TD16 - Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et ψ, ψ_1, $\psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \phi(x^2y + xy^3)$
2. $g(x,y) = \psi\big(\cos(xy), ye^x\big)$
3. $h(x,y) = \big(\psi_1\big(x^2, \phi(xy)\big), \psi_2(x^2y, y^2e^x)\big)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$

1. La fonction f possède-t-elle en $(0,0)$ des dérivées partielles ?
2. Plus généralement, pour $h \in \mathbb{R}^2$ non nul, est-ce que f a une dérivée en $(0,0)$ selon h ?
3. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Vérifier que f est continue en $(0,0)$.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $g(r,\theta) = f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. On pose :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_1^2(f) + \partial_2^2(f).$$

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer $\Delta(f)$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 6. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω convexe telles que : pour tout $(x,y,z) \in \Omega$,

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + y + z$
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = y + z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y + z$.

Exercice 7. À l'aide du changement de variable $x = u - v$ et $y = v$, trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Exercice 8. Soit U l'ouvert $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\big\}$. À l'aide d'un passage en coordonnées polaires trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exercice 9. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la restriction de f à toute droite contenant $(0,0)$ atteint un minimum strict en 0 mais que f n'atteint pas d'extremum en $(0,0)$.

Exercice 10. Montrer que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition, puis étudier les extrema locaux :

1. $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$
2. $g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$
3. $\ell : (x, y) \mapsto xy \ln(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$

Exercice 11. Déterminer les extrema locaux des fonctions qui suivent :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par : $(x, y, z) \mapsto x^2 + y - 2z + 8xyz$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par : $(x, y, z) \mapsto x^4 + 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 2yz + 8z + 2y - 1$.

Exercice 12. Pour $n \geqslant 2$ donné, soit $f : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles premières.
2. Montrer que f admet un unique point critique $A = (a_1, \ldots, a_n)$ que l'on déterminera.
3. (a) Déterminer la matrice hessienne de f en A en fonction de la matrice $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   (b) Déterminer $\mathrm{rg}(J)$ et calculer JU où $U \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients égaux à 1. En déduire $\mathrm{Sp}(J)$.
   (c) Montrer que f admet en A un extremum local dont on précisera la nature et la valeur.
   (d) Vérifier que l'extremum précédent est global.

Exercice 13. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1$.

1. Déterminer le point critique a de f.
2. Quel est le signe de $q(h_1, h_2) = 2h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2$? (*On pourra transformer l'expression à l'aide de l'identité remarquable* $a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$).
3. Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. En considérant la fonction $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + th)$, montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$f(a + h) = f(a) + \langle \vec{\nabla} f(a + \theta h), h\rangle$$
   (c'est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$). En déduire que f possède un minimum global strict en a.

Exercice 14. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + xy + x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$.

1. Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum global sur $[0, 1]^2$.
2. Les déterminer.

Exercice 15. Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$ et $f : (x, y) \in D \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et B un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est continue sur D. En déduire l'existence d'un maximum global et d'un minimum global de f sur D.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B, et étudier ses points critiques sur B. En déduire l'un de ses extremums globaux.
4. En faisant l'étude sur le bord de D, déterminer l'autre (ou les autres) extremum global de f.

Exercice 16 (maximum de vraisemblance)**.**

1. Une urne contient une proportion p de boules blanches, $p' = 1 - p$ de boules noires, avec $p \in]0, 1[$.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise dans cette urne. Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, $n_1 + n_2 = n$.
   Quelle est la probabilité d'obtenir n_1 boules blanches (et n_2 noires) ? *On note $f(p)$ cette probabilité.*
   Pour quelle(s) valeur(s) de p cette probabilité est-elle maximale ?
2. On effectue à présent n tirages successifs d'une boule avec remise, dans une urne contenant des boules de k couleurs différentes (avec $k \geqslant 2$), en proportion p_1, p_2, …, p_k, telle que $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $p_i \in]0, 1[$. $(n_1, \ldots, n_k)$ est un k-uplet d'entiers strictement positifs dont la somme vaut n.

(a) Quelle est la probabilité $f(p_1, \dots, p_k)$ d'obtenir la répartition $(n_1, \dots, n_k)$ en n tirages ?

