génératrices

Exercice 22. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui a pour fonction génératrice $\mathrm{G}_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$. Quelle est la loi de probabilité de X ? Reconnaître la loi de $Y = \frac{X+1}{2}$, et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 23. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui a pour fonction génératrice $\mathrm{G}_X(t) = a \exp\left(1+t^2\right)$. Calculer la valeur de a. Quelle est la loi de probabilité de X ? $\mathbb{E}(X)$? $\mathbb{V}(X)$?

Exercice 24. Une boîte contient quatre boules numérotées 0, 1, 1, 2. On effectue n tirages avec remise. Soit S_n la somme des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n (*on pourra chercher sa fonction génératrice*).

Exercice 25 (loi de Pascal)**.** On effectue des tirages successifs avec remise dans une urne avec une proportion p de boule blanches. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre total de boules tirées au moment où on tire la n-ième boule blanche.

1. Établir que $X_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ et pour $k \in X_n(\Omega)$,
$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$
2. En dérivant N fois la série géométrique, montrer que pour $N \in \mathbb{N}$, $x \in]-1, 1[$,
$$\sum_{k=N}^{+\infty} \binom{k}{N} x^{k-N} = \frac{1}{(1-x)^{N+1}}.$$
3. (a) Montrer que X_n possède une espérance finie et donner sa valeur en fonction de n et p.
   (b) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $\frac{n-1}{X_n - 1}$ possède une espérance finie égale à p.
4. Calculer la fonction génératrice de X_n. En déduire que X_n a la même loi que la somme $Z_1 + \cdots + Z_n$ où les Z_1 sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
5. Retrouver l'espérance de X_n. Calculer la variance de X_n.

Exercice 26. Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $P\big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{1}{\lambda}$. En déduire l'inégalité $(\star)$:
$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$
2. Première amélioration de l'inégalité $(\star)$.
   (a) On considère une variable aléatoire discrète Z, d'espérance nulle et de variance σ^2. Montrer que, pour tout couple (a, x) de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$:
$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant P\big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big).$$

1. Normalement on devrait avoir $n > 0$. On garde la même formule pour $n = 0$, et on considère que l'image est encore $\mathbb{N}$.

(b) En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(Z+x)^2$, montrer que pour $a>0$, pour $x \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}.$$

(c) En déduire que pour $a>0$,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$$

(*on pourra étudier la fonction* $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$).

(d) Utiliser cette dernière inégalité pour montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda+1}.$$

3. Deuxième amélioration de l'inégalité $(\star)$. On note G_X la fonction génératrice de X.
   (a) Montrer que pour $t \in [1,+\infty[$ et $a>0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{G}_X(t)}{t^a}.$$

   (b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.$$

   Cette inégalité est-elle meilleure que celle obtenue en 2d ?

Exercice 27 (CCP PSI 2015 BEOS)**.** Soit a un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{a}{n(n+1)}$.

1. Déterminer a.
2. X admet-elle une espérance finie, une variance ?
3. Expliciter la fonction génératrice de X.

Exercice 28. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Soit $(x,y) \in [-1,1]^2$. Montrer que la famille $\big(x^n y^k \mathbb{P}(X=n, Y=k)\big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On note $\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y)$ sa somme.
2. Soit $(x,y) \in [-1,1]^2$. Montrer que $\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{E}\big(x^X y^Y\big)$.
3. Comment, connaissant $\mathrm{G}_{(X,Y)}$, peut-on déterminer G_X (la fonction génératrice de X) ?
4. Montrer que si X et Y sont indépendants, alors pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$, $\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y) = \mathrm{G}_X(x) \times \mathrm{G}_Y(y)$.
5. Justifier que $G : x \in [-1,1] \mapsto \frac{\ln(1-px)}{\ln(1-p)}$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
6. Soit $p \in]0,1[$, Z une variable aléatoire indépendante de X et de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = X+Z$. Calculer, pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$, $\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y)$.

Exercice 29. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Exprimer G_{X+1} et G_{2X} en fonction de G_X.

Solutions

Exercice 1. 1) $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ car soit X renvoie 0, soit il renvoie un nombre de tirages.
Puis, si l'on tire que des boules noires (ce qui est possible, vu l'expérience que l'on veut modéliser), on aura $X = 0$ qui sera réalisé, donc $0 \in X(\Omega)$. Et pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on tire successivement $n-1$ boules noires, puis une boule blanche (là encore c'est possible), on aura $X = n$ de réalisé, donc $n \in X(\Omega)$. Par conséquent, $\mathbb{N} \subset X(\Omega)$. Puis, par double inclusion,

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}.$$

$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, que $m = 1$ ou $m = 2$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons B_n l'évènement « obtenir une boule blanche au n-ième tirage ». Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on a

$$(X = n) = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n,$$

et par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = n) = \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1})}_{=\frac{1}{2}} \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{n-2}}}(\overline{B_{n-1}}) \times P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{n-1}}}(B_n)$$

Ensuite, le calcul des probabilités conditionnelles dépend du protocole.
★ Cas $m = 1$: on ne remet qu'une boule noire en plus à chaque tirage d'une boule noire. Alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_k}}(\overline{B_{k+1}}) = \frac{k+1}{k+2}$$

car on sait qu'on n'a pas encore eu la boule blanche (donc le jeu continue et il y a un tirage numéro $k+1$), et comme avant on a eu k boules noires, on en a remis k dedans.
Par conséquent, pour $n \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n-2} \frac{k+1}{k+2}\right)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{(n-2)+2}\frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

en reconnaissant un produit télescopique, et

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2\cdot 3}$$

(donc la même formule reste valable pour $n = 2$, et aussi pour $n = 1$, puisque $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$).

Remarque. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$, donc en particulier on retrouve $n \in X(\Omega)$.

Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on peut calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ par la formule

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n),$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 0$$

(par somme télescopique). On a donc la loi complète de X, en disant :

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}, \qquad \boxed{\mathbb{P}(X = 0) = 0}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}}$$

★ Cas $m = 2$: on remet deux boules noires en plus à chaque tirage d'une boule noire. Alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_k}}(\overline{B_{k+1}}) = \frac{2k+1}{2k+2}$$

car on sait qu'on n'a pas encore eu la boule blanche (donc le jeu continue et il y a un tirage numéro $k+1$), et comme avant on a eu k boules noires, on en a remis $2k$ dedans.
Par conséquent, pour $n \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n-2} \frac{2k+1}{2k+2}\right)\left(1-\frac{2n-1}{2n}\right)$$

et

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

Remarque. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) \neq 0$, donc en particulier on retrouve $n \in X(\Omega)$.

Pour simplifier, c'est classique : on multiplie au numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs qu'il manque pour avoir une factorielle, puis on regroupe au dénominateur les 2 : pour $n \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3(2n-2)(2n-4)\dots 2}{2n(2n-2)\dots 2(2n-2)(2n-4)\dots 2} = \frac{1}{2n}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}$$

Remarque. On remarque que cette formule reste valable pour $n=2$ et $n=1$.

Pour simplifier les calculs à venir, on peut remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\frac{(2n-1)(2n)}{(2n-1)2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{2n-1}.$$

On a toujours $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, mais calculer $\mathbb{P}(X=0)$ par la formule

$$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)$$

parait plus difficile... Or, par définition,

$$(X=0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B_k},$$

donc par continuité décroissante de P,

$$\mathbb{P}(X=0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Or, par la formule de Stirling, on a $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, donc

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{4\pi n}\frac{e^{2n}}{2^{2n}n^{2n}2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\mathbb{P}(X=0) = 0.$$

On a donc la loi complète de X, en disant :

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}, \qquad \boxed{\mathbb{P}(X=0)=0}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \boxed{\mathbb{P}(X=n) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}}$$

Remarque. On peut vérifier (en connaissant bien ses DSE...) que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)z^n = 1-\sqrt{1-z}$, valable pour tout $z \in]-1,1[$.

2) Regardons pour l'espérance finie et la variance.
★ Cas $m=1$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{n+1}$$

est le terme d'une série numérique divergente, donc la famille $\big(n\mathbb{P}(X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable. Donc X n'a pas d'espérance finie, encore moins de variance.
★ Cas $m=2$: Avec la formule de Stirling, on a vue

$$\mathbb{P}(X=n)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{2n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{2n}.$$

Donc

$$n\mathbb{P}(X=n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}},$$

or la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge (série de Riemann avec $\frac{1}{2}\leqslant 1$) et est à termes positifs (et $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}>0$), donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ diverge, donc la famille $\big(n\mathbb{P}(X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable. Donc X n'a pas d'espérance finie, encore moins de variance.

Exercice 2. 1) Calculons la probabilité r qu'un groupe soit positif. Le nombre U de personnes malades dans un groupe donné suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, car on a n personnes dans un groupe, chacune a la **même probabilité** p d'être malade, et ce **indépendamment les uns des autres** (la maladie étant non contagieuse). Donc

$$r=\mathbb{P}(U\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(U=0)=1-(1-p)^n.$$

Comme chaque groupe a la même probabilité $r=1-(1-p)^n$ d'être positif, et que l'on suppose que chaque personne est malade indépendamment les uns des autres, donc que chaque groupe est positif indépendamment les uns des autres, X suit une loi

$$\boxed{\mathcal{B}(g,r)}.$$

2) On a

$$Y=g+nX,$$

et donc par linéarité de l'espérance finie, comme X et la constante g ont une espérance finie, on obtient que Y a aussi une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(Y)=g+n\mathbb{E}(X)=g+ngr=g+ng\big(1-(1-p)^n\big)=\boxed{N\left(\frac{1}{n}+1-(1-p)^n\right)}.$$

On sait que X a une variance, donc par le cours, Y aussi, et

$$\mathbb{V}(Y)=n^2\mathbb{V}(X)=n^2g\big(1-(1-p)^n\big)(1-p)^n=\boxed{Nn\big(1-(1-p)^n\big)(1-p)^n}.$$

3) Avec la méthode II, on fait donc en moyenne

$$N\left(\frac{1}{n}+1-(1-p)^n\right)\approx 196$$

analyses (avec un écart-type d'environ $\sqrt{Nn\big(1-(1-p)^n\big)(1-p)^n}\approx 29$).
Avec la méthode I, on en fait 1000...

Remarque.

1. Ce procédé, nommé « parcours d'arborescence », était déjà mis en œuvre par l'armée américaine lors de la Seconde Guerre mondiale afin de détecter les malades (IST en l'occurrence) parmi les troupes - chaque analyse coûtait quelques dollars. La méthode utilisée a été la suivante : on teste d'abord un mélange du sang de tous les soldats. Quand le résultat est positif (il y a un malade dans les rangs), on divise les effectifs en deux groupes sur le sang desquels on réitère l'opération, et encore avec le groupe où le test est positif, et ainsi de suite jusqu'à isoler les soldats malades. (Réf. Dossier Pour la Science, n°66, janvier-mars 2010, p.36).
2. L'espérance de gain du laboratoire, qui, de toutes façons, fait payer 1000 tests, est maximum. Le nombre moyen de tests gagnés est $1000-196=804$, soit un gain moyen de près de 80%.
   Un tel procédé a été interdit par la loi : quiconque demande un test à un laboratoire a droit à un test, et pas à 20% d'un test !

3. Une étude de la fonction $x \mapsto N\left(\frac{1}{x} + 1 - (1-p)^x\right)$ (pour les valeurs de N et p considérées) montre que $n = 10$ ou $n = 11$ donne la valeur de $\mathbb{E}(X)$ la plus basse.

Exercice 3. 1a) Soit $i \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. La variable aléatoire X_i ne peut prendre que deux valeurs, 0 ou 1, donc la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli. Puis, la pièce est équilibrée, la probabilité d'avoir Pile est $\frac{1}{2}$, donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)},$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{4}}.$$

X_i ne concerne que le tirage i, X_{i+1} que le tirage $i+1$, et les tirages sont indépendants, donc X_i et X_{i+1} sont indépendants, et donc

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = 0}.$$

1b) Soit $i \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. La variable aléatoire Y_i ne peut prendre que deux valeurs, 0 ou 1, donc la variable aléatoire Y_i suit une loi de Bernoulli. Puis,

$$(Y_i = 1) = (X_{i-1} = 1) \cap (X_i = 1),$$

donc par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_{i-1} = 1)\mathbb{P}(X_i = 1),$$

et comme la pièce est équilibrée, la probabilité d'avoir Pile est $\frac{1}{2}$, d'où

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\boxed{Y_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)},$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_i) = \frac{1}{4}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}(Y_i) = \frac{3}{16}}.$$

Y_iY_{i+1} ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeurs (car le produit de 0 ou 1 par 0 ou 1 donnera 0 ou 1), donc la variable aléatoire Y_iY_{i+1} suit une loi de Bernoulli. Puis,

$$(Y_iY_{i+1} = 1) = (Y_i = 1)\cap(Y_{i+1} = 1) = \big((X_{i-1} = 1)\cap(X_i = 1)\big)\cap\big((X_i = 1)\cap(X_{i+1} = 1)\big) = (X_{i-1} = 1)\cap(X_i = 1)\cap(X_{i+1}$$

et comme les variables aléatoires (X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) sont indépendants (puisque les lancers le sont), on a

$$\mathbb{P}(Y_iY_{i+1} = 1) = \frac{1}{8}.$$

Donc $Y_iY_{i+1} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{8}\right)$, et $\mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) = \frac{1}{8}$. Alors,

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{16}}.$$

Remarque.

1. Ce serait bien de justifier que la covariance existe avant d'en faire le calcul ! C'est le cas ici car Y_i et Y_{i+1} ont une variance. On peut aussi dire que c'est le cas car $Y_i(\Omega)$ et $Y_{i+1}(\Omega)$ sont finis.
2. Pour le calcul, on peut aussi utiliser que $Y_i = X_{i-1}X_i$, et donc $Y_{i+1} = X_iX_{i+1}$, pour avoir

$$\mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) = \mathbb{E}(X_{i-1}X_i^2X_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_{i+1})$$

car (X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) sont indépendants, donc $(X_{i-1}, X_i^2, X_{i+1})$ aussi (lemme des coalitions).
Puis, $\mathbb{E}(X_{i-1}) = \mathbb{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}$, et

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

par la formule de Huygens (sinon, on peut utiliser le théorème de transfert : $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, donc

$$\mathbb{E}(X_i^2) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(X_i = 0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

ou encore remarquer que $X_i^2 = X_i$ (car $0^2 + 0$ et $1^2 = 1$)), et on retrouve $\mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) = \frac{1}{8}$, puis

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{16}}.$$

Remarquons par contre (cela servira) que pour $j \in \mathbb{N}$ avec $j \geqslant i + 2$, les variables aléatoires Y_i et Y_j sont indépendantes (car Y_i concerne les tirages $i - 1$ et i, alors que Y_j concerne les tirages $j - 1$ et j, et il n'y en a pas de commun, puisque $j - 1 \geqslant i + 1$), et donc

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$$

si $j \geqslant i + 2$.
Par linéarité de l'espérance, **comme les Y_i ont une espérance finie**, on a S_n qui a une espérance finie et

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{4} = \boxed{\frac{n-1}{4}}.$$

Comme les Y_i ont une variance, il en est de même de S_n (par addition), et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n) &= \sum_{i=2}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{3}{16} + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \tfrac{3(n-1)}{16} + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \left(\underbrace{\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})}_{=\frac{1}{16}} + \sum_{j=i+2}^{n} \underbrace{\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)}_{=0} \right) \\
&= \tfrac{3(n-1)}{16} + 2 \tfrac{n-2}{16} = \boxed{\frac{5n-7}{16}}
\end{aligned}$$

2) Quatre cas sont possibles :

- On a $X_i = X_{i-1} = 1$, alors $Y_i = 1$ et $X_i + X_{i-1} - 2Y_i = 0$, puis $Z_i = 0$.
- On a $X_i = 1$ et $X_{i-1} = 0$, alors $Y_i = 0$ et $X_i + X_{i-1} - 2Y_i = 1$, puis $Z_i = 1$.
- On a $X_i = 0$ et $X_{i-1} = 1$, alors $Y_i = 0$ et $X_i + X_{i-1} - 2Y_i = 1$, puis $Z_i = 1$.
- On a $X_i = X_{i-1} = 0$, alors $Y_i = 0$ et $X_i + X_{i-1} - 2Y_i = 0$, puis $Z_i = 0$.

Dans tous les cas, on a bien $Z_i = X_i + X_{i-1} - 2Y_i$, ce qui justifie l'égalité de ces variables aléatoires.

Remarque. Comme $X_i^2 = X_i$, $X_{i-1}^2 = X_{i-1}$ et $Y_i = X_i X_{i-1}$, on a $Z_i = (X_i - X_{i-1})^2$. Mais cette écriture ne sert pas spécialement ici.

- Pour le calcul de $\mathbb{E}(Z_i)$ et $\mathbb{V}(Z_i)$:

Méthode 1 : Z_i ne peut prendre que deux valeurs, 0 ou 1, donc Z_i suit une loi de Bernoulli. Puis,

$$(Z_i = 1) = \big((X_{i-1} = 0) \cap (X_i = 1)\big) \cup \big((X_{i-1} = 1) \cap (X_i = 0)\big),$$

et comme l'union est disjointe (X_i ne peut pas valoir 0 et 1 en même temps), on a alors

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}\big((X_{i-1} = 0) \cap (X_i = 1)\big) + \mathbb{P}\big((X_{i-1} = 1) \cap (X_i = 0)\big).$$

Comme les lancers sont indépendants, on a alors

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(X_{i-1} = 0)\mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}(X_{i-1} = 1)\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

Donc $Z_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_i) = \frac{1}{2}}$$

(que l'on aurait pu retrouver à partir de l'égalité $Z_i = X_i + X_{i-1} - 2Y_i$ et la linéarité de l'espérance), puis

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_i) = \frac{1}{4}}.$$

Méthode 2 : on n'est pas obligé de passer par ce calcul : $Z_i(\Omega) \subset \{0, 1\}$, donc Z_i suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est $\mathbb{P}(Z_i = 1)$, mais c'est aussi $\mathbb{E}(Z_i)$. Or, X_i, X_{i-1} et Y_i ont une espérance finie, donc par linéarité de l'espérance (on retrouve que Z_i en a une aussi et)

$$\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(X_i) + \mathbb{E}(X_{i-1}) - 2\mathbb{E}(Y_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

et donc $Z_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Donc

$$\mathbb{V}(Z_i) = \frac{1}{4}.$$

Méthode 3 : on a $Z_i = X_i + X_{i-1} - 2Y_i$, donc par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(X_i) + \mathbb{E}(X_{i-1}) - 2\mathbb{E}(Y_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Comme $Z_i(\Omega) \subset \{0, 1\}$ et que $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, on a $Z_i^2 = Z_i$, donc la formule de Huygens donne

$$\mathbb{V}(Z_i) = \mathbb{E}(Z_i^2) - \mathbb{E}(Z_i)^2 = \mathbb{E}(Z_i) - \mathbb{E}(Z_i)^2 = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Méthode 4 : Pour le calcul de $\mathbb{V}(Z_i)$ (une fois que l'on a remarqué que $\mathbb{E}(Z_i) = \frac{1}{2}$), on peut utiliser :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_i) &= \mathbb{V}(X_i + X_{i-1} - 2Y_i) = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{V}(X_{i-1}) + \mathbb{V}\big(-2Y_i\big) + 2\underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})}_{=0} + 2\mathrm{Cov}(X_i, -2Y_i) + 2\mathrm{Cov}(X_{i-1}, -2 \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + (-2)^2\mathbb{V}(Y_i) - 4\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) - 4\mathrm{Cov}(X_{i-1}, Y_i)
\end{aligned}$$

Puis,

$$\mathrm{Cov}(X_{i-1}, Y_i) = \mathbb{E}\big(\underbrace{X_{i-1}Y_i}_{=X_{i-1}^2X_i}\big) - \mathbb{E}(X_{i-1})\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}\big(X_{i-1}^2X_i\big) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \mathbb{E}(X_{i-1}^2)\mathbb{E}(X_i) - \frac{1}{8}$$

car les variables X_i et X_{i-1} sont indépendantes (donc X_{i-1}^2 et X_i aussi). Et donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathrm{Cov}(X_{i-1}, Y_i) = \big(\mathbb{V}(X_{i-1}) + \mathbb{E}(X_{i-1})^2\big)\mathbb{E}(X_i) - \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

De même,

$$\mathrm{Cov}(Y_i, X_i) = \frac{1}{8}.$$

Donc, en reportant,

$$\mathbb{V}(Z_i) = \frac{1}{2} + 4\frac{3}{16} - 4\frac{1}{8} - 4\frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

- Pour le calcul de $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_{i+1})$:

Méthode 1 : Par bilinéarité,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Z_i,Z_{i+1}) &= \mathrm{Cov}\big(X_i+X_{i-1}-2Y_i, X_{i+1}+X_i-2Y_{i+1}\big)\\
&= \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i,X_{i+1})}_{=0}+\underbrace{\mathrm{Cov}(X_i,X_i)}_{=\mathbb{V}(X_i)=\frac14}-2\underbrace{\mathrm{Cov}(X_i,Y_{i+1})}_{=\frac18}+\underbrace{\mathrm{Cov}(X_{i-1},X_{i+1})}_{=0}+\underbrace{\mathrm{Cov}(X_{i-1},X_i)}_{=0}-2\underbrace{\mathrm{Cov}(X_{i-1},Y_{i+1})}_{=0}\\
&\quad -2\underbrace{\mathrm{Cov}(Y_i,X_{i+1})}_{=0}-2\underbrace{\mathrm{Cov}(Y_i,X_i)}_{=\frac18}+4\underbrace{\mathrm{Cov}(Y_i,Y_{i+1})}_{=\frac{1}{16}}
\end{aligned}$$

où les 0 proviennent de ce que l'on prend la covariance de deux variables aléatoires indépendantes (car elles concernent des tirages différents).
Donc

$$\mathrm{Cov}(Z_i,Z_{i+1})=\frac14-\frac14-\frac14+\frac14=\boxed{0}.$$

Méthode 2 : ce n'est pas surprenant, car on peut montrer que Z_i et Z_{i+1} sont indépendants.
Par exemple,

$$(Z_i=0)\cap(Z_{i+1}=1)=\big((X_{i-1}=0)\cap(X_i=0)\cap(X_{i+1}=1)\big)\cup\big((X_{i-1}=1)\cap(X_i=1)\cap(X_{i+1}=0)\big)$$

est de probabilité

$$\frac14=\mathbb{P}(Z_i=0)\mathbb{P}(Z_{i+1}=1),$$

et on fait de même pour les trois autres probabilités (on peut sinon faire comme dans la remarque qui suit). On en déduit bien alors $\mathrm{Cov}(Z_i,Z_{i+1})=0$.
Méthode 3 : on passe par la loi du couple (Z_i,Z_{i+1}), puis le théorème de transfert :

$$(Z_i=1)\cap(Z_{i+1}=1)=\big((X_{i-1}=0)\cap(X_i=1)\cap(X_{i+1}=0)\big)\cup\big((X_{i-1}=1)\cap(X_i=0)\cap(X_{i+1}=1)\big)$$

est de probabilité $\frac14$ (on a une union de deux évènements incompatibles, et chacun de ces deux évènements est une intersection de trois évènements indépendants).
On a alors la loi de (Z_i,Z_{i+1}) qui s'écrit (comme $Z_i(\Omega)\subset\{0,1\}$ et $Z_{i+1}(\Omega)\subset\{0,1\}$) :

$Z_i\backslash Z_{i+1}$	0	1
0	a	b
1	c	$\frac14$

Remarque. Sans plus de calcul, on peut déterminer a, b et c, car on a la loi de Z_i et Z_{i+1} : on a

$$\frac12=\mathbb{P}(Z_i=1)=c+\frac14,\qquad\text{donc}\qquad c=\frac14.$$

Puis,

$$\frac12=\mathbb{P}(Z_{i+1}=1)=b+\frac14,\qquad\text{donc}\qquad b=\frac14.$$

Et enfin,

$$\frac12=\mathbb{P}(Z_i=0)=a+b$$

(ou bien $\frac12=\mathbb{P}(Z_{i+1}=0)=a+c$), et donc

$$a=\frac14,$$

mais on ne s'en servira pas dans cette méthode (remarquons aussi que de là, l'indépendance est directe).

Le théorème de transfert (qui s'applique car $Z_i(\Omega)$ et $Z_{i+1}(\Omega)$ sont finis) donne :

$$\mathbb{E}(Z_iZ_{i+1})=0\times0\times a+0\times1\times b+1\times0\times c+1\times1\times\frac14=\frac14$$

puis

$$\mathrm{Cov}(Z_i,Z_{i+1})=\mathbb{E}(Z_iZ_{i+1})-\mathbb{E}(Z_i)\mathbb{E}(Z_{i+1})=\frac14-\frac12\times\frac12=0.$$

• Enfin, pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $j \geqslant i+2$, alors les variables aléatoires Z_i et Z_j sont indépendantes, car ne concernent pas les mêmes tirages, donc $\text{Cov}(Z_i, Z_j) = 0$.
• Pour finir, par linéarité de l'espérance, puisque les Z_i ont une espérance finie, T_n a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(Z_i) = \boxed{\frac{n-1}{2}}.$$

Et, comme les Z_i ont une variance, T_n a une variance, et

$$\mathbb{V}(T_n) = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{V}(Z_i) + 2 \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} \underbrace{\text{Cov}(Z_i, Z_j)}_{=0} = \boxed{\frac{n-1}{4}}.$$

Exercice 4. 1) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, donc $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, en particulier $X \geqslant 0$, donc Y est bien définie.
X est à image finie, donc Y aussi, donc Y a une espérance finie, et on peut utiliser le théorème de transfert : **comme** $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ (c'est important de le savoir, cela donne sur quoi on somme !),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&\underset{j=k+1}{=} \tfrac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{j-1} (1-p)^{n+1-j} \\
&\underset{\text{binôme de Newton}}{=} \tfrac{1}{p(n+1)} \left(\big(p + (1-p)\big)^{n+1} - (1-p)^{n+1} \right) \\
&= \boxed{\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}}
\end{aligned}$$

2) X est à image finie, donc Z aussi, donc Z a une espérance finie, et on peut utiliser le théorème de transfert : comme $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{n} A^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} A^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (Ap)^k (1-p)^{n-k} = \boxed{(Ap+1-p)^n}$$

(toujours par le binôme de Newton).

Exercice 5. Remarquons déjà que $\big(n, pq^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définit bien la loi d'une variable aléatoire (grâce à un théorème du cours, car $\mathbb{N}$ est dénombrable, $pq^n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par somme géométrique, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} pq^n$ converge de somme $\frac{p}{1-q} = 1$ puisque $q \in]-1,1[$).
Puis, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ étant dénombrable, le théorème de transfert (appliqué avec la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R},$$

bien défini sur $X(\Omega)$) donne que $X^2 = f(X)$ a une espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(n)\mathbb{P}(X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 pq^n$$

converge absolument.

Remarque. Comme c'est une série à termes positifs, converge suffit.

Enfin, $\frac{n^2pq^n}{\frac{1}{n^2}} = n^4pq^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, puisque $q \in]-1,1[$. Donc

$$n^2pq^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente (Riemann avec $2>1$) et à termes positifs. Le critère de domination des séries à termes positifs permet alors de conclure que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2pq^n$ converge absolument.

Remarque. On peut aussi montrer ceci à partir du critère de D'Alembert : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^2pq^n \neq 0$, et

$$\left|\frac{(n+1)^2pq^{n+1}}{n^2pq^n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 |q| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |q| < 1,$$

donc la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2pq^n$ converge absolument.
Enfin, un élève a eu l'idée de faire ainsi :

$$n^2pq^n \underset{n\to+\infty}{\sim} pq^2n(n-1)q^{n-2},$$

or la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge absolument (en tant que série géométrique dérivée deux fois, de raison q avec $q \in]-1,1[$), donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on a bien que série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2pq^n$ converge absolument.

Donc X^2 a une espérance finie, et (comme $1-q=p$),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2pq^n \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\big((n-1)+1\big)pq^n \\
&= 0+0+pq^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} + pq\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} \\
&= pq^2\tfrac{2}{(1-q)^3} + pq\tfrac{1}{(1-q)^2} \\
&= pq^2\tfrac{2}{p^3} + pq\tfrac{1}{p^2} \\
&= \tfrac{2q^2+pq}{p^2} \\
&= \tfrac{q(2q+p)}{p^2} = \boxed{\frac{(1-p)(2-p)}{p^2}}
\end{aligned}$$

car $q \in]-1,1[$, et car la série géométrique est une série entière de rayon 1, donc sa somme est dérivable terme à terme sur $]-1,1[$ (donc, en dérivant une, puis deux fois la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

pour $x \in]-1,1[$).

Exercice 6. Tout d'abord, S est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$ et cos est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, donc $\cos(S)$ est une variable aléatoire discrète. Puis,

$$\big|\cos(S)\big| \leqslant 1,$$

et la variable aléatoire constante 1 a une espérance finie, donc $\cos(S)$ aussi. De même pour $\cos(T)$ et $\cos(S+T)$, puis pour $\sin(S)$ et $\sin(T)$, puis pour $\cos(S)\cos(T)$ et $\sin(S)\sin(T)$.
Puis,

$$\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T).$$

Alors, par linéarité de l'espérance finie,

$$\mathbb{E}\big(\cos(S+T)\big) = \mathbb{E}\big(\cos(S)\cos(T)\big) - \mathbb{E}\big(\sin(S)\sin(T)\big).$$

Puis, S et T sont indépendantes, donc toute fonction de S est indépendante avec toute fonction de T. Donc $\cos(S)$ et $\cos(T)$ sont indépendantes, et comme de plus ces deux variables ont une espérance, on a alors

$$\mathbb{E}\big(\cos(S)\cos(T)\big) = \mathbb{E}\big(\cos(S)\big)\mathbb{E}\big(\cos(T)\big).$$

De même,

$$\mathbb{E}\big(\sin(S)\sin(T)\big) = \mathbb{E}\big(\sin(S)\big)\mathbb{E}\big(\sin(T)\big).$$

Enfin, T et $-T$ ont même loi, donc $\sin(T)$ et $\sin(-T)$ aussi. Or, la fonction sin est impaire, donc $\sin(-T) = -\sin(T)$. Donc $\sin(T)$ et $-\sin(T)$ ont même loi, donc même espérance, donc par linéarité de l'espérance finie,

$$\mathbb{E}\big(\sin(T)\big) = \mathbb{E}\big(-\sin(T)\big) = -\mathbb{E}\big(\sin(T)\big).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\big(\sin(T)\big) = 0.$$

En mettant tout bout à bout, on a bien

$$\mathbb{E}\big(\cos(S+T)\big) = \mathbb{E}\big(\cos(S)\big)\mathbb{E}\big(\cos(T)\big).$$

Exercice 7. 1) $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, et pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{1}{2^{i+1}j!} \geqslant 0$. Le théorème de Fubini (version famille dans $[0,+\infty]$) donne alors

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+1}j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1^j}{j!} = e^1,$$

en reconnaissant une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (donc convergente car $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), puis une série exponentielle (donc convergente). Par conséquent,

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \alpha e.$$

Or, comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, la famille $\left(\frac{\alpha}{2^{i+1}j!}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une distribution de probabilité si et seulement si

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X=i,Y=j) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \frac{\alpha}{2^{i+1}j!} \geqslant 0,\ \text{soit}\ \ \alpha \geqslant 0.$$

Donc

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{e} = e^{-1}}$$

convient (la somme fait alors bien 1, et $\alpha \geqslant 0$).
2) • On a, par définition, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ est bien sûr au plus dénombrable.
• En particulier, $\big((X=i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales donne alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{i+1}j!} = \frac{\alpha}{j!2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{\alpha}{j!2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{j!},$$

en reconnaissant une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (donc convergente car $\frac{1}{2} \in]-1,1[$). Donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=j) = \frac{e^{-1}}{j!}}.$$

Remarque. On a alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = j) > 0$, donc $(Y = j) \neq \varnothing$, donc $j \in Y(\Omega)$. Donc $\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$, puis $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$.