(b) On étend f à $F = [0,1]^k \cap \left\{ (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right\}$ par la même formule. Justifier que f a un maximum global a sur F, et que ses coordonnées sont toutes dans $]0,1[$.

(c) Soit l'ouvert $\Omega =]0,1[^{k-1} \cap \left\{ (x_1, \dots, x_{k-1}) : \sum_{i=1}^{k-1} x_i < 1 \right\}$ de $\mathbb{R}^{k-1}$, et H la fonction

$$H : (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega \mapsto \ln\big(f(x_1, \dots, x_{k-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{k-1})\big).$$

Montrer que si $a = (a_1, \dots, a_k)$ est un maximum global de f sur F, alors $(a_1, \dots, a_{k-1})$ est un maximum global de H sur Ω.

(d) Déterminer les points critiques de H sur Ω. Conclusion ?

Exercice 17 (CCP 2011 Officiel de la Taupe)**.**

1. Montrer que l'ensemble E_a des applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(tx, ty, tz) = t^a . f(x,y,z)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

2. Montrer que, si $f \in E_a$ est $\mathcal{C}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in E_{a-1}$.
3. Montrer que pour tout $f \in E_0$, $f(x,y,z) = f(0,0,0)$. Que peut-on en déduire sur E_0 ?
4. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = af(x,y,z).$$

Montrer que g, donnée par $g(t) = f(tx, ty, tz) - t^a . f(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $tg' = ag$. En déduire que $f \in E_a$.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18 (CCP 2009 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

(on pourra utiliser le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$).

Exercice 19 (CCP 2014 (ODLT) - exo 2)**.** Trouver les extrema, s'ils existent, de $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - y$

Solutions

Exercice 1.

1. L'application
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y + xy^3 \in \mathbb{R}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. De plus l'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2xy + y^3)\phi'(x^2y + xy^3)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + 3xy^2)\phi'(x^2y + xy^3)}$$

2. Les applications
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \in \mathbb{R}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.
Puis, les fonctions cos et exp sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, les fonctions
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \cos(xy) \qquad \text{et} \qquad (x, y) \mapsto e^x$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Puis, par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction
$$(x, y) \mapsto ye^x$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Puis, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc par composition (règle de la chaîne), la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -y\sin(xy)\frac{\partial \psi}{\partial x}(\cos(xy), ye^x) + ye^x\frac{\partial \psi}{\partial y}(\cos(xy), ye^x)} \text{ et } \boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -x\sin(xy)\frac{\partial \psi}{\partial x}(\cos(xy), ye^x) + e^x\frac{\partial \psi}{\partial y}}$$

3. Les applications
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \in \mathbb{R}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y \in \mathbb{R}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 \in \mathbb{R}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 \in \mathbb{R}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
et
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.
Puis, les fonctions exp et ϕ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, les fonctions
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^x \qquad \text{et} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \phi(xy)$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Alors, par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, l'application
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2e^x$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Comme les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, par composition (règle de la chaîne), les applications
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \psi_1\big(x^2, \phi(xy)\big) \qquad \text{et} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \psi_2(x^2y, y^2e^x)$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Les fonctions coordonnées de h sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Puis, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \left(2x\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x^2, \phi(xy)) + y\phi'(xy)\frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x^2, \phi(xy)), 2xy\frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x^2y, y^2e^x) + y^2e^x\frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x^2y, y^2e^x)\right)}$$
$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \left(x\phi'(xy)\frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x^2, \phi(xy)), x^2\frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x^2y, y^2e^x) + 2ye^x\frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x^2y, y^2e^x)\right)}$$

Exercice 2.

1. • On a
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h-0}=0\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0,$$
donc la fonction f a une dérivée partielle suivant la première variable en 0, et
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}.$$
• On a
$$\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h-0}=0\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0,$$
donc la fonction f a une dérivée partielle suivant la deuxième variable en 0, et
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}.$$

2. Soit $h=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $h\neq(0,0)$.
• Si $b\neq 0$, on a
$$\frac{f\big(th\big)-f(0,0)}{t-0}=\frac{t^2a^2tb}{t(t^4a^4+t^2b^2)}=\frac{a^2b}{t^2a^4+b^2}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\frac{a^2}{b}.$$
Donc la fonction f a une dérivée en $(0,0)$ selon h, qui vaut
$$\boxed{D_hf(0,0)=\frac{a^2}{b}}.$$
• Si $b=0$, alors $a\neq 0$ et on a
$$\frac{f\big(th\big)-f(0,0)}{t-0}=0\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0.$$
Donc la fonction f a une dérivée en $(0,0)$ selon h, qui vaut
$$\boxed{D_hf(0,0)=0}.$$

3. NON. On a vu « qu'on est dérivable (donc continue) en $(0,0)$ si on se déplace sur les droites ». Mais si on se déplace sur une parabole bien choisie, c'est faux : on a
$$f(0,\mathrm{e})=0\underset{\mathrm{e}\to 0}{\longrightarrow}0\qquad et\qquad f(\sqrt{\mathrm{e}},\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}^2}=\frac{1}{2}\underset{\mathrm{e}\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\neq 0.$$
Donc la fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$ (si la limite existait, alors
$$\lim_{\mathrm{e}\to 0}f(0,\mathrm{e})\qquad\text{et}\qquad\lim_{\mathrm{e}\to 0}f(\sqrt{\mathrm{e}},\mathrm{e})$$
devraient être égales (et égales à cette limite)...), donc la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3.

1. La fonction f est continue sur (l'ouvert) $\mathbb{R}^2\backslash\big\{(0,0)\big\}$ comme quotient de deux polynômes (donc continus) dont le dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\big\{(0,0)\big\}$.
Étude en $(0,0)$: On a pour tout (x,y) :
$$0\leqslant x^4+y^4\leqslant x^4+y^4+2x^2y^2=(x^2+y^2)^2.$$
Donc, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\big\{(0,0)\big\}$,
$$0\leqslant\big|f(x,y)\big|\leqslant(x^2+y^2)=\big\|(x,y)-(0,0)\big\|_2^2\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$$

(en effet, dire $(x,y) \to (0,0)$, c'est par définition dire $\|(x,y)-(0,0)\| \to 0$ pour n'importe quelle norme (car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie), en particulier pour la norme $\|.\|_2$).
Donc le théorème des gendarmes donne

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0),$$

autrement dit, la fonction f est continue en $(0,0)$.
Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. On peut aussi passer en polaire : pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta) \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

alors

$$f(x,y) = r^2\big(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)\big), \qquad \text{et donc} \qquad 0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant 2r^2,$$

or $(x,y) \to (0,0)$ équivaut à $r \to 0$ (car $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \|(x,y)-(0,0)\|_2$), et donc par le théorème des gendarmes,

$$f(x,y) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$$

et on retrouve que la fonction f est continue en $(0,0)$.

2. • La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur (l'ouvert) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme quotient de deux polynômes (donc de classe $\mathcal{C}^1$) dont le dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
• Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{f\big((0,0)+t(1,0)\big)-f(0,0)}{t} = t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

• Calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\frac{f\big((0,0)+t(0,1)\big)-f(0,0)}{t} = t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3(x^2+y^2)-2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

donc (en réutilisant l'inégalité trouvée à la première question) :

$$0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \frac{4x^2|x|}{x^2+y^2} + |2x| \leqslant |6x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

(car $x^2 \leqslant x^2+y^2$). Donc le théorème des gendarmes donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

autrement dit, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

Remarque. Là aussi, on peut passer en polaire si on préfère (c'est plus simple à manipuler), comme illustré ci-dessous.

- Pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$
donc en posant $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4r\sin^3(\theta) - 2r\sin(\theta)\big(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)\big),$$
et donc, par inégalité triangulaire (et car $|\cos| \leqslant 1$, $|\sin| \leqslant 1$) :
$$0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 4r + 2r \times 2 = 8r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Donc le théorème des gendarmes donne
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$
(car « $(x,y) \to (0,0)$ » est la même chose que « $r \to 0$ »), autrement dit, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.
- Donc, par définition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. 1) On passe en polaire : pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose
$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta) \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$
alors :
$$f(x,y) = r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\big(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\big),$$
donc, par inégalité triangulaire (et car $|\cos| \leqslant 1$, $|\sin| \leqslant 1$) :
$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant 2r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
donc
$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$$
(car $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \big\|(x,y)-(0,0)\big\|_2$, donc « $(x,y) \to (0,0)$ » est la même chose que « $r \to 0$ »), donc la fonction f est continue en $(0,0)$.
2a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur (l'ouvert) $\mathbb{R}^2\backslash\big\{(0,0)\big\}$ comme quotient de deux polynômes (donc de classe $\mathcal{C}^1$) dont le dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
- Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:
$$\frac{f\big((0,0)+t(1,0)\big) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$
- Calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:
$$\frac{f\big((0,0)+t(0,1)\big) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Donc
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$
- Pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)xy}{(x^2+y^2)^2},$$
donc en passant en coordonnées polaires (comme à la première question), on a par inégalité triangulaire (et car $|\cos| \leqslant 1$, $|\sin| \leqslant 1$) :
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 8r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$
Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(-3xy^2+x^3)(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)xy}{(x^2+y^2)^2},$$
donc en passant en coordonnées polaires, on a par inégalité triangulaire (et car $|\cos| \leqslant 1$, $|\sin| \leqslant 1$) :
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 8r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
donc
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$
Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

• Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = \boxed{1}.$$
Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} -\frac{t}{t} = \boxed{-1}.$$
Donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$
contredit la conclusion du théorème de Schwarz. On peut en conclure (en contraposant le théorème de Schwarz) que la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$.

Exercice 5.

1. Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant le théorème de Schwarz

★ $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$

★ $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$

★ $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$

★ $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = & -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(r\cos(\theta\\ & -2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)\end{aligned}$$

Remarque. Pour plus de lisibilité, on peut éviter d'écrire les arguments des fonctions :
$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

2. Donc, afin d'exploiter la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on calcule :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\frac{\partial g}{\partial r},$$

ce qui donne

$$\boxed{\Delta(f) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}}.$$

Exercice 6. Sur un ouvert quelconque, on peut avoir $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, bien que $f(x, y, z)$ dépende de x ! L'hypothèse « convexe » est là pour éliminer ce problème (car les raisonnements fait s'appliquent en se ramenant à l'étude de la fonction sur un segment, ce qui est possible car le segment reste ici inclus dans Ω par convexité).
1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ sur } \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists g : \forall (x, y, z) \in \Omega : f(x, y, z) = g(y, z),$$

g étant une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ (défini sur l'ensemble des $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ avec $(x, y, z) \in \Omega$, c'est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$...) puisque l'on veut f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Montrons ceci à l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse.
Analyse : en effet, pour une fonction f qui vérifie l'équation, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ et $(x_1, y_0, z_0) \in \Omega$ fixés, si l'on considère

$$\phi : t \in [0, 1] \mapsto f\big(tx_0 + (1-t)x_1, y_0, z_0\big)$$

(bien défini car Ω est convexe et car

$$\big(tx_0 + (1-t)x_1, y_0, z_0\big) = t \cdot (x_0, y_0, z_0) + (1-t) \cdot (x_1, y_0, z_0)$$

avec $t \in [0, 1]$, ce qui assure que $\big(tx_0 + (1-t)x_1, y_0, z_0\big)$ est un élément d'un segment entre deux points de Ω), alors la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ par la règle de la chaîne, et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\phi'(t) = (x_0 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}\big(tx_0 + (1-t)x_1, y_0, z_0\big) = 0,$$

donc la fonction ϕ est constante sur **l'intervalle** $[0, 1]$. Donc

$$f(x_1, y_0, z_0) = \phi(0) = \phi(1) = f(x_0, y_0, z_0).$$

Donc la fonction f est constante sur $\big\{(x, y_0, z_0) \text{ tel que } x \in \mathbb{R} \text{ et } (x, y_0, z_0) \in U\big\}$. On note alors cette valeur $g(y_0, z_0)$. g est alors $\mathcal{C}^1$, car f l'est (pour le justifier proprement, cela nécessiterait d'exploiter la définition d'ouvert, et le fait qu'une boule ouverte est un convexe...).
Synthèse : il est direct que si f ne dépend pas de x, alors $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur Ω...
2) La fonction f vérifie l'équation si et seulement si f est de la forme

$$f : (x, y, z) \mapsto xy + \frac{y^2}{2} + zy + g(x, z),$$

g étant une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ (défini sur l'ensemble des $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ avec $(x, y, z) \in \Omega$, c'est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$...).
En effet, en considérant la fonction

$$\phi : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) - xy - \frac{y^2}{2} - zy$$