• De même, $\big((Y = j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales donne alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2^{i+1} j!} = \frac{\alpha}{2^{i+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1^j}{j!} = \frac{\alpha}{2^{i+1}} e^1,$$

en reconnaissant une série exponentielle. Puis, $\alpha e^1 = 1$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}}.$$

Remarque. On a alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = i) > 0$, donc $(X = i) \neq \varnothing$, donc $i \in X(\Omega)$. Donc $\mathbb{N} \subset X(\Omega)$, puis $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$.

3a) • Pour les 3/2 : On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (on a même l'égalité, mais on n'en a pas besoin), $\mathbb{N}$ est (au plus) dénombrable, la famille $\big(n\mathbb{P}(X = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, et est sommable car on reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ (donc on sait que cette série converge absolument). Donc X a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{2^{n+1}} = 0 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{1}.$$

On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ est (au plus) dénombrable, la famille $\big(n(n-1)\mathbb{P}(X = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, et est sommable car on reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée deux fois de raison $\frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ (donc on sait que cette série converge absolument). Donc le théorème de transfert s'applique, et donne que $X(X-1)$ a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\frac{1}{2^{n+1}} = 0 + 0 + \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 2.$$

Puis,

$$X^2 = X(X-1) + X,$$

or X et $X(X-1)$ ont une espérance finie, donc par linéarité de l'espérance finie, X^2 aussi, donc X a une variance, et

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = 2 + 1 = 3.$$

La formule de Huygens donne alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3 - 1^2 = \boxed{2}.$$

• Pour les 5/2 : On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc en notant $Z = 1 + X$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n - 1 \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(1 + X = n) = \mathbb{P}(X = n - 1) = \frac{1}{2^{(n-1)+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Par conséquent, Z a une espérance finie et une variance, et

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \qquad \mathbb{V}(Z) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Puis, $X = Z - 1$, donc par linéarité de l'espérance finie, X a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) - 1 = 2 - 1 = \boxed{1},$$

et X a une variance, qui vaut

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \boxed{2}.$$

3b) • Pour les 3/2 : On a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ est (au plus) dénombrable, la famille $\big(n\mathbb{P}(Y = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n\mathbb{P}(Y = n) = \frac{n}{n!}e^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{(n-1)!}e^{-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases},$$

donc la famille $\big(n\mathbb{P}(Y = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable car on reconnaît le terme général d'une série exponentielle (donc on sait que cette série converge absolument), à un décalage d'indice près. Donc Y a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(Y = n) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}e^{-1} \underset{k=n-1}{=} e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k!} = e^{-1}e^1 = \boxed{1}.$$

On a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ est (au plus) dénombrable, la famille $\big(n(n-1)\mathbb{P}(X = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n(n-1)\mathbb{P}(Y = n) = \frac{n(n-1)}{n!}e^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ \frac{1}{(n-2)!}e^{-1} & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant 2 \end{cases},$$

donc la famille $\big(n(n-1)\mathbb{P}(Y = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable car on reconnaît le terme général d'une série exponentielle (donc on sait que cette série converge absolument), à un décalage d'indice près. Donc le théorème de transfert s'applique, et donne que $Y(Y-1)$ a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(Y = n) = 0 + 0 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}e^{-1} \underset{k=n-2}{=} e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k!} = e^{-1}e^1 = 1.$$

Puis,

$$Y^2 = Y(Y-1) + Y,$$

or Y et $Y(Y-1)$ ont une espérance finie, donc par linéarité de l'espérance finie, Y^2 aussi, donc Y a une variance, et

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) + \mathbb{E}(Y) = 1 + 1 = 2.$$

La formule de Huygens donne alors

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2 - 1^2 = \boxed{1}.$$

• Pour les 5/2 : On reconnaît que Y suit une loi de Poisson de paramètre 1 :

$$Y \sim \mathcal{P}(1),$$

donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y) = 1}$$

4) On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Y = j) = \frac{e^{-1}}{j!},$$

donc

$$\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}}\frac{e^{-1}}{j!} = \mathbb{P}(X = i, Y = j).$$

Donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

5) On a $\big((X = i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ qui est un système complet d'évènements (car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), donc la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = i, X = Y) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = i) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}\frac{e^{-1}}{i!} = \frac{e^{-1}}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i!} = \frac{e^{-1}}{2}e^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{e}}}.$$

Exercice 8. • $L_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, $L_2(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{N}^*$ est (au plus) dénombrable, donc $(\mathbb{N}^*)^2$ aussi. Donc le théorème de transfert donne que L_1L_2 a une espérance finie si et seulement si la famille

$$\big(nk\mathbb{P}(L_1 = n, L_2 = k)\big)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} = \big(nkp^kq^{n+1} + nkq^kp^{n+1}\big)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

est sommable, et dans ce cas $\mathbb{E}(L_1L_2)$ vaut la somme de cette famille :

$$\mathbb{E}(L_1L_2) = \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} \big(nk\mathbb{P}(L_1 = n, L_2 = k)\big).$$

• La famille $\big(kp^k\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, car la série numérique

$$\sum_{k\geqslant 1} kp^k = p\sum_{k\geqslant 1} kp^{k-1}$$

est une série géométrique dérivée de raison p, donc absolument convergente car $p \in]0,1[\subset]-1,1[$. De plus, sa somme vaut alors

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kp^k = p\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{q^2}.$$

• La famille $\big(nq^{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, car la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1} nq^{n+1} = q^2\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$$

est une série géométrique dérivée de raison q, donc absolument convergente car $q \in]0,1[\subset]-1,1[$. De plus, sa somme vaut alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nq^{n+1} = q^2\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q^2}{p^2}.$$

• Par produit, on en déduit que la famille $\big(knp^kq^{n+1}\big)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, et sa somme vaut

$$\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} knp^kq^{n+1} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kp^k\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nq^{n+1}\right) = \frac{p}{q^2}\frac{q^2}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

• De même (en échangeant le rôle de p et q), la famille $\big(nkq^kp^{n+1}\big)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, et sa somme vaut

$$\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} knq^kp^{n+1} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kq^k\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n+1}\right) = \frac{q}{p^2}\frac{p^2}{q^2} = \frac{1}{q}.$$

• Par linéarité de la somme finie, on en déduit que la famille

$$\big(nk\mathbb{P}(L_1 = n, L_2 = k)\big)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} = \big(nkp^kq^{n+1} + nkq^kp^{n+1}\big)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

est sommable, donc que L_1L_2 a une espérance finie, et que

$$\mathbb{E}(L_1L_2) = \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} knp^kq^{n+1} + \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} knq^kp^{n+1} = \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{pq}}$$

(car $p + q = 1$).

Exercice 9. 1) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ sont dénombrables.
La famille $\big(p(1-p)^i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable car la série numérique

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} i(1-p)^i$$

converge absolument (on reconnaît une série géométrique de raison $1-p$ avec $1-p \in]0,1[\subset]-1,1[$, multipliée par la constante p). Sa somme vaut alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} p(1-p)^i = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Pour la même raison, la famille $\big(q(1-q)^j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme 1.
Par produit, on en déduit que la famille $\big(pq(1-p)^i(1-q)^j\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, de somme

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} pq(1-p)^i(1-q)^j = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} p(1-p)^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} q(1-q)^j\right) = 1^2 = 1.$$

Enfin, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,

$$pq(1-p)^i(1-q)^j \geqslant 0$$

(car $p\in[0,1]$ et $q\in[0,1]$).
Donc on peut bien définir une probabilité P sur $\big(\mathbb{N}^2,\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)\big)$, en posant, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}\big((i,j)\big) = pq(1-p)^i(1-q)^j.$$

Remarque. Elle est définie de manière unique par : pour tout $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{(i,j)\in A} \mathbb{P}\big((i,j)\big).$$

2a) Par définition, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Puis, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\big(X=i, Y=j\big) = \big\{(i,j)\big\}$, donc

$$\mathbb{P}(X=i,Y=j) = pq(1-p)^i(1-q)^j.$$

Comme $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$, $\big((Y=j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, et donc la formule des probabilités totales donne, pour tout $i\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{j=0}^{\infty} pq(1-p)^i(1-q)^j = p(1-p)^i.$$

De même, pour tout $j\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y=j) = q(1-q)^j.$$

2b) Comme $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$, $\big((Y=j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, et donc la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\big((X=Y)\cap(Y=j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=j,Y=j) = \sum_{j=0}^{\infty} pq\big((1-p)(1-q)\big)^j = \boxed{\frac{pq}{1-(1-p)(1-q)}}.$$

3) Z est une fonction de (X,Y) : en posant

$$f:(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont de parités différentes} \end{cases},$$

on a

$$Z = f(X,Y).$$

De plus, $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$, $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$, donc $(X,Y)(\Omega)\subset\mathbb{N}^2$, et $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Donc, par le théorème de transfert, Z a une espérance finie si et seulement si la famille

$$\big(f(i,j)\mathbb{P}(X=i,Y=j)\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} = \big(f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable. Et dans ce cas, $\mathbb{E}(Z)$ vaudra la somme de cette famille.
Or, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\big|f(i,j)\big|\leqslant 1$, donc

$$\big|f(i,j)\mathbb{P}(X=i,Y=j)\big| \leqslant \mathbb{P}(X=i,Y=j),$$

et la famille $\big(\mathbb{P}(X=i,Y=j)\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (par σ-additivité de P). Donc, par croissance de la somme (dans le cas des familles à termes dans $[0,+\infty]$), la famille $\big(f(i,j)\mathbb{P}(X=i,Y=j)\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, donc Z a une espérance finie.

Remarque. On a aussi, plus simplement, $|Z| \leqslant 1$ et 1 a une espérance finie, donc par inégalité, Z aussi.

De plus (toujours par le théorème de transfert), on a

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f(i,j)\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j.$$

Comme c'est la somme d'une famille à termes positifs, et que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on peut utiliser le théorème de sommation par paquets (on manipule la somme dans $[0,+\infty]$), avec la partition

$$\mathbb{N}^2 = \big[(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N})\big] \sqcup \big[(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N}+1)\big] \sqcup \big[(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N})\big] \sqcup \big[(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N}+1)\big],$$

puis le théorème de Fubini. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) \underset{\substack{\text{sommation}\\\text{par}\\\text{paquets}}}{=} & \textstyle\sum_{(i,j)\in(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N})} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j + \sum_{(i,j)\in(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N}+1)} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j \\
& \textstyle + \sum_{(i,j)\in(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N})} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j + \sum_{(i,j)\in(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N}+1)} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j \\
\underset{\text{Fubini}}{=} & \textstyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i \text{ pair}}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j \text{ pair}}} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i \text{ pair}}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j \text{ impair}}} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j \\
& \textstyle + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i \text{ impair}}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j \text{ pair}}} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j \text{ impair}}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j \text{ impair}}} f(i,j)pq(1-p)^i(1-q)^j
\end{aligned}$$

Puis, par définition de f, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \textstyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\,=\,2k}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j\,=\,2\ell}} pq(1-p)^i(1-q)^j + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i \text{ pair}}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j \text{ impair}}} 0 \\
&\quad \textstyle + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i \text{ impair}}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j \text{ pair}}} 0 + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\,=\,2k+1}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j\,=\,2\ell+1}} -pq(1-p)^i(1-q)^j \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty pq(1-p)^{2k}(1-q)^{2\ell} - \sum_{k=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty pq(1-p)^{2k+1}(1-q)^{2\ell+1} \\
&= \textstyle\left(\sum_{k=0}^\infty p(1-p)^{2k}\right)\left(\sum_{\ell=0}^\infty q(1-q)^{2\ell}\right) - \left(\sum_{k=0}^\infty (1-p)p(1-p)^{2k}\right)\left(\sum_{\ell=0}^\infty (1-q)q(1-q)^{2\ell}\right) \\
&= \tfrac{p}{1-(1-p)^2}\tfrac{q}{1-(1-q)^2} - \tfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}\tfrac{q(1-q)}{1-(1-q)^2} \\
&= \tfrac{1}{2-p}\tfrac{1}{2-q} - \tfrac{1-p}{2-p}\tfrac{1-q}{2-q} = \boxed{\dfrac{p+q-pq}{(2-p)(2-q)}}
\end{aligned}$$

car $1-(1-p)^2 = 2p-p^2 = p(2-p)$ et $1-(1-q)^2 = 2q-q^2 = q(2-q)$ (et la troisième égalité provient juste du produit de la somme de deux familles sommables).

4) On a $|Z| \leqslant 1$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\big|Z(i,i)\mathbb{P}\big((i,i)\big)\big| \leqslant \mathbb{P}\big((i,i)\big).$$

Or, les évènements $\big\{(i,i)\big\}$ pour $i\in\mathbb{N}$ sont deux à deux incompatibles, $\mathbb{N}$ est dénombrable, donc par σ-additivité, la série numérique

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big((i,i)\big)$$

converge, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} Z(i,i)\mathbb{P}\big((i,i)\big)$$

converge absolument. Donc la famille $\big(Z(i,i)\mathbb{P}(i,i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Comme $\mathbb{N}$ est dénombrable et $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$, le théorème de sommation par paquets donne alors

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} Z(i,i)\mathbb{P}\big((i,i)\big) &= \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\,=\,2k \text{ pair}}} Z(i,i)\mathbb{P}\big((i,i)\big) + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\,=\,2\ell+1 \text{ impair}}} Z(i,i)\mathbb{P}\big((i,i)\big)\\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big((2k,2k)\big) + \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)\mathbb{P}\big((2\ell+1,2\ell+1)\big)\\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} pq(1-p)^{2k}(1-q)^{2k} - \sum_{\ell=0}^{\infty} pq(1-p)^{2k+1}(1-q)^{2\ell+1}\\
&= \tfrac{pq}{1-(1-p)^2(1-q)^2} - \tfrac{pq(1-p)(1-q)}{1-(1-p)^2(1-q)^2}\\
&= pq\tfrac{1-(1-p)(1-q)}{\big(1-(1-p)(1-q)\big)\big(1+(1-p)(1-q)\big)} = \boxed{\dfrac{pq}{1+(1-p)(1-q)}}
\end{aligned}$$

Exercice 10. On a $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$, donc $U > 0$, donc on peut bien diviser par U.
1) ★ Montrons que Y_1 et Y_2 suivent la même loi.
- Montrons que (X_1, X_2) suit la même loi que (X_2, X_1) : on a

$$X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) = X_2(\Omega) \times X_1(\Omega)$$

car X_1 et X_2 suivent la même loi (donc $X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$), et pour tout $(x,y) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\big((X_1,X_2) = (x,y)\big) = \mathbb{P}\big((X_1 = x) \cap (X_2 = y)\big) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = y) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_1 = y),$$

en utilisant que X_1 et X_2 sont indépendants, puis que X_2 suit la même loi que X_1.
De même,

$$\mathbb{P}\big((X_2,X_1) = (x,y)\big) = \mathbb{P}\big((X_2 = x) \cap (X_1 = y)\big) = \mathbb{P}(X_2 = x)\mathbb{P}(X_1 = y) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_1 = y).$$

On a donc bien, pour tout $(x,y) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\big((X_1,X_2) = (x,y)\big) = \mathbb{P}\big((X_2,X_1) = (x,y)\big).$$

Donc (X_1, X_2) suit la même loi que (X_2, X_1).
- Par conséquent, si on pose

$$f : (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \frac{x}{x+y} \in \mathbb{R},$$

comme on suppose $X_1(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $X_2(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$Y_1 = f(X_1, X_2) \qquad \text{et} \qquad Y_2 = f(X_2, X_1),$$

et donc le cours permet de conclure que Y_1 et Y_2 suivent la même loi (ce sont la même fonction de deux variables aléatoires qui suivent la même loi).
Démonstration plus élémentaire :
- Notons $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\big((X_1 = x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'en est un car X_1 est une variable aléatoire avec $X_1(\Omega) \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 = x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left(\frac{X_1}{U} = x\right) \cap (X_1 = x_n)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left(\frac{x_n}{x_n + X_2} = x\right) \cap (X_1 = x_n)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left(X_2 = \frac{x_n}{x} - x_n\right) \cap (X_1 = x_n)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_2 = \frac{x_n}{x} - x_n\right)\mathbb{P}(X_1 = x_n)
\end{aligned}$$

(la dernière égalité provenant de ce que X_1 et X_2 sont indépendantes).
• La formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\big((X_2 = x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'en est un car X_2 est une variable aléatoire avec $X_2(\Omega) \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_2 = x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left(\frac{X_2}{U} = x\right) \cap (X_2 = x_n)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left(\frac{x_n}{x_n + X_1} = x\right) \cap (X_2 = x_n)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left(X_1 = \frac{x_n}{x} - x_n\right) \cap (X_2 = x_n)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_1 = \frac{x_n}{x} - x_n\right) \mathbb{P}(X_2 = x_n)
\end{aligned}$$

(la dernière égalité provenant de ce que X_1 et X_2 sont indépendantes).
• Comme X_1 et X_2 sont de même loi, on a

$$P\left(X_1 = \frac{x_n}{x} - x_n\right) = P\left(X_2 = \frac{x_n}{x} - x_n\right) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_1 = x_n) = \mathbb{P}(X_2 = x_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit

$$\mathbb{P}(Y_1 = x) = \mathbb{P}(Y_2 = x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or,

$$Y_1(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad Y_2(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$$

(car $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$), de plus Y_1 et Y_2 sont des fonctions de la variable aléatoire (X_1, X_2), qui est discrète car X_1 et X_2 le sont, donc sont discrètes aussi. On en déduit bien que Y_1 et Y_2 suivent la même loi discrète.
★ **Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Y_1^k et Y_2^k a une espérance finie.**
On a $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$, donc $X_1 + X_2 > X_1 > 0$, donc $1 > Y_1 > 0$.
Ainsi, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$0 = 0^k \leqslant Y_1^k \leqslant 1^k = 1, \qquad \text{soit} \qquad \left|Y_1^k\right| \leqslant 1.$$

Or, la variable aléatoire constante 1 a une espérance finie, donc par inégalité, Y_1^k aussi.
Comme Y_2 suit la même loi que Y_1, on a aussi Y_2^k qui a une espérance finie, et ce pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
★ On a

$$Y_1 + Y_2 = 1,$$

donc par linéarité de l'espérance (et car Y_1 et Y_2 ont une espérance finie),

$$\mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) = 1.$$

Comme Y_1 et Y_2 suivent la même loi, on a

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2).$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2) = \frac{1}{2}}.$$

2) ★ Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$Z = \frac{T}{U} = Y_1 - Y_2.$$

Donc,

$$|Z| \leqslant |Y_1| + |Y_2| \leqslant 2,$$

donc pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|Z^k\right| = |Z|^k \leqslant 2^k.$$

Or, la variable aléatoire constante 2^k a une espérance finie, donc par inégalité, Z^k a une espérance finie.
★ Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y_1 - Y_2) = \mathbb{E}(Y_1) - \mathbb{E}(Y_2) = 0$$

(car Y_1 et Y_2 ont une espérance finie).
Puis, $Y_1 + Y_2 = 1$, donc

$$0 = \mathbb{V}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + 2\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$$

(la covariance existe car Y_1 et Y_2 ont une variance, puisqu'elles ont un moment d'ordre 2).
Puis,

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(Y_1 - Y_2) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) - 2\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 2\mathbb{V}(Y_1) + 2\mathbb{V}(Y_2) = \boxed{4\mathbb{V}(Y_1)}$$

(car Y_1 et Y_2 suivent la même loi, donc $\mathbb{V}(Y_1) = \mathbb{V}(Y_2)$).

Exercice 11. On sait donc que la famille $\big(x\mathbb{P}(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Puis, pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\big|x\mathbb{P}(X = x|A)\big| = |x|\frac{\mathbb{P}\big(A \cap (X = x)\big)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant |x|\frac{\mathbb{P}(X = x)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}|x|\mathbb{P}(X = x),$$

car $\big(A \cap (X = x)\big) \subset (X = x)$, ce qui par croissance de la probabilité pour l'inclusion donne

$$\mathbb{P}\big(A \cap (X = x)\big) \leqslant \mathbb{P}(X = x).$$

Or, $\frac{1}{\mathbb{P}(A)}$ est une constante, et la famille $\big(|x|\mathbb{P}(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable puisque la famille $\big(|x|\mathbb{P}(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable (c'est l'hypothèse « X a une espérance finie »).
Alors, par linéarité de la somme finie, la famille $\left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}|x|\mathbb{P}(X = x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Donc, par inégalité, on en déduit que la famille $\big(|x|\mathbb{P}(X = x|A)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, donc que la loi conditionnelle de X sachant A possède une espérance finie.

Exercice 12. **1)** Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas sont possibles :

- soit $U(\omega) > 0$, et alors $B(\omega) = 1$, et donc

$$(UB)(\omega) = U(\omega) \times B(\omega) = U(\omega)$$

  et l'inégalité voulue est même une égalité,
- soit $U(\omega) \leqslant 0$, et alors $B(\omega) = 0$, et donc

$$(UB)(\omega) = U(\omega) \times B(\omega) = 0 \geqslant U(\omega).$$

Donc, pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien

$$(UB)(\omega) \geqslant U(\omega).$$

Donc $UB \geqslant U$.
2) X a une variance, donc une espérance finie, donc (par addition avec une constante), U aussi et

$$\mathbb{E}(U) = \mathrm{e} - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) = \mathrm{e}.$$

X a une variance, donc (par addition avec une constante), U aussi et

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(X).$$

B suit une loi de Bernoulli, donc a une espérance finie et une variance, qui valent

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{P}(U > 0), \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(U) = \mathbb{P}(U > 0)\big(1 - \mathbb{P}(U > 0)\big).$$

U et B ont une variance, donc U^2 et B^2 ont une espérance finie, et la formule de Huygens donne alors

$$\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{V}(U) + \mathbb{E}(U)^2 = \mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2, \qquad \mathbb{E}(B^2) = \mathbb{V}(B) + \mathbb{E}(B)^2 = \mathbb{P}(U > 0).$$

Remarque. Comme $B(\Omega) \subset \{0,1\}$ et que $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, on a $B^2 = B$, et donc

$$\mathbb{E}(B^2) = \mathbb{E}(B) = \mathbb{P}(U > 0)$$

directement.

Comme U^2 et B^2 ont une espérance finie, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique, et donne que UB a une espérance finie, et que

$$\mathbb{E}(UB)^2 \leqslant \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(B^2) = \big(\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2\big)\mathbb{P}(U > 0).$$

Puis, de la définition de U, on a

$$(U > 0) = \big(\mathrm{e} - X + \mathbb{E}(X) > 0\big) = \big(X - \mathbb{E}(X) < \mathrm{e}\big).$$

Donc (comme $\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2 \geqslant \mathrm{e}^2 > 0$, car une variance est positive),

$$\mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) < \mathrm{e}\big) \geqslant \frac{\mathbb{E}(UB)^2}{\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2}.$$

Enfin, de la question 1, on a $UB \geqslant U$, et UB et U ont une espérance finie, donc par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}(UB) \geqslant \mathbb{E}(U) = \mathrm{e} > 0.$$

Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a alors

$$\mathbb{E}(UB)^2 \geqslant \mathrm{e}^2,$$

et donc en reportant,

$$\mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) < \mathrm{e}\big) \geqslant \frac{\mathbb{E}(UB)^2}{\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2} \geqslant \frac{\mathrm{e}^2}{\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2}.$$

En passant au complémentaire, on a

$$\mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \mathrm{e}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) < \mathrm{e}\big) \leqslant 1 - \frac{\mathrm{e}^2}{\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2}.$$

3) On pose $Y = -X$, X a une variance donc Y aussi et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X)$. La question précédente donne alors (en l'appliquant à Y au lieu de X) :

$$\mathbb{P}\big(Y - \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathrm{e}\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{V}(Y) + \mathrm{e}^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2}.$$

Puis,

$$Y - \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad -X - \mathbb{E}(-X) \geqslant \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad -X + \mathbb{E}(X) \geqslant \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\mathrm{e},$$

donc

$$\mathbb{P}\big(Y - \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathrm{e}\big) = \mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\mathrm{e}\big),$$

et en reportant on a l'inégalité voulue.

4) • Comme $\mathrm{e} > 0$, on a

$$\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow X - \mathbb{E}(X) \geqslant \mathrm{e} \qquad \text{ou} \qquad X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\mathrm{e},$$

et donc en passant aux évènements,

$$\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathrm{e}\big) = \big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \mathrm{e}\big) \cup \big(X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\mathrm{e}\big).$$

Par sous-additivité de P, on a alors

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathrm{e}\big) \leqslant \mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \mathrm{e}\big) + \mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\mathrm{e}\big) \leqslant \boxed{\frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \mathrm{e}^2}}.$$

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne (puisque X a une variance) :

$$\mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant \mathrm{e}\big)\leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathrm{e}^2}.$$

- Cherchons le signe de la différence de ces deux majorations :

$$\frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\mathrm{e}^2}-\frac{\mathbb{V}(X)}{\mathrm{e}^2}=\frac{2\mathrm{e}^2\mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(X)^2-\mathrm{e}^2\mathbb{V}(X)}{\mathrm{e}^2\big(\mathbb{V}(X)+\mathrm{e}^2\big)}=\frac{\mathbb{V}(X)}{\mathrm{e}^2\big(\mathbb{V}(X)+\mathrm{e}^2\big)}\big(\mathrm{e}^2-\mathbb{V}(X)\big),$$

cette expression est du signe de $\mathrm{e}^2-\mathbb{V}(X)$ (car une variance est positive), donc la majoration trouvée dans cet exercice est meilleure que celle de Bienaymé-Tchebychev si et seulement si

$$\boxed{\mathbb{V}(X)\geqslant \mathrm{e}^2}$$

(donc dès que e est « assez petit »).

Exercice 13.
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{e}>0$. Remarquons d'abord que $\big(|Y_n-\ell|>\mathrm{e}\big)\subset\big(|Y_n-\ell|\geqslant \mathrm{e}\big)$, donc par croissance de la probabilité,

$$\mathbb{P}\big(|Y_n-\ell|>\mathrm{e}\big)\leqslant\mathbb{P}\big(|Y_n-\ell|\geqslant\mathrm{e}\big).$$

Puis, $|Y_n-\ell|\geqslant\mathrm{e}\Rightarrow(Y_n-\ell)^2\geqslant\mathrm{e}^2$ (car $\mathrm{e}>0$), donc on a l'inclusion d'évènements

$$\big(|Y_n-\ell|\geqslant\mathrm{e}\big)\subset\big((Y_n-\ell)^2\geqslant\mathrm{e}^2\big),$$

donc par croissance de la probabilité,

$$\mathbb{P}\big(|Y_n-\ell|\geqslant\mathrm{e}\big)\leqslant\mathbb{P}\big((Y_n-\ell)^2\geqslant\mathrm{e}^2\big)$$

(en fait, il y a égalité ici).
Puis, comme Y_n a une variance, $Y_n-\ell$ aussi et la formule de Huygens donne

$$\mathbb{E}\big((Y_n-\ell)^2\big)=\mathbb{V}\big(Y_n-\ell\big)+\big(\mathbb{E}(Y_n-\ell)\big)^2=\mathbb{V}(Y_n)+\big(\mathbb{E}(Y_n)-\ell\big)^2,$$

en utilisant la formule $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$ si X a une variance, et la linéarité de l'espérance (et le fait qu'une constante ℓ a pour espérance elle-même). Donc l'inégalité de Markov (qui s'applique car $(Y_n-\ell)^2$ est positive et a une espérance finie, et car $\mathrm{e}^2>0$) donne :

$$0\leqslant\mathbb{P}\big(|Y_n-\ell|>\mathrm{e}\big)\leqslant\mathbb{P}\big((Y_n-\ell)^2\geqslant\mathrm{e}^2\big)\leqslant\frac{\mathbb{E}\big((Y_n-\ell)^2\big)}{\mathrm{e}^2}=\frac{\mathbb{V}(Y_n)+\big(\mathbb{E}(Y_n)-\ell\big)^2}{\mathrm{e}^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

et le théorème des gendarmes conclut.
Autre façon : fixons $\mathrm{e}>0$. Soit $n\in\mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$|Y_n-\ell|=\big|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)+\mathbb{E}(Y_n)-\ell\big|\leqslant\big|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)\big|+\big|\mathbb{E}(Y_n)-\ell\big|,$$

donc

$$\big|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)\big|<\mathrm{e}-\big|\mathbb{E}(Y_n)-\ell\big|\Rightarrow|Y_n-\ell|\leqslant\big|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)\big|+\big|\mathbb{E}(Y_n)-\ell\big|<\mathrm{e},$$

et donc en contraposant,

$$|Y_n-\ell|\geqslant\mathrm{e}\Rightarrow\big|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)\big|\geqslant\mathrm{e}-\big|\mathbb{E}(Y_n)-\ell\big|,$$

ce qui donne l'inclusion d'évènements

$$\big(|Y_n-\ell|\geqslant\mathrm{e}\big)\subset\big(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)|\geqslant\mathrm{e}-|\mathbb{E}(Y_n)-\ell|\big),$$

puis par croissance de la probabilité :

$$\mathbb{P}\big(|Y_n-\ell|\geqslant\mathrm{e}\big)\leqslant\mathbb{P}\big(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)|\geqslant\mathrm{e}-|\mathbb{E}(Y_n)-\ell|\big).$$

Puis, pour n assez grand on aura $\left|\mathbb{E}(Y_n)-\ell\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}$, donc $\mathrm{e}-\left|\mathbb{E}(Y_n)-\ell\right| \geqslant \frac{\mathrm{e}}{2}$, ce qui donne l'inclusion

$$\Big(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \mathrm{e}-|\mathbb{E}(Y_n)-\ell|\Big) \subset \left(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \frac{\mathrm{e}}{2}\right),$$

puis par croissance de la probabilité :

$$\mathbb{P}\big(|Y_n-\ell| \geqslant \mathrm{e}\big) \leqslant P\Big(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \mathrm{e}-|\mathbb{E}(Y_n)-\ell|\Big) \leqslant P\left(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \frac{\mathrm{e}}{2}\right).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\big(|Y_n-\ell| > \mathrm{e}\big) \leqslant \mathbb{P}\big(|Y_n-\ell| \geqslant \mathrm{e}\big) \leqslant P\Big(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \mathrm{e}-|\mathbb{E}(Y_n)-\ell|\Big) \leqslant P\left(|Y_n-\mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \frac{\mathrm{e}}{2}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et le théorème des gendarmes conclut.