(de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω), on a :

$$f \text{ vérifie l'équation sur } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Omega,$$

et on se ramène à une situation similaire au premier cas (puisque Ω est convexe).
3) La fonction f vérifie l'équation si et seulement si f est de la forme

$$f : (x, y, z) \mapsto 3x + \frac{y^2}{2} + yz + \frac{z^2}{2} + C,$$

C étant une constante quelconque.
En effet, en considérant

$$\phi : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) - 3x - \frac{y^2}{2} - yz - \frac{z^2}{2}$$

(de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω), on a

$$f \text{ vérifie les trois équations sur } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ sur le convexe } \Omega,$$

ce qui est équivalent à

$$\phi = \text{constante}$$

d'après le cours.

Exercice 7. Pour tout $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases}.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut définir une fonction g de sorte que

$$« g(u, v) = f(x, y) ».$$

On pose donc

$$g : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u - v, v) \in \mathbb{R}.$$

Comme les fonctions

$$(u, v) \mapsto u - v \qquad \text{et} \qquad (u, v) \mapsto v$$

sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiales), par composition, la fonction g est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = g(x + y, y),$$

donc la règle de la chaîne donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$$

En appliquant à nouveau la règle de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,$$

Remarquons que la fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v) = (x + y, y) \in \mathbb{R}^2$$

est bijective (de bijection réciproque $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u - v, v) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$), donc

$$(x, y) \text{ parcourt } \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (u, v) \text{ parcourt } \mathbb{R}^2.$$

En réinjectant, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'EDP sur } \mathbb{R}^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = 0 \\ &\qquad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = 0 \text{ pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, on en déduit

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'EDP sur } \mathbb{R}^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ avec } \tfrac{\partial g}{\partial v} : (u,v) \mapsto \lambda(u) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } \mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ avec } g : (u,v) \mapsto \lambda(u)v + \mu(u). \end{aligned}$$

Comme on veut f et donc g de classe $\mathcal{C}^2$, on veut

$$\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

(car la fonction

$$\mu : u \mapsto g(u,0)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition, puis la fonction

$$\lambda : u \mapsto g(u,1) - \mu(u)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition puis soustraction). Ainsi

$$f \text{ est solution de l'EDP sur } \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } \mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ avec } \boxed{f : (x,y) \mapsto \lambda(x+y)y + \mu(x+y)}.$$

Exercice 8.
On veut passer en coordonnées polaires, donc écrire

$$\text{« } f(x,y) = g(r,\theta) \text{ »}$$

si (r,θ) sont les coordonnées polaires de (x,y).
Pour $(x,y) \in U$, on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $r > 0$ (car $r \geqslant \sqrt{x^2} = |x| = x > 0$ car $(x,y) \in U$) et on veut θ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}.$$

Comme $x > 0$ (car $(x,y) \in U$), on peut prendre

$$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Réciproquement, si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors pour tout $r > 0$,

$$(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \in U.$$

On peut donc noter $V = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et poser

$$g : (r,\theta) \in V \mapsto f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big),$$

ainsi si $(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$, on a bien

$$\text{« } f(x,y) = g(r,\theta) \text{ ».}$$

Puis, les fonctions

$$(r,\theta) \mapsto r\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad (r,\theta) \mapsto r\sin(\theta)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur V (par composition et produit...), donc pour f fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, par composition, on aura la fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur V, et par la règle de la chaîne : pour tout $(r,\theta) \in V$,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big), \qquad \text{soit} \qquad r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Puis, on a remarqué que, pour $(r,\theta) \in V$, on a $(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \in U$, et que réciproquement, pour tout $(x,y) \in U$, il existe $(r,\theta) \in V$ avec $(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \in U$. On en déduit que

$$\text{« } (x,y) \text{ parcourt } U \text{ »} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{« } (r,\theta) \text{ parcourt } V \text{ »}$$