Exercice 14. • X et Y ont chacune une espérance finie, donc par linéarité de l'espérance, $X-Y$ aussi et

$$\mathbb{E}(X-Y)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y).$$

X et $X-Y$ sont indépendantes, X et $X-Y$ ont une espérance finie, donc $X(X-Y)$ a aussi une espérance finie, et de plus on a l'égalité

$$\mathbb{E}\big(X(X-Y)\big)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X-Y).$$

De même, $Y(X-Y)$ a une espérance finie et

$$\mathbb{E}\big(Y(X-Y)\big)=\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X-Y).$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$X(X-Y)-Y(X-Y)=(X-Y)^2$$

a une espérance finie, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((X-Y)^2\big) &= \mathbb{E}\big(X(X-Y)\big)-\mathbb{E}\big(Y(X-Y)\big)\\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X-Y)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X-Y)\\
&= \big(\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)\big)\mathbb{E}(X-Y)\\
&= \big(\mathbb{E}(X-Y)\big)^2
\end{aligned}$$

Donc, la formule de Huygens donne que $X-Y$ a une variance, et

$$\mathbb{V}(X-Y)=\mathbb{E}\big((X-Y)^2\big)-\big(\mathbb{E}(X-Y)\big)^2=0.$$

• L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors, pour tout $\mathrm{e}>0$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}\big(|X-Y-\mathbb{E}(X-Y)| \geqslant \mathrm{e}\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X-Y)}{\mathrm{e}^2}=0,$$

soit pour tout $\mathrm{e}>0$,

$$\mathbb{P}\big(|X-Y-\mathbb{E}(X-Y)| \geqslant \mathrm{e}\big)=0.$$

Notons alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E_n=\left(\left|X-Y-\mathbb{E}(X-Y)\right| \geqslant \frac{1}{n}\right).$$

On a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n=\big(\left|X-Y-\mathbb{E}(X-Y)\right|>0\big)=\big(X-Y\neq\mathbb{E}(X-Y)\big),$$

et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E_n \subset E_{n+1}$$

(car $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$), par continuité croissante de P, on a

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}*} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

(mais on peut aussi dire $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}*} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$). Par conséquent,

$$1 = \mathbb{P}\big(\overline{X - Y \neq \mathbb{E}(X-Y)}\big) = \mathbb{P}\big(X - Y = \mathbb{E}(X-Y)\big),$$

ce qui conclut.

Exercice 15. La fonction génératrice G_X de X est

$$\mathrm{G}_X : t \mapsto pt + (1-p)$$

et celle de Y est

$$\mathrm{G}_Y : t \mapsto pt + (1-p).$$

Comme X et Y sont indépendants, la fonction génératrice G_Z de $Z = X + Y$ est

$$\mathrm{G}_Z : t \mapsto \mathrm{G}_X(t) \times \mathrm{G}_Y(t) = \big(pt + (1-p)\big)^2 = p^2t^2 + 2p(1-p)t + (1-p)^2.$$

On en déduit

$$\boxed{Z(\Omega) = \{0,1,2\}}, \qquad \boxed{\mathbb{P}(Z=0) = (1-p)^2}, \qquad \boxed{\mathbb{P}(Z=1) = 2p(1-p)}, \qquad \boxed{\mathbb{P}(Z=2) = p^2}.$$

Remarque. On peut aussi l'obtenir ainsi (pour rester dans le cadre de ce TD) : de manière évidente, on a

$$Z(\Omega) \subset \{0,1,2\},$$

puis pour $k \in \{0,1,2\}$, la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\big((X = 0), (X=1)\big)$ donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}\big((X+Y=k) \cap (X=0)\big) + \mathbb{P}\big((X+Y=k) \cap (X=1)\big) \\ &= \mathbb{P}\big((Y=k) \cap (X=0)\big) + \mathbb{P}\big((Y=k-1) \cap (X=1)\big) \end{aligned}$$

En utilisant que X et Y sont indépendants, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(Y=k-1)\mathbb{P}(X=1) \\ &= (1-p)\mathbb{P}(Y=k) + p\mathbb{P}(Y=k-1) \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à calculer pour $k=0$, puis $k=1$, puis $k=2$, sachant

$$\mathbb{P}(Y=-1) = 0, \qquad \mathbb{P}(Y=0) = 1-p, \qquad \mathbb{P}(Y=1) = p, \qquad \mathbb{P}(Y=2) = 0.$$

On retrouve les valeurs annoncées précédemment.

Par linéarité de l'espérance, comme X et Y ont une espérance finie (car de loi de Bernoulli), Z en a une aussi, et

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \boxed{2p}.$$

Comme X et Y ont une variance et sont indépendants, V a une variance qui vaut

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \boxed{2p(1-p)}.$$

Remarque. C'est beaucoup plus rapide qu'en passant par la formule de Huygens et le théorème de transfert...

Exercice 16. 1) Notons G l'évènement « le joueur gagne », c'est-à-dire

« on tire un nombre pair ».

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'évènement

« on tire n ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n est un évènement de probabilité

$$\mathbb{P}(E_n) = p_n = \frac{1}{2^n}.$$

Alors

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{2n},$$

et les évènements E_{2n} sont deux à deux incompatibles (car on ne tire qu'un seul numéro), on a une union dénombrable, donc par σ-additivité de la probabilité, on a

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(E_{2n}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(en reconnaissant une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$, convergente car $\frac{1}{4} \in]-1,1[$).

2) $\bigstar$ On a

$$G(\Omega) = \big\{2n,\ n \in \mathbb{N}^*\big\} \cup \big\{-(2n+1),\ n \in \mathbb{N}\big\}$$

(*c'est bien un ensemble dénombrable, comme union de deux ensembles dénombrables*).

Puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $(G = 2n) = E_{2n}$, donc

$$\mathbb{P}(G = 2n) = \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n},$$

et pour $n \in \mathbb{N}$, $\big(G = -(2n+1)\big) = E_{2n+1}$, donc

$$\mathbb{P}\big(G = -(2n+1)\big) = \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^n}.$$

$\bigstar$ Ensuite, G a une espérance finie si et seulement si la famille $\big(n\mathbb{P}(G = n)\big)_{n \in G(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas, l'espérance de G vaut la somme de cette famille.

On a $G(\Omega) = \big\{2n,\ n \in \mathbb{N}^*\big\} \cup \big\{-(2n+1),\ n \in \mathbb{N}\big\}$, union de deux ensembles dénombrables, donc par le théorème de sommation par paquets, G a une espérance finie si et seulement si les familles $\big(2n\mathbb{P}(G = 2n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\big(-(2n+1)\mathbb{P}(G = 2n+1)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables, autrement dit si les séries numériques

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2n\mathbb{P}(G = 2n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} -(2n+1)\mathbb{P}\big(G = -(2n+1)\big)$$

convergent absolument, et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\mathbb{P}(G = 2n) + \sum_{n=0}^{\infty} -(2n+1)\mathbb{P}\big(G = -(2n+1)\big).$$

Or, c'est le cas, car

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2n\mathbb{P}(G = 2n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2n\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{4}$ avec $\frac{1}{4} \in]-1,1[$, donc est absolument convergente, de somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n\mathbb{P}(G = 2n) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{9},$$

et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (2n+1)\mathbb{P}\big(G = -(2n+1)\big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (2n+1)\frac{1}{2}.\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

est la somme d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{4}$ et d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$, avec $\frac{1}{4} \in]-1,1[$, donc est absolument convergente, de somme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathbb{P}\big(G=-(2n+1)\big) = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{9}+\frac{2}{3} = \frac{10}{9}.$$

Donc G a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\mathbb{P}(G=2n) - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathbb{P}\big(G=-(2n+1)\big) = \frac{8}{9}-\frac{10}{9} = \boxed{-\frac{2}{9}}.$$

★ G a une variance si et seulement si G^2 a une espérance finie, donc par le théorème de transfert, si et seulement si la famille $\big(n^2\mathbb{P}(G=n)\big)_{n\in G(\Omega)}$ est sommable.
Or, pour tout $n \in G(\Omega)$,

$$n^2\mathbb{P}(G=n) = n^2\mathbb{P}(E_{|n|}) = \frac{n^2}{2^{|n|}} = \frac{|n|^2}{2^{|n|}},$$

que n soit pair ou impair. Puis, la fonction

$$n \in G(\Omega) \mapsto |n| \in \mathbb{N}^*$$

induit une bijection, donc on peut faire le changement d'indice $k=|n|$, ce qui donne : G^2 a une espérance finie si et seulement si la famille $\big(n^2\mathbb{P}(G=n)\big)_{n\in G(\Omega)} = \big(k^2\frac{1}{2^k}\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable., autrement dit si et seulement si la série numérique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{k^2}{2^k} = 0 + \frac{1}{4}\sum_{k\geqslant 2}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}^*}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

est absolument convergente (convergente suffit, puisqu'elle est à termes positifs), et c'est le cas car elle est la somme d'une série géométrique dérivée deux fois de raison $\frac{1}{2}$ et d'une série géométrique dérivée une fois de raison $\frac{1}{2}$, avec $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
On a alors

$$\mathbb{E}(G^2) = \frac{1}{4}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4+2 = 6.$$

Remarque. Là aussi, on aurait pu utiliser le théorème de sommation par paquets, mais c'est plus long à rédiger...

La formule de König-Huygens donne alors

$$\mathbb{V}(G) = \mathbb{E}(G^2) - \mathbb{E}(G)^2 = 6 - \frac{4}{81} = \boxed{\frac{482}{81}}.$$

Autre rédaction, beaucoup plus simple : il faut remarquer que

$$G(\Omega) = \big\{n(-1)^n,\, n\in\mathbb{N}^*\big\} \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(G=n(-1)^n\big) = p_n = \frac{1}{2^n}.$$

Alors, par définition, G a une espérance finie si et seulement si la famille $\big(n(-1)^n\mathbb{P}\big(G=n(-1)^n\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(n(-1)^n\frac{1}{2^n}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, autrement dit si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n(-1)^n\frac{1}{2^n}$$

converge absolument, or cette série est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, donc elle converge bien absolument. Alors

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{-1}{2}\right)^2} = -\frac{2}{9},$$

en utilisant la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

valable pour tout $x \in]-1,1[$ (et ici on prend $x = -\frac{1}{2} \in]-1,1[$).
Pour la variance, cela permet aussi d'être plus rapide : par le théorème de transfert, G^2 a une espérance finie si et seulement si la famille $\big((n(-1)^n)^2\mathbb{P}\big(G = n(-1)^n\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(n^2\frac{1}{2^n}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, autrement dit si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \big(n(-1)^n\big)^2 \frac{1}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2 \frac{1}{2^n}$$

converge absolument (comme elle est à termes positifs, converge suffit).
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2\frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

est le terme général d'une série numérique convergente, comme combinaison linéaire des termes d'une série géométrique dérivée deux fois et d'une série géométrique dérivée une fois, toutes deux de raison $\frac{1}{2}$, donc termes d'une série numérique convergente, puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$. Par le théorème de transfert, on en déduit que G^2 a une espérance finie, donc G une variance, et

$$\mathbb{E}(G^2) = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4+2 = 6,$$

en utilisant la formule

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3},$$

valable pour tout $x \in]-1,1[$ (et ici on prend $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$).
La formule de König-Huygens donne alors

$$\mathbb{V}(G) = \mathbb{E}(G^2) - \mathbb{E}(G)^2 = 6 - \frac{4}{81} = \boxed{\frac{482}{81}}.$$

Remarque. Le calcul peut même être plus rapide, si on a l'idée d'utiliser la variante de la formule de Huygens :

$$\mathbb{V}(G) = \mathbb{E}\big(G(G-1)\big) + \mathbb{E}(G) - \mathbb{E}(G)^2.$$

Exercice 17. 1) ★ Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc $U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(U \geqslant k) = (X \geqslant k) \cap (Y \geqslant k),$$

donc par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(U \geqslant k) = \mathbb{P}\big((X \geqslant k) \cap (Y \geqslant k)\big) = \mathbb{P}(X \geqslant k)\mathbb{P}(Y \geqslant k).$$

Or,

$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = P\left(\bigcup_{i=k}^{\infty}(X = i)\right) = \sum_{i=k}^{\infty}\mathbb{P}(X = i)$$

par incompatibilité deux à deux des évènements $(X = i)$ pour $i \geqslant k$, et σ-additivité de P.

Remarque. On peut aussi obtenir cette égalité à l'aide de la formule des probabilités totales : X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, donc $\big((X = i)\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, puis la formule des probabilités totales donne alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant k) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\big((X \geqslant k) \cap (X = i)\big) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\big((i \geqslant k) \cap (X = i)\big) \\
&= \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\big(\underbrace{(i \geqslant k)}_{=\varnothing} \cap (X = i)\big)}_{=0} + \textstyle\sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}\big(\underbrace{(i \geqslant k)}_{=\Omega} \cap (X = i)\big) \\
&= \textstyle\sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = i)
\end{aligned}$$

Donc
$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{\infty} q^{i-1}p = p\sum_{i=k}^{\infty} q^{i-1} \underset{j=i-k}{=} pq^{k-1}\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{pq^{k-1}}{1-q} = q^{k-1}$$
(en notant $q = 1-p$). Comme Y a la même loi que X, $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = q^{k-1}$, et donc
$$\mathbb{P}(U \geqslant k) = q^{2k-2}.$$
Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$(U \geqslant k) = (U = k) \cup (U > k) = (U = k) \cup (U \geqslant k+1)$$
(car U est à valeurs entières, donc $(U > k) = (U \geqslant k+1)$), et c'est une union de deux évènements incompatibles, donc
$$\mathbb{P}(U \geqslant k) = \mathbb{P}(U = k) + \mathbb{P}(U \geqslant k+1),$$
soit
$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1) = q^{2k-2} - q^{2k} = q^{2k-2}(1-q^2) = \big(1-(1-q^2)\big)^{k-1}(1-q^2).$$
Donc
$$\boxed{U \sim \mathcal{G}\left(1-q^2\right)}.$$
Et donc
$$\boxed{\mathbb{E}(U) = \frac{1}{1-q^2}}.$$
Remarque. On peut aussi remarquer que la série numérique
$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(U \geqslant k)$$
converge (c'est une série géométrique de raison $q^2 \in [0,1[$), et comme U est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors on sait que U a une espérance finie, et
$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(U \geqslant k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-2} = \frac{1}{1-q^2}.$$
★ • Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc $V(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\mathbb{P}(V \leqslant n) = \mathbb{P}\big((X \leqslant n) \cap (Y \leqslant n)\big) = \mathbb{P}(X \leqslant n)\mathbb{P}(Y \leqslant n)$$
car les variables X et Y sont indépendantes. Puis, comme $X \sim \mathcal{G}(p)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(X = k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\frac{1-q^n}{1-q} = 1-q^n$$
(par incompatibilité deux à deux des évènements $(X = k)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$, et par σ-additivité de P), en posant $q = 1-p$.

Remarque. On peut aussi obtenir l'égalité $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)$ par la formule des probabilités totales, de la même manière qu'à la remarque 17.

On remarque que cette formule reste vraie pour $n = 0$ (car $(X \leqslant 0) = \varnothing$ est de probabilité $0 = 1-q^0$). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{P}(V \leqslant n) = \big(1-q^n\big)^2.$$
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$(V \leqslant n) = (V \leqslant n-1) \cup (V = n)$$
(car V est à valeurs entières), et comme ces deux évènements sont incompatibles, on a
$$\mathbb{P}(V \leqslant n) = \mathbb{P}(V \leqslant n-1) + \mathbb{P}(V = n),$$

donc (puisque n et $n-1$ sont dans $\mathbb{N}$, pour pouvoir appliquer la formule précédente),

$$\mathbb{P}(V=n) = \left(1-q^n\right)^2 - \left(1-q^{n-1}\right)^2 = q^{n-1}\left(1-q\right)\left(2-q^{n-1}-q^n\right).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\mathbb{P}(V=n) = pq^{n-1}\left(2-q^{n-1}-q^n\right)}.$$

Cette probabilité est non nulle (car $0<q<1$), donc $n \in V(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\mathbb{N}^* \subset V(\Omega).$$

Par double inclusion, on a alors

$$\boxed{V(\Omega) = \mathbb{N}^*}.$$

• La variable aléatoire V a une espérance finie car $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et la famille $\left(n\mathbb{P}(V=n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, puisque la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(V=n)$$

est absolument convergente (cette série numérique est une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées de raison $q \in [0,1[$ ou $q^2 \in [0,1[$, qui sont donc absolument convergentes). Puis

$$\mathbb{E}(V) = p\sum_{n=1}^{\infty}\left(2nq^{n-1} - n(q^2)^{n-1} - nq(q^2)^{n-1}\right) = p\left(\frac{2}{(1-q)^2} - \frac{1+q}{(1-q^2)^2}\right) = \boxed{\frac{1+2q}{1-q^2}}$$

• L'autre façon est de remarquer que

$$U+V = X+Y,$$

et donc, comme U, X et Y ont une espérance finie (car suivent des lois géométriques), par linéarité de l'espérance, V aussi et

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(U) = \frac{1}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{1-q^2} = \frac{1+2q}{1-q^2}.$$

2) On a

$$U+V = X+Y.$$

Puis, les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc $X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on a par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\left((X=k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (c'en est un, car X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$) :

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left((X=k)\cap(X+Y=n)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left((X=k)\cap(Y=n-k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

(en utilisant que X et Y sont indépendants). Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geqslant n$, on a $n-k \leqslant 0$ et donc

$$\mathbb{P}(Y=n-k) = 0,$$

donc

$$\mathbb{P}(U+V=n) = \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) + \sum_{k=n}^{\infty}0 = \sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}pq^{n-k-1} = \boxed{(n-1)p^2q^{n-2}}$$

Cette probabilité est non nulle (car $0<p$ et $0<q$), donc $n \in (U+V)(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, donc

$$\mathbb{N}\backslash\{0,1\} \subset (U+V)(\Omega).$$

Par double inclusion, on a alors

$$\boxed{(U+V)(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}}.$$

Autre démonstration : par les fonctions génératrices. On a

$$U+V = X+Y.$$

Donc, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\mathrm{G}_{U+V}(t) = \mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathrm{G}_X(t) \times \mathrm{G}_Y(t),$$

car X et Y sont **indépendants**. Puis,

$$\mathrm{G}_X(t) = \mathrm{G}_Y(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

pour $t \in]-1,1[$ (et même pour $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, par le cours, puisque X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p), donc pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\mathrm{G}_{U+V}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2 = p^2t^2\frac{1}{(1-qt)^2}.$$

Or, pour $t \in]-1,1[$, on a $|qt| < q < 1$, donc la formule de la série géométrique dérivée donne, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\mathrm{G}_{U+V}(t) = p^2t^2\sum_{k=1}^{\infty} k(qt)^{k-1} \underset{n=k+1}{=} \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)p^2q^{n-2}t^n.$$

On en déduit

$$\boxed{(X+Y)(\Omega) = (U+V)(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X+Y=n) = \mathbb{P}(U+V=n) = (n-1)p^2q^{n-2}}.$$

3) Utilisons la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\big((X+Y=n)\big)_{n\geqslant 2}$ (c'en est un, car $X+Y$ est une variable aléatoire avec $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$) :

$$\mathbb{P}(X+Y \leqslant Z) = \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}\big((X+Y\leqslant Z)\cap(X+Y=n)\big) = \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}\big((n\leqslant Z)\cap(X+Y=n)\big) = \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}(n\leqslant Z)\mathbb{P}(X+Y=n)$$

car X, Y et Z sont indépendants, donc $X+Y$ et Z sont indépendants (lemme des coalitions).
Puis, à la question 1, on a vu (puisque Z suit la même loi que le X de la question 1), que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = q^{n-1}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X+Y\leqslant Z) = \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}(n-1)p^2q^{n-2} = p^2q\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(q^2)^{n-2} \underset{k=n-1}{=} p^2q\sum_{k=1}^{\infty}k(q^2)^{k-1} = \frac{p^2q}{(1-q^2)^2} = \boxed{\frac{q}{(1+q)^2}}$$

(en reconnaissant une série géométrique dérivée de raison q^2).

Exercice 18. X suit une loi de Poisson, donc $X \geqslant 0$, donc Y est bien définie. Puis, par le théorème de transfert, comme $\frac{1}{1+n} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $X(\Omega) = \mathbb{N}$,

Y a une espérance finie $\Leftrightarrow$ la famille $\left(\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X=n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable

$\Leftrightarrow$ la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument

et alors $\mathbb{E}(Y)$ vaudra la somme de cette série.

Remarque. Converge suffit, car la série numérique considérée est à termes positifs.

Or,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{1+n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{n\geqslant -1}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}-1\right) \underset{k=n+1}{=} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\lambda^k}{k!}-1\right)$$

et on reconnaît une série exponentielle, donc absolument convergente (donc Y a bien une espérance finie), et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\big(e^{\lambda}-1\big) = \boxed{\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}.$$

Exercice 19. 1) U ne prend que deux valeurs : 0 ou 1.
Si $U = 1$, alors $X \leqslant n$, donc le commerçant fait un bénéfice de xX euros pour les X produits qu'il vend, mais perd $(n - X)y$ euros pour la non vente d'ici la fin de la saison des $n - X$ produits restants. Donc, dans ce cas,

$$Y_n = xX - (n - X)y = \big(xX - (n - X)y\big) \underbrace{U}_{=1} + nx \underbrace{(1 - U)}_{=0}.$$

Si $U = 0$, c'est que $X > n$, donc le commerçant a pu tout vendre, et donc il a gagné nx euros, et pas de frais du aux invendus. Donc, dans ce cas,

$$Y_n = nx = \big(xX - (n - X)y\big) \underbrace{U}_{=0} + nx \underbrace{(1 - U)}_{=1}.$$

Dans tous les cas, on a bien l'égalité de l'énoncé.
2a) X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, U à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc par produit, UX est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Puis, si $X \leqslant n$, alors $UX \leqslant n$, donc dans ce cas, UX est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Et si $X > n$, alors $U = 0$, et donc dans ce cas $UX = 0$ est encore à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.
On a donc bien

$$UX(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}.$$

2b) Comme XU est d'image finie incluse dans $\{0, \dots, n\}$, XU a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(XU) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(XU = k) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(XU = k).$$

Puis, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\big((X = i)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ (c'en est un, car X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$) : pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(XU = k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\big((X = i) \cap (XU = k)\big) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\big((X = i) \cap (iU = k)\big).$$

Soit $i \in \mathbb{N}$.
Si $i > n$, alors $(X = i) \subset (U = 0)$, et donc

$$(X = i) \cap (iU = k) \subset (X = i) \cap (i \cdot 0 = k) = \varnothing$$

car $k \geqslant 1$, donc

$$\mathbb{P}\big((X = i) \cap (iU = k)\big) = 0.$$

Si $i \leqslant n$ avec $i \neq k$, $(X = i) \subset (U = 1)$, et donc

$$(X = i) \cap (iU = k) \subset (X = i) \cap (i = k) = \varnothing$$

car $i \neq k$, donc

$$\mathbb{P}\big((X = i) \cap (iU = k)\big) = 0.$$

Donc, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(XU = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(XU) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)}$$

(on a rajouté le terme $k = 0$ qui est nul, c'est utile pour la question suivante).
2c) XU et U ont une espérance finie, donc par combinaison linéaire, Y_n aussi, et par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(Y_n) = x\mathbb{E}(XU) - ny\mathbb{E}(U) + y\mathbb{E}(XU) + nx - nx\mathbb{E}(U) = (x + y)\mathbb{E}(XU) + nx - n(x + y)\mathbb{E}(U).$$

Or, comme U suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X \leqslant n)$, on a

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{P}(X \leqslant n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} (X = k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)$$

(car les évènements $(X = k)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, sont deux à deux incompatibles), et donc

$$\mathbb{E}(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) + nx - n(x + y) \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = (x + y) \sum_{k=0}^{n} (k - n)\mathbb{P}(X = k) + nx.$$

3a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n) = x - (x + y) \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)}$$

(le terme en $k = n + 1$ de la somme pour $\mathbb{E}(Y_{n+1})$ est nul, puis il suffit de regrouper les deux sommes ensembles).
3b) On considère l'ensemble

$$E = \left\{ p \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(X = k) < \frac{x}{x + y} \right\}.$$

E est non vide, car $0 \in E$ puisque par hypothèse

$$\mathbb{P}(X = 0) < \frac{x}{x + y}.$$

E est majoré car

$$\sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(X = k) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 > \frac{x}{x + y}$$

(la somme de la série fait 1 car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et l'inégalité est stricte car $y > 0$), donc il existe un entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, on a

$$\sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(X = k) \geqslant \frac{x}{x + y},$$

soit $p \notin E$. Donc E est majoré par p_0.
Comme E est un ensemble d'entiers, E est alors fini, et donc il existe $n_0 = \max(E)$, et par définition de « $n_0 \in E$ » et de « $n_0 + 1 \notin E$ », on aura bien

$$\sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{P}(X = k) < \frac{x}{x + y} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n_0+1} \mathbb{P}(X = k) \geqslant \frac{x}{x + y}.$$

Montrons l'unicité : soit $n < n_0 = \max(E)$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=n+1}^{n_0} \underbrace{\mathbb{P}(X = k)}_{\geqslant 0} = \sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{P}(X = k) < \frac{x}{x + y},$$

donc $n \in E$. Donc

$$E = [\![0, \max(E)]\!].$$

Donc, si $n < n_0$, on a $n + 1 \in E$, donc n ne peut convenir pour n_0.
Et si $n \geqslant n_0 + 1$, alors $n \notin E$ (car $n_0 = \max(E)$), c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \geqslant \frac{x}{x + y},$$

donc n ne peut convenir pour n_0.
Donc seul $n_0 = \max(E)$ est possible. D'où l'unicité.
3c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) < \frac{x}{x + y} \qquad \Leftrightarrow \qquad n \in E.$$

Donc la suite $\big(\mathbb{E}(Y_n)\big)_{n \leqslant n_0+1}$ est strictement croissante.

Puis, pour $n \geqslant n_0 + 1$, on a

$$\frac{x}{x+y} \leqslant \sum_{k=0}^{n_0+1} \mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{n_0+1} \mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=n_0+2}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{\geqslant 0} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k),$$

donc

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n) \leqslant 0.$$

Donc la suite $\big(\mathbb{E}(Y_n)\big)_{n \geqslant n_0+1}$ est décroissante.
On en déduit bien que $\mathbb{E}(Y_n)$ sera maximal pour

$$n = n_1 := n_0 + 1.$$

4a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k+1) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\alpha}{k+1} e^{-\alpha} \frac{\lambda^k}{k!} = \boxed{\frac{\alpha}{k+1} \mathbb{P}(X=k)}.$$

4b) On utilise le résultat de la question précédente pour calculer les valeurs successives de $\mathbb{P}(X=k)$ de manière « optimale ».

```
def stock_ideal(x, y, alpha) :
test = x / ( x + y)             # La valeur que la somme doit franchir
n = 0
proba = exp(- alpha)            # Contient \P(X=0)
som = proba                     # Contient le terme k=0 de la somme
while som < test :              # A cette étape, som contient la somme jusqu’à k=n
# et proba contient \P(X=n)
# Si le test est vrai, alors n est dans E
n = n + 1                   # La valeur de n change, donc maintenant, som contient la somme ju
# et proba contient \P(X=n-1)
proba = proba * alpha / n   # proba passe de \P(X=n-1) à \P(X=n)
som = som + proba           # On rajoute à som le terme k=n, donc som contient la somme jusqu’
return n                        # Quand on sort de la boucle, c’est que som >= test pour la pr
# et donc n contient le premier indice ou n n’est pas dans E,
# donc à cette étape, n vaut n_0+1 soit n_1, la valeur qu’on veut renvoyer.
```

Exercice 20. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y(X=n) = \mathbb{N}$$

car sachant $(X=n)$, Y suit une loi de Poisson de paramètre n.
Pour $n = 0$: une loi de Poisson de paramètre 0 n’existe pas. Ceci dit, si on adapte la formule d’une loi de Poisson dans le cas d’un paramètre nul, on obtient une variable aléatoire presque sûrement égale à 0. L’énoncé dit qu’on garde $Y(X=0) = \mathbb{N}$.
Puis, $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X=n)$, puis

$$Y(\Omega) = Y\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X=n)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y(X=n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} = \boxed{\mathbb{N}}.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales avec le système complet d’évènements $\big((X=n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ (c’en est un, car X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$) donne :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) P_{(X=n)}(Y=k) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{n^k}{k!} e^{-n}}$$

Pour calculer l'espérance, on utilise le théorème de Fubini : comme la famille $\left(k\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{n^k}{k!}e^{-n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est positive et indexée sur $\mathbb{N}^2$, qui est dénombrable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{n^k}{k!}e^{-n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{n^k}{k!}e^{-n}\\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{n^k}{k!}\\
&\underset{j=k-1}{=} e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-n}\left(0+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n^{j+1}}{j!}\right)\\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-n}e^{n}\\
&\underset{\ell=n-1}{=} e^{-\lambda}\left(0+\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!}\right)\\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \boxed{\lambda}
\end{aligned}$$

Exercice 21. X et Y ont une variance, donc

$$\mathrm{Cov}(X,X)=\mathbb{V}(X),\qquad \mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)\qquad\text{et}\qquad \mathrm{Cov}(Y,Y)=\mathbb{V}(Y)$$

existent.
Comme X et Y ont une variance, $X-Y$ et $X+Y$ aussi comme somme et différence, puis $\mathrm{Cov}(X-Y,X+Y)$ existe. De plus, $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes, donc

$$0=\mathrm{Cov}(X-Y,X+Y).$$

Par bilinéarité de la covariance, on a alors

$$0=\mathrm{Cov}(X-Y,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\underbrace{\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,X)}_{=0}-\mathrm{Cov}(Y,Y)=\mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y),$$

ce qui conclut.
Autre démonstration (sur idée d'un élève) **:** partir du fait que $X-Y$ et $X+Y$ sont indépendants en utilisant qu'alors

$$\mathbb{V}\big((X+Y)+(X-Y)\big)=\mathbb{V}(X+Y)+\mathbb{V}(X-Y).$$

C'est en effet possible : X et Y ont une variance, donc par somme (et soustraction), $X+Y$ et $X-Y$ aussi, et comme $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendants, la formule du cours donne bien

$$\mathbb{V}(X+Y)+\mathbb{V}(X-Y)=\mathbb{V}\big((X+Y)+(X-Y)\big),$$

autrement dit

$$\mathbb{V}(X+Y)+\mathbb{V}(X-Y)=\mathbb{V}(2X)=2^2\mathbb{V}(X)=4\mathbb{V}(X).$$

Mais, toujours par le cours, comme X et Y ont une variance,

$$\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)\qquad\text{et}\qquad \mathbb{V}(X-Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Par conséquent,

$$4\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=2\mathbb{V}(X)+2\mathbb{V}(Y),$$

ce qui donne bien (après simplification) :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(Y).$$

Exercice 22. ★ La fonction G_X est développable en série entière sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ (pour que $\left|\frac{t^2}{2}\right|<1$), car on reconnaît une série géométrique de raison $\frac{t^2}{2}$, et pour tout $t\in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$, on a :

$$\mathrm{G}_X(t)=\frac{t}{2}\frac{1}{1-\frac{t^2}{2}}=\frac{t}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}t^{2n+1}$$

Donc

$$\boxed{X(\Omega)\text{ est l'ensemble des entiers positifs impairs}},$$

soit

$$\boxed{X(\Omega)=\{2n+1,\ n\in\mathbb{N}\}}$$

($X(\Omega)$ est formé de l'ensemble des indices $k\in\mathbb{N}$ tels que le coefficient devant t^k n'est pas nul), et pour $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\boxed{P(X=2n+1)=\frac{1}{2^{n+1}}}$$

(par unicité du développement en série entière).

Remarque. $\left\{\left(2n+1,\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ définit bien la loi d'une variable aléatoire (car pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{2^{n+1}}\geqslant 0$ et car $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=1$) à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $2n+1\in\mathbb{N}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$), dont G_X est la fonction génératrice.