(avec la relation $(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$, qui donne en particulier $\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$). Donc

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'EDP sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (x,y) \in U,\ x\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (r,\theta) \in V,\ r\tfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (r,\theta) \in V,\ \tfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \tfrac{\cos(\theta)}{r}. \end{aligned}$$

Posons alors

$$h : (r,\theta) \in V \mapsto g(r,\theta) - \cos(\theta)\ln(r).$$

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V (par opérations usuelles...), et pour tout $(r,\theta) \in V$, on a

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r}.$$

Ainsi (car $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est <u>convexe</u>), on a :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'EDP sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (r,\theta) \in V,\ \tfrac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } v \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right) \text{ (quelconque) avec } h : (r,\theta) \in V \mapsto v(\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } v \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right) \text{ (quelconque) avec } g : (r,\theta) \mapsto \cos(\theta)\ \ln(r) + v(\theta). \end{aligned}$$

Le programme officiel demande de s'arrêter ici. On peut cependant revenir facilement à f dans ce cas précis :
Soit $(r,\theta) \in V$, alors si on note $(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$, on a

$$x > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{x} = \tan(\theta).$$

Comme $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on conclut :

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'EDP sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } v \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right) \text{ (quelconque) avec} \\ &\qquad\qquad f : (x,y) \in U \mapsto \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + v \circ \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ (quelconque) avec } f : (x,y) \mapsto \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + w \end{aligned}$$

(car $v \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right) \mapsto w = v \circ \arctan \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est bijective, de bijection réciproque $w \mapsto w \circ \tan$).

Exercice 9.
★ Soit D une droite passant par $(0,0)$ et de vecteur directeur (a,b) avec $b \neq 0$: alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \in D \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists t \in \mathbb{R} : (x,y) = (0,0) + t(a,b).$$

On pose

$$\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto f\big((0,0) + t(a,b)\big) = (t^2a^2 - tb)(3t^2a^2 - tb) = 3t^4a^4 - 4t^3a^2b + t^2b^2.$$

Alors la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\phi'(0) = 0, \qquad \text{et} \qquad \phi''(0) = 2b^2 > 0.$$

Donc la fonction ϕ atteint un minimum strict en 0 (si c'est pas clair, faire le tableau de variations des fonctions ϕ et ϕ' au voisinage de 0 : $\phi''(0) > 0$ donne par continuité de ϕ'' en 0 que $\phi'' > 0$ sur un voisinage de 0 de la forme

$]-\mathrm{e},\mathrm{e}[$ avec $\mathrm{e}>0$, donc ϕ' est strictement croissante sur $]-\mathrm{e},\mathrm{e}[$, et comme $\phi'(0)=0$, c'est que $\phi'<0$ sur $]-\mathrm{e},0[$ et $\phi'>0$ sur $]0,\mathrm{e}[$, ce qui donne ϕ strictement décroissante sur $]-\mathrm{e},0]$ et strictement croissante sur $[0,\mathrm{e}[$, d'où l'affirmation). Donc la fonction f atteint un minimum strict sur $D_{(a,b)}$ en $(0,0)$.
Pour la droite $D_{(a,0)}$ avec $a\neq 0$, on pose alors

$$\phi : t\mapsto f\big((0,0)+t(a,0)\big) = 3t^4a^4,$$

et sous cette forme, il est direct que la fonction ϕ atteint un minimum strict en 0, donc la fonction f atteint bien un minimum strict sur $D_{(a,0)}$ en $(0,0)$.
★ Montrons que la fonction f n'atteint pas d'extremum en $(0,0)$: pour tout $\mathrm{e}>0$ (aussi proche que l'on veut de 0),

$$f(\mathrm{e},0) = 3\mathrm{e}^4 > 0 = f(0,0),$$

donc $(0,0)$ ne peut pas être un maximum local de f, et

$$f(\mathrm{e},2\mathrm{e}^2) = -\mathrm{e}^4 < 0 = f(0,0),$$

donc $(0,0)$ ne peut pas être un minimum local de f.
Donc f n'atteint pas de minimum en $(0,0)$.

Remarque. La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Puis, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = 3x^4-4x^2y+y^2,$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^3-8xy \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x^2+2y,$$

et

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 36x^2-8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$H = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{puis} \qquad \det(H)=0,$$

donc le cours ne permet pas de conclure quand à la nature de $(0,0)$.

Exercice 10. **1)** • La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Or, $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, donc un point extrémal de f sera un point critique.
• Or, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3-4(x-y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3+4(x-y),$$

donc

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x-y=x^3 \\ y^3=-x^3=(-x)^3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2x=x^3 \\ y=-x \end{cases}$$

(car la fonction $t\mapsto t^3$ est injective sur $\mathbb{R}$).
Donc la fonction f a trois points critiques :

$$(0,0), \qquad \big(\sqrt{2},-\sqrt{2}\big) \qquad \text{et} \qquad \big(-\sqrt{2},\sqrt{2}\big).$$

• Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la hessienne de f en (x,y) vaut

$$H_f(x,y = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}.$$

★ Donc

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{donc} \qquad \det\big(H_f(0,0)\big)=0,$$

donc le cours ne permet pas de conclure quand à la nature de $(0,0)$.
Mais, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (aussi petit que l'on veut),

$$f(x,x) = 2x^4 > 0 = f(0,0),$$

donc $(0,0)$ ne peut pas être un maximum local.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$ (aussi petit que l'on veut),

$$f(0,y) = y^4 - 2y^2 < 0 = f(0,0),$$

donc $(0,0)$ ne peut pas être un minimum local.
Donc $(0,0)$ est un point col (ce n'est pas un extremum).
★ Puis,

$$H := H_f\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \det(H) = 384 > 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(H) = 40 > 0,$$

comme on est sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f atteint un minimum local strict en $\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big)$.
★ Comme, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(-x,-y) = f(x,y),$$

il en est de même pour $\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$.
2)• La fonction g est le quotient de deux fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert $U = \big(\mathbb{R}_+^*\big)^2$, donc la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Un point extrémal de g sera donc un point critique.
• Pour tout $(x,y) \in U$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y-x^2)}{(1+x)^2(1+y)(x+y)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x-y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2},$$

donc

$$(x,y) \in U \text{ est un point critique de } g \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y(y-x^2) = 0 \\ x(x-y^2) = 0 \end{cases}$$

et comme on se place sur U, $x \neq 0$ et $y \neq 0$, donc

$$(x,y) \in U \text{ est un point critique de } g \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 1$$

(car on est sur U).
• Pour tout $(x,y) \in U$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y}{1+y} \frac{-2x(1+x)^2(x+y)^2 - (y-x^2)\big(2(1+x)(x+y)^2 + 2(1+x)^2(x+y)\big)}{(1+x)^4(x+y)^4}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{(1+x)^2} \frac{(2y-x^2)(1+y)(x+y)^2 - y(y-x^2)\big((x+y)^2 + 2(1+y)(x+y)\big)}{(1+y)^2(x+y)^4}$$

donc

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = \frac{1}{2}\frac{-32-0}{4^4} = -\frac{1}{16} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{1}{4}\frac{8-0}{2^6} = \frac{1}{32}.$$

Puis, le théorème de Schwarz donne

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{1}{32}.$$

Enfin, remarquons que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$. Alors

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = -\frac{1}{16}.$$

Donc

$$H := H_g(1,1) = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{puis} \qquad \det(H) = \frac{1}{32^2}3 > 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(H) = -\frac{4}{32} < 0.$$

comme on est sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que g atteint en $(1,1)$ un maximum local strict.

3) • Sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, la fonction

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$$

est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$, à valeurs strictement positives. Comme la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, la fonction

$$(x,y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V. Puis, par produit avec un polynôme, la fonction ℓ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V. Un point extrémal de ℓ sera donc un point critique.

• Pour tout $(x,y) \in V$,

$$\frac{\partial \ell}{\partial x}(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + xy\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \ell}{\partial y}(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + xy\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Donc

$$(x,y) \in V \text{ est un point critique de } \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = -2x^2y \\ x(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = -2y^2x \end{cases} \quad \underset{L_3 \leftarrow yL_2 - xL_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} y(x^2+y^2)\ln(x^2+y \\ x(x^2+y^2)\ln(x^2+y \\ 2xy(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$, alors L_1 devient $y^3 \ln(y^2) = 0$, donc $\ln(y^2) = 0$ (car $(x,y) \neq (0,0)$), donc

$$y = \pm 1.$$

Si $y = 0$, de même,

$$x = \pm 1.$$

Si $x = y$, on a $2x^3 \ln(2x^2) = -2x^3$, donc

$$x = y = \pm\sqrt{\frac{e^{-1}}{2}}.$$

Si $x = -y$, on a la même équation que pour $x = y$.
Réciproquement, ces valeurs sont bien solutions du système précédent.
Donc la fonction ℓ a 6 points critiques.

• Comme, pour tout $(x,y) \in V$, on a

$$(-x,-y) \in V \qquad \text{et} \qquad \ell(-x,-y) = \ell(x,y)$$

alors

$$(0,1) \text{ est de même nature que } (0,-1), \qquad (1,0) \text{ est de même nature que } (-1,0),$$

et

$$\left(\sqrt{\tfrac{e^{-1}}{2}}, \sqrt{\tfrac{e^{-1}}{2}}\right) \text{ est de même nature que } \left(-\sqrt{\tfrac{e^{-1}}{2}}, -\sqrt{\tfrac{e^{-1}}{2}}\right)$$

(en tant qu'extremum ou non-extremum).
Enfin, pour tout $(x,y) \in V$, on a

$$(y,x) \in V \qquad \text{et} \qquad \ell(x,y) = \ell(y,x),$$

donc

$$(1,0) \text{ est de même nature que } (0,1)$$

(en tant qu'extremum ou non-extremum).
On a donc plus que deux points à regarder.
• Pour tout $(x, y) \in V$,

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 2x^2y2x}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial y \partial x}(x, y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Puis, le théorème de Schwarz donne

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \ell}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Enfin, pour tout $(x, y) \in V$, on a $\ell(x, y) = \ell(y, x)$, donc

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(y, x).$$

★ Donc

$$H = H_\ell(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{donc} \qquad \det(H) = -4 < 0,$$

donc $(1, 0)$ n'est pas un extremum de f.

Remarque. En effet, pour tout $y \in]0, +\infty[$ (aussi petit que l'on veut),

$$\ell(1, y) = y \ln(1+y^2) > 0 = \ell(1, 0),$$

donc $(1, 0)$ n'est pas un maximum local de ℓ.
Pour tout $y \in]-\infty, 0[$ (aussi petit que l'on veut),

$$\ell(1, y) = y \ln(1+y^2) < 0 = \ell(1, 0),$$

donc $(1, 0)$ n'est pas un minimum local de ℓ.

★ Puis

$$H = H_\ell\left(\sqrt{\frac{e^{-1}}{2}}, \sqrt{\frac{e^{-1}}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \det(H) = 3 > 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(H) = 4 > 0.$$

Remarque. On peut remarquer que $\frac{\partial^2 \ell}{\partial x \partial y}(x, x)$ et $\frac{\partial^2 \ell}{\partial y^2}(x, x)$ se calculent bien, et remplacer ensuite x par $\sqrt{\frac{e^{-1}}{2}}$, le calcul est ainsi plus facile...

Donc $\left(\sqrt{\frac{e^{-1}}{2}}, \sqrt{\frac{e^{-1}}{2}}\right)$ est un minimum local strict de h.

Exercice 11. 1) La fonction f est polynomiale sur $\mathbb{R}^3$, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Donc, si la fonction f a un extremum en un point, ce point est un point critique de f (car $\mathbb{R}^3$ est un ouvert).
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 8yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 1 + 8xz \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2 + 8xy.$$

Puis, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla f(x, y, z) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x + 8yz = 0 \\ 1 + 8xz = 0 \\ -2 + 