★ • $Y=\frac{X+1}{2}$ suit alors

$$\boxed{\text{une loi géométrique de paramètre }\tfrac{1}{2}}.$$

En effet, X ne prend que des valeurs impaires, donc Y ne prend que des valeurs entières non nulles, soit

$$Y(\Omega)\subset\mathbb{N}^*,$$

et pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=n)=P(X=2n-1)=\mathbb{P}\big(X=2(n-1)+1\big)=\frac{1}{2^{(n-1)+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(car $n-1\in\mathbb{N}$)
Autre méthode : Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Puis, pour tout $t\in[0,1]$, par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{G}_Y(t)=\mathbb{E}\big(t^Y\big)=\mathbb{E}\left(t^{\frac{X+1}{2}}\right)=\mathbb{E}\left(\sqrt{t}\sqrt{t}^X\right)=\sqrt{t}\mathbb{E}\big(\sqrt{t}^X\big)=\sqrt{t}\mathrm{G}_X\big(\sqrt{t}\big)=\sqrt{t}\frac{\sqrt{t}}{2-\sqrt{t}^2}=\frac{t}{2-t}=\frac{\frac{1}{2}t}{1-\left(1-\frac{1}{2}\right)t},$$

donc G_Y est égale à la fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ sur $[0,1]$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on peut bien conclure que

$$\boxed{Y\text{ suit une loi géométrique de paramètre }\tfrac{1}{2}}.$$

• On en déduit que Y a une espérance finie, qui vaut

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,$$

et une variance qui vaut

$$\mathbb{V}(Y)=\frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2.$$

Or, $X=2Y-1$, et Y et 1 ont une espérance finie et une variance, donc par combinaison linéaire, X aussi, et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X)=2\mathbb{E}(Y)-1=\boxed{3},$$

et (par la formule $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$ valable dès que X a une variance), on a

$$\mathbb{V}(X)=2^2\mathbb{V}(Y)=\boxed{8}.$$

Exercice 23. Puisque G_X est la fonction génératrice d'une variable aléatoire, on doit avoir

$$\mathrm{G}_X(1) = 1, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{a = \exp(-2)},$$

et donc, pour tout $t \in [-1,1]$ (en fait, pour tout $t \in \mathbb{R}$),

$$\mathrm{G}_X(t) = \exp\left(t^2 - 1\right) = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Donc

$$\boxed{X(\Omega) = 2\mathbb{N}}$$

($X(\Omega)$ est formé de l'ensemble des indices $k \in \mathbb{N}$ tels que le coefficient devant t^k n'est pas nul), et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{P(X = 2n) = \frac{e^{-1}}{n!}}.$$

Remarque. $\left\{\left(2n, \frac{e^{-1}}{n!}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ définit bien la loi d'une variable aléatoire (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{-1}}{n!} \geqslant 0$ et car $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n!} = 1$) à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $2n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), dont G_X est la fonction génératrice (pour $a = e^{-2}$).

La fonction G_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en 1, donc X a une espérance finie. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{G}'_X(t) = 2t\exp\left(t^2 - 1\right),$$

donc

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{G}'_X(1) = \boxed{2}.$$

La fonction G_X est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en 1, donc X a une variance. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{G}''_X(t) = 2\exp\left(t^2 - 1\right) + 4t^2\exp\left(t^2 - 1\right),$$

donc

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \mathrm{G}''_X(1) = 2 + 4 = 6.$$

La formule de Huygens donne alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 6 + 2 - 4 = \boxed{4}.$$

Remarque. De la loi, on reconnaît que $\frac{X}{2} \sim \mathcal{P}(1)$.

Exercice 24. Si on effectue qu'un seul tirage, la loi de S_1 est directe (c'est le numéro obtenu lors d'un seul tirage dans une boîte, dont le contenu est connu) :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On en déduit que, pour tout $t \in [-1,1]$ (en fait pour tout $t \in \mathbb{R}$),

$$\mathrm{G}_{S_1}(t) = \frac{1}{4}t^0 + \frac{1}{2}t^1 + \frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2.$$

Les tirages étant avec remise, S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi que S_1. D'après le théorème du cours, on a donc, pour tout $t \in [-1,1]$ (là encore, en fait c'est pour tout $t \in \mathbb{R}$),

$$\mathrm{G}_{S_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{2n}.$$

En développant avec la formule du binôme de Newton, pour tout $t \in [-1,1]$, on a

$$\mathrm{G}_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{t}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} t^k.$$

On déduit immédiatement

$$\boxed{S_n(\Omega) = [\![0, 2n]\!]}$$

et, pour $0 \leqslant k \leqslant 2n$,

$$\boxed{P(S_n = k) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{k}}.$$

Exercice 25. 1) • Déterminons l'image de X_n. La variable aléatoire X_n est mal définie dans l'énoncé : que se passe-t-il si la n-ième boule blanche n'est jamais tirée ? On va dire que dans ce cas X_n prend la valeur 0.
X_n prend comme valeur soit 0, soit une valeur entière car c'est un nombre de tirages, et plus précisément

$$X_n(\Omega) \subset \{0\} \cup \{n, n+1, \dots\}$$

car pour obtenir n boules, il faut au moins n tirages (et 0 est présent pour tenir compte du fait qu'on puisse ne jamais avoir n boules blanches).
De plus,

$$\{0\} \cup \{n, n+1, \dots\} \subset X_n(\Omega),$$

car si, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'évènement « on a une boule blanche au k-ième essai », alors on a l'inclusion

$$B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n} \cap \cdots \cap \overline{B_{n+i-1}} \cap B_{n+i} \subset (X_n = n+i),$$

et donc par indépendance des B_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ (car les tirages sont indépendants puisqu'avec remise) et croissance de la probabilité,

$$\mathbb{P}(X_n = n+i) \geqslant P(B_1) \times \cdots \times P(B_{n-1}) \times P(\overline{B_n}) \times \cdots \times P(\overline{B_{n+i-1}}) \times P(B_{n+i}) = p^n(1-p)^i > 0.$$

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$(X_n = n+i) \neq \varnothing, \qquad \text{donc} \qquad n+i \in X_n(\Omega).$$

Pour 0,

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{B_i} \subset (X_n = 0),$$

ce qui justifie que

$$0 \in X_n(\Omega)$$

(mais cela ne justifie pas que $\mathbb{P}(X_n = 0) > 0$, d'ailleurs on verra que c'est faux). Donc

$$\boxed{X_n(\Omega) = \{0\} \cup [\![n, +\infty[\![}.$$

• Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n$. Les $k-1$ premiers tirages sont une répétition d'épreuves identiques et indépendantes, donc le nombre de boules blanches obtenu (qui arrive à chaque tirage avec probabilité p), suit une loi binomiale de paramètre $k-1$ et p. D'où, la probabilité de l'évènement $E_k =$ « il y a eu $n-1$ boules blanches lors des $k-1$ premières épreuves » vaut

$$\mathbb{P}(E_k) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{k-1-(n-1)}$$

(c'est la probabilité qu'une loi binomiale $\mathcal{B}(k-1, p)$ vaille $n-1$).
L'évènement $(X_n = k)$ est l'évènement : « le tirage numéro k amène une boule blanche (il faut que ce soit la n-ième) et il y a eu $n-1$ boule blanche obtenues lors des $k-1$ premiers tirages ». Le « et » se traduit par une intersection d'évènements :

$$(X_n = k) = B_k \cap E_k,$$

et B_k et E_k sont indépendants car concernant des tirages différentes (et que les tirages sont indépendants car il y a remise), donc

$$\mathbb{P}(X_n = k) = P(B_k)P(E_k).$$

Comme $\mathbb{P}(B_k) = p$, on a bien le résultat voulu :

$$\boxed{P(X_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}}.$$

On fait le calcul de $\mathbb{P}(X_n = 0)$ plus loin, et l'on constatera que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0$, ce qui explique pourquoi dans l'énoncé on « enlève » la valeur 0 de $X_n(\Omega)$.

2) La série entière

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$$

est de rayon 1, donc sa somme

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et sur cet intervalle, on peut dériver terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x^k)^{(N)} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)^{(N)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(N)}.$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x^k)^{(N)} = \sum_{k=0}^{N-1} 0 + \sum_{k=N}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-N+1)x^{k-N} = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{k!}{(k-N)!} x^{k-N} = \sum_{k=N}^{+\infty} N!\binom{k}{N} x^{k-N}.$$

Puis, par récurrence directe sur $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(N)} = \frac{N!}{(1-x)^{N+1}},$$

et l'égalité de ces deux expressions conclue (en simplifiant par $N!$).

Remarque. On n'a pas calculé $\mathbb{P}(X_n = 0)$. Comme $X_n(\Omega) = \{0\} \cup \big\{k \in \mathbb{N},\ \text{avec } k \geqslant n\big\}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_n = 0) &= 1 - \sum_{k=n}^{+\infty} P(X_n = k) \\
&= 1 - \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \\
&\underset{j=k-1}{=} 1 - p^n \sum_{j=n-1}^{+\infty} \binom{j}{n-1} (1-p)^{j-(n-1)} \\
&= 1 - p^n \sum_{j=N}^{+\infty} \binom{j}{N} (1-p)^{j-N}
\end{aligned}$$

en notant $N = n-1 \in \mathbb{N}$. Comme $1-p \in]-1,1[$, la formule établie à cette question s'applique avec $x = 1-p$, et donne

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p^n \frac{1}{\big(1-(1-p)\big)^{N+1}} = 1 - p^n \frac{1}{p^n} = \boxed{0}.$$

3a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n$, on a

$$\begin{aligned}
kP(X_n = k) &= k \frac{(k-1)!}{(n-1)!\big((k-1)-(n-1)\big)!} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= \tfrac{n}{n} \tfrac{k!}{(n-1)!(k-n)!} p^n (1-p)^{k-n} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= n \frac{k!}{n!(k-n)!} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= np^n \binom{k}{n} (1-p)^{k-n}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente (qui s'applique avec $x = 1-p$, car $1-p \in]-1,1[$), la série numérique

$$\sum_{k \geqslant n} \binom{k}{n} (1-p)^{k-n}$$

converge, de somme

$$\frac{1}{\big(1-(1-p)\big)^{n+1}}.$$

Donc la série numérique

$$\sum_{k \geqslant n} kP(X_n = k)$$

converge, et comme elle est à termes positifs, elle converge absolument.
Donc la famille $\big(kP(X=k)\big)_{k \geqslant n}$ est sommable (et rajouter $0 \cdot P(X=0)$ ne change rien, puisque c'est nul), donc X a une espérance finie (puisque $X_n(\Omega) = \{0\} \cup \big\{k \in \mathbb{N},\ \text{avec } k \geqslant n\big\}$), et

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot P(X_n = 0) + \sum_{k=n}^{+\infty} kP(X_n = k) = np^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} (1-p)^{k-n} = np^n \frac{1}{\big(1-(1-p)\big)^{n+1}} = np^n \frac{1}{p^{n+1}} = \boxed{\frac{n}{p}}.$$

3b) Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\mathbb{P}(X_n \geqslant 2) = 1$$

(car $(X_n \geqslant 2) \subset (X_n \geqslant n)$ et que $\mathbb{P}(X_n \geqslant n) = 1 - P(X_n = 0) = 1$), et donc avec probabilité 1 on aura $X_n - 1 \neq 0$, ce qui permet de définir

$$\frac{n-1}{X_n - 1}$$

(au moins sur un ensemble de probabilité 1).
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n \geqslant 2$,

$$\frac{n-1}{k-1} P(X_n = k) = \frac{n-1}{k-1} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = \binom{k-2}{n-2} p^n (1-p)^{k-n}$$

(après simplifications).
Comme X_n est à valeurs positives et dénombrable, le théorème de transfert s'applique et donne (les égalités suivantes ayant lieu dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\tfrac{n-1}{X_n-1}\right) &= \tfrac{n-1}{0-1} \underbrace{P(X_n = 0)}_{=0} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n-1}{k-1} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n-1}{k-1} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} p^n (1-p)^{k-1-(n-1)} \\
&= p \sum_{k=n}^{+\infty} P(X_{n-1} = k-1) \\
&\underset{j=k-1}{=} p \sum_{j=n-1}^{+\infty} P(X_{n-1} = j)
\end{aligned}$$

Cette dernière écriture assure que la série converge, donc $\frac{n-1}{X_n-1}$ a une espérance finie (pour $n \geqslant 2$). Et, comme

$$\sum_{j=n-1}^{+\infty} P(X_{n-1} = j) = 1$$

(puisqu'on a l'égalité $X_{n-1}(\Omega) = \{0\} \cup [\![n-1, +\infty [\![$ et que $\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) = 0$), on a

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{n-1}{X_n - 1}\right) = p}.$$

4) Notons G_n la fonction génératrice de X_n, alors pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
G_n(t) &= t^0 P(X_n = 0) + \sum_{k=n}^{+\infty} t^k P(X_n = k) \\
&= 0 + \sum_{k=n}^{+\infty} t^k \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= p^n t^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \big(t(1-p)\big)^{k-n} \\
&\underset{j=k-1}{=} p^n t^n \sum_{j=n-1}^{+\infty} \binom{j}{n-1} \big(t(1-p)\big)^{j-(n-1)} \\
&= p^n t^n \frac{1}{\big(1-t(1-p)\big)^{(n-1)+1}} \\
&= \left(\frac{pt}{1-t(1-p)}\right)^n
\end{aligned}$$

en appliquant (à l'avant dernière égalité) la formule de la question 2, prise pour $N = n-1 \in \mathbb{N}$ et $x = t(1-p)$ (et on a bien $x \in]-1, 1[$ puisque $|t| \leqslant 1$ donne $|x| \leqslant 1 - p < 1$).
Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{pt}{1 - t(1-p)}$$

est la fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre p, et la fonction génératrice d'une addition de lois indépendantes est le produit des fonctions génératrices, donc X_n a la même fonction génératrice que $Z_1 + \cdots + Z_n$ où les Z_1 sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que X_n a la même loi que $Z_1 + \cdots + Z_n$.
5) L'espérance ne dépend que de la loi, donc par linéarité de l'espérance, comme les Z_i ont une espérance finie (cf. cours sur la loi géométrique), X_n en a une aussi, et

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Z_1 + \cdots + Z_n) = \mathbb{E}(Z_1) + \cdots + \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{n}{p}.$$

Puis, les Z_i ont une variance (cf. cours sur la loi géométrique), donc par addition $Z_1 + \cdots + Z_n$ aussi, et par indépendance,

$$\mathbb{V}(Z_1 + \cdots + Z_n) = \mathbb{V}(Z_1) + \cdots + \mathbb{V}(Z_n) = \frac{1-p}{p^2} + \cdots + \frac{1-p}{p^2} = \frac{(1-p)n}{p^2}.$$

Enfin, comme la variance ne dépend que de la loi, X_n a une variance, et

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(Z_1 + \cdots + Z_n), \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{\mathbb{V}(X_n) = \frac{(1-p)n}{p^2}}.$$

Exercice 26. 1) • Comme X a une variance, et que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\mathrm{e} > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathrm{e}\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathrm{e}^2},$$

soit pour tout $\mathrm{e} > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|X - \lambda| \geqslant \mathrm{e}\big) \leqslant \frac{\lambda}{\mathrm{e}^2}.$$

On prend e $= \lambda$, on a alors l'inégalité désirée.
• Montrons $(X \geqslant 2\lambda) \subset \big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big)$:
Méthode 1 : comme
$$|X-\lambda| \geqslant \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \Big(X \leqslant 0 \text{ ou } X \geqslant 2\lambda\Big),$$
on a
$$\big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big) = \big(X \leqslant 0\big) \cup \big(X \geqslant 2\lambda\big) = (X=0) \cup \big(X \geqslant 2\lambda\big)$$
(car $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et donc $(X \leqslant 0) = (X = 0)$). Par conséquent,
$$(X \geqslant 2\lambda) \subset \big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big),$$
et donc, par croissance de la probabilité pour l'inclusion,
$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}\big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$
Méthode 2 : soit $X \geqslant 2\lambda$, alors $X - \lambda \geqslant \lambda > 0$, donc $|X-\lambda| = X - \lambda \geqslant \lambda$. On a donc
$$X \geqslant 2\lambda \Rightarrow |X-\lambda| \geqslant \lambda,$$
ce qui donne l'inclusion d'évènements
$$(X \geqslant 2\lambda) \subset \big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big),$$
et donc
$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}\big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$
par croissance de la probabilité pour l'inclusion.
2a) Montrons $(Z \geqslant a) \subset \big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big)$.
Méthode 1 : comme a et x sont positifs,
$$\begin{aligned}(Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad |Z+x| \geqslant |a+x| = a+x \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(Z+x \geqslant a+x \quad \text{ou} \quad -(Z+x) \geqslant a+x\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(Z \geqslant a \quad \text{ou} \quad a+Z+2x \leqslant 0\Big)\end{aligned}$$
Donc
$$Z \geqslant a \Rightarrow (Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2, \qquad \text{soit} \qquad (Z \geqslant a) \subset \big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big).$$
Par conséquent, par croissance de la probabilité pour l'inclusion,
$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big).$$
Méthode 2 : soit $Z \geqslant a$, alors $Z + x \geqslant a + x$. Or, $a + x \geqslant 0$, et la fonction
$$t \mapsto t^2$$
est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc
$$(Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2.$$
Et donc
$$Z \geqslant a \Rightarrow (Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2, \qquad \text{soit} \qquad (Z \geqslant a) \subset \big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big).$$
Par conséquent, par croissance de la probabilité pour l'inclusion,
$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big).$$
2b) $(Z+x)^2$ est une variable aléatoire discrète positive. On a
$$(Z+x)^2 = Z^2 + 2Zx + x^2,$$

or Z a une variance, donc Z et Z^2 ont une espérance finie, et une constante a une espérance finie, donc par linéarité de l'espérance, $(Z+x)^2$ a une espérance finie. Enfin, $(a+x)^2 > 0$ (car $a > 0$ et $x \geqslant 0$). Donc l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}\big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big((Z+x)^2\big)}{(a+x)^2}.$$

De plus, comme $(Z+x)^2 = Z^2 + 2Zx + x^2$, par la linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\big((Z+x)^2\big) = \mathbb{E}(Z^2) + 2x\mathbb{E}(Z) + x^2\mathbb{E}(1).$$

Comme Z est d'espérance nulle, et que

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2 = \mathbb{V}(Z)$$

par la formule de Huygens, on obtient

$$\mathbb{E}\big((Z+x)^2\big) = \mathbb{V}(Z) + x^2 = \sigma^2 + x^2.$$

D'où

$$\mathbb{P}\big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big) \leqslant \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2},$$

et l'inégalité de la question précédente conclut.

2c) Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il suffit de prendre x qui réalise $\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+}\left(\frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}\right)$ (si c'est possible).

Étudions donc la fonction suivante :

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2} \in \mathbb{R}.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{2x(a+x)^2 - 2(a+x)(\sigma^2+x^2)}{(a+x)^4} = \frac{2ax + 2x^2 - 2\sigma^2 - 2x^2}{(a+x)^3} = 2\frac{ax-\sigma^2}{(a+x)^3},$$

donc $f'(x)$ est du signe de $ax-\sigma^2$, donc f' est négatif sur $\left[0, \frac{\sigma^2}{a}\right]$, positif sur $\left[\frac{\sigma^2}{a}, +\infty\right[$, donc la fonction f a un minimum global en $x = \frac{\sigma^2}{a}$.

Pour ce x, l'inégalité de la question précédente devient :

$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{a^2}}{\left(a+\frac{\sigma^2}{a}\right)^2} = \frac{\sigma^2(a^2+\sigma^2)}{(a^2+\sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$

2d) Appliquons ceci à $Z = X - \lambda$ (pour que Z soit bien d'espérance nulle!!!), qui a pour variance $\sigma^2 = \lambda$ (car la variance est inchangée quand on translate par une constante).

Alors, pour $a = \lambda$, on a

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) = P(X-\lambda \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda+\lambda^2} = \frac{1}{\lambda+1}.$$

3a) Pour $t \in]1, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(X \geqslant a) = (t^X \geqslant t^a),$$

car la fonction

$$x \mapsto t^x$$

est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $t = 1$, on a juste

$$(X \geqslant a) \subset (t^X \geqslant t^a),$$

car la fonction

$$x \mapsto t^x = 1$$

est **croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans tous les cas, on a pour $t \in [1, +\infty[$, par croissance de la probabilité pour l'inclusion,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\big(t^X \geqslant t^a\big).$$

Comme $t^X \geqslant 0$ et que la variable aléatoire t^X a une espérance finie pour tout réel $t \in [1, +\infty[$ (c'est là qu'on utilise que X suit une loi de Poisson, entre autre !), l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}\big(t^X \geqslant t^a\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(t^X\big)}{t^a} = \frac{\mathrm{G}_X(t)}{t^a}.$$

Donc on a bien

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{G}_X(t)}{t^a} = \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^a}.$$

Une démonstration plus élémentaire : la série numérique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = k)t^k = e^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

converge sans condition sur t, car la série numérique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

converge de somme $e^{\lambda t}$, sans condition sur t ou λ (c'est une série exponentielle). Donc $\mathrm{G}_X(t)$ existe pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ et vaut

$$\mathrm{G}_X(t) = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

On veut montrer que

$$\mathrm{G}_X(t) \geqslant t^a P(X \geqslant a)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $t \geqslant 1$. Comme on a une série à terme positif, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant a$, on a $t^k \geqslant t^a$ (car $t \geqslant 1$), alors

$$\mathrm{G}_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k = \sum_{k<a} \underbrace{P(X = k)t^k}_{\geqslant 0} + \sum_{k\geqslant a} P(X = k)t^k \geqslant \sum_{k\geqslant a} P(X = k)t^k \geqslant \sum_{k\geqslant a} P(X = k)t^a = t^a P(X \geqslant a).$$

3b) Pour $a = 2\lambda$, l'inégalité de la question précédente donne : pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = \big(g(t)\big)^{\lambda}$$

en posant

$$g : t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}.$$

La fonction g est une fonction dérivable sur $[1, +\infty[$, et pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{e^{t-1}(t^2 - 2t)}{t^4},$$

donc $g'(t)$ est du signe de $t^2 - 2t$, donc est négatif sur $[1, 2]$ et positif sur $[2, +\infty[$, donc la fonction g a un minimum global en 2, qui vaut

$$g(2) = \frac{e}{4}.$$

Prenons donc $t = 2$ (cela donnera la meilleure minoration), on a alors

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \big(g(2)\big)^{\lambda} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.$$

Puis,

$$(\lambda + 1)\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée, car $\left|\frac{e}{4}\right| < 1$. Donc si λ est assez grand, on aura

$$(\lambda + 1)\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda} < 1, \qquad \text{soit} \qquad \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda + 1},$$

et donc pour ces λ, la dernière inégalité est meilleure que celle de la question 2.
Par contre,

$$\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda = e^{\lambda\ln\left(\frac{e}{4}\right)} = 1+\lambda\ln\left(\frac{e}{4}\right) + \underset{\lambda\to0^+}{o}(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\lambda+1} = 1-\lambda+\underset{\lambda\to0^+}{o}(\lambda),$$

et

$$\ln\left(\frac{e}{4}\right) = 1-2\ln(2) > -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1>\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad e>2,$$

ce qui est vrai, donc pour λ proche de 0^+, on a

$$\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda > \frac{1}{1+\lambda},$$

et donc pour λ assez proche de 0, la dernière inégalité sera moins bonne que celle de la question 2.

Remarque. Une étude de fonction (et des résolutions numériques d'équations) montrent que c'est pour $\lambda \geqslant 4,3335054$ (approximativement), que la deuxième inégalité est meilleure, et qu'avant c'est la première.

Exercice 27. 1) Une loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est caractérisée par $\mathbb{P}(X=n)\geqslant 0$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ (ce qui équivaut ici à $a\geqslant 0$) et $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)=1$. Or, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} P(X=n) = \sum_{n=1}^{N}\frac{a}{n(n+1)} = a\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = a\left(1-\frac{1}{N+1}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} a$$

(car on a reconnu une somme télescopique). Donc

$$\boxed{a=1}$$

(qui est bien $\geqslant 0$).
2) X a une espérance finie si et seulement si la famille $\big(nP(X+n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, autrement dit, si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n+1} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}$$

converge **absolument** (ici converge suffit, puisque c'est une série à termes positifs). Or, c'est la série harmonique, qui diverge, donc

$$\boxed{X \text{ n'a pas d'espérance finie}}.$$

Pour que X ait une variance, il faut que X ait une espérance finie. Ce n'est pas le cas ici, donc

$$\boxed{X \text{ n'a pas de variance}}.$$

3) On sait que la fonction génératrice est une série entière de rayon au moins 1, et qu'elle converge pour $t\in[-1,1]$.

Mais ici, on va commencer par faire le calcul pour $t \in]-1,1[$ **non nul** (on verra pourquoi au cours du calcul) [2] :

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n P(X=n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n(n+1)}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n} - \frac{t^n}{n+1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1} \qquad \text{(car ces séries convergent, car } |t|<1)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} - \frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} - t\right)\\
&\underset{k=n+1}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} - \frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} - t\right)\\
&= -\ln(1-t) - \frac{1}{t}\big(-\ln(1-t) - t\big)
\end{aligned}$$

(en reconnaissant un DSE usuel). Donc, pour tout $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\boxed{\mathrm{G}_X(t) = \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} + 1},$$

or on sait que la fonction G_X est continue sur $[-1,1]$, donc

$$\mathrm{G}_X(0) = \lim_{t\to 0} \mathrm{G}_X(t) = 0, \qquad \mathrm{G}_X(1) = \lim_{t\to 1^-} \mathrm{G}_X(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}_X(-1) = \lim_{t\to -1^+} \mathrm{G}_X(t) = 1 - 2\ln(2).$$

Remarque. Une application du critère de D'Alembert donne directement que la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{t^n}{n(n+1)}$ a 1 comme rayon. Donc G_X n'est défini que sur $[-1,1]$.

Exercice 28. Commençons par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x^n existe (même 0^n). En particulier, pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, l'expression $x^n y^k P(X=n, Y=k)$ existe.
1) Soit $(x,y) \in [-1,1]^2$, alors $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$.
Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a alors

$$0 \leqslant \left|x^n y^k P(X=n,Y=k)\right| \leqslant \left|P(X=n,Y=k)\right| = P(X=n,Y=k).$$

Or, la famille $\big(P(X=n,Y=k)\big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (car $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, et (X,Y) est une variable aléatoire avec $(X,Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}^2$. On peut même préciser que la somme de cette famille vaut 1), donc par inégalité, la famille

$$\big(x^n y^k P(X=n,Y=k)\big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable.
2) Soit $(x,y) \in [-1,1]^2$. La fonction $(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mapsto x^a y^b$ est bien définie (on peut prendre la puissance entière positive de n'importe quel réel), la famille $\big(x^n y^k P(X=n,Y=k)\big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, donc le théorème de transfert s'applique : la variable aléatoire $x^X y^Y$ a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(x^X y^Y) = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} x^n y^k P(X=n,Y=k) = \mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y).$$

2. On peut s'en douter, puisque X n'ayant pas d'espérance finie, on sait que le rayon de convergence de la série entière de somme G_X vaut 1, donc le calcul en ± 1 risque d'être compliqué...

Remarque. Comme $(x,y) \in [-1,1]^2$, on a $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$, donc pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $\left|x^a y^b\right| \leqslant 1$, donc $\left|x^X y^Y\right| \leqslant 1$. Comme 1 a une espérance finie, on retrouve par inégalité que $x^X y^Y$ a une espérance finie.

3) Pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$\mathrm{G}_X(x) = \mathbb{E}(x^X) = \mathbb{E}(x^X 1^Y) = \boxed{\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,1)}.$$

4) X et Y sont indépendants, donc pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(X=n, Y=k) = P(X=n)P(Y=k).$$

Soit $(x,y) \in [-1,1]^2$. Alors

$$\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} x^n y^k P(X=n, Y=k) = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} x^n P(X=n) y^k P(Y=k).$$

Puis, la famille $\big(x^n P(X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. En effet :

- $\mathbb{N}$ est dénombrable,
- $|x| \leqslant 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| \leqslant 1$, ce qui donne
$$\left|x^n P(X=n)\right| \leqslant \left|P(X=n)\right| = P(X=n),$$
- et enfin la famille $\big(P(X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (par σ-additivité de P, car les évènements $(X=n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux incompatibles),

donc par inégalité, on bien l'affirmation.
De même, la famille $\big(y^k P(Y=k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable.
Alors, par produit de sommes de familles sommables, on a

$$\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x^n P(X=n) y^k P(Y=k) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(X=n)\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} y^k P(Y=k)\right) = \mathrm{G}_X(x) \times \mathrm{G}_Y(y).$$

5) On sait, pour tout $u \in]-1,1[$,

$$\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}.$$

Or, pour tout $x \in [-1,1]$, comme $p \in]0,1[$, on a

$$|px| \leqslant p < 1,$$

on peut donc poser $u = px$ dans l'égalité précédente.
Donc, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$G(x) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(px)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{\ln(1-p)} \frac{p^n}{n} x^n.$$

Analyse : supposons que G soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\mathrm{G}_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n.$$

On a donc l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{\ln(1-p)} \frac{p^n}{n} x^n$$

pour tout $x \in [-1,1]$. Comme $[-1,1]$ est un intervalle non trivial contenant 0, l'unicité des coefficients donnent

$$\mathbb{P}(X=0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \frac{p^n}{n}.$$

Synthèse : réciproquement, $\mathbb{N}$ est dénombrable, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^n}{n} \geqslant 0$ (car $1-p \in]0,1[$), et

$$0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^n}{n} = \frac{\ln(1-p)}{\ln(1-p)} = 1,$$

donc il existe bien X variable aléatoire de loi donnée par

$$X(\Omega) \subset \mathbb{N}, \qquad P(X=0) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^n}{n}.$$

De plus, pour tout $x \in [-1,1]$, on a alors

$$\mathrm{G}_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^n}{n}x^n = -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(px)^n}{n} = \frac{\ln(1-px)}{\ln(1-p)} = G(x).$$

Donc G est la fonction génératrice de X.
6) On sait, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\mathrm{G}_Z(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Puis, pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$,

$$\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{E}(x^X y^Y) = \mathbb{E}(x^X y^{Z+X}) = \mathbb{E}\big((xy)^X y^Z\big).$$

Puis, X et Z sont indépendantes, donc toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Z, ce qui donne $(xy)^X$ et y^Z indépendantes.
De plus, on a $\left|(xy)^X\right| \leqslant 1$ et $\left|y^Z\right| \leqslant 1$ (car $|xy| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$), avec 1 qui est d'espérance finie, donc par inégalité, $(xy)^X$ et y^Z sont d'espérance finie.
Donc on a

$$\mathrm{G}_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{E}\big((xy)^X y^Z\big) = \mathbb{E}\big((xy)^X\big)\mathbb{E}\big(y^Z\big) = \mathrm{G}_X(xy)\mathrm{G}_Z(y) = G(xy)\mathrm{G}_Z(y) = \boxed{\frac{\ln(1-pxy)}{\ln(1-p)}\frac{py}{1-(1-p)y}}.$$

Exercice 29. Pour tout $t \in [-1,1]$, par linéarité de l'espérance (et car on sait que t^X a une espérance finie),

$$\mathrm{G}_{X+1}(t) = \mathbb{E}\big(t^{X+1}\big) = \mathbb{E}\big(t \cdot t^X\big) = t\mathbb{E}\big(t^X\big) = \boxed{t\mathrm{G}_X(t)}.$$

Pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\mathrm{G}_{2X}(t) = \mathbb{E}\big(t^{2X}\big) = \mathbb{E}\big((t^2)^X\big) = \boxed{\mathrm{G}_X(t^2)}.$$

Une démonstration à partir des sommes : pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\mathrm{G}_{X+1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X+1=n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n-1)t^n \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=-1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)t^{k+1} = t\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k = \boxed{t\mathrm{G}_X(t)}$$

(en utilisant que $\mathbb{P}(X=-1) = 0$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}$).
Pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\mathrm{G}_{2X}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(2X=n)t^n = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n=2k \text{ pair}}}\mathbb{P}(2X=n)t^n + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n=2k+1 \text{ impair}}}\mathbb{P}(2X=n)t^n = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(2X=2k)t^{2k} + 0$$

(car $(2X = 2k+1) = \varnothing$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$), et donc

$$\boxed{\mathrm{G}_{2X}(t) = \mathrm{G}_X(t^2)}.$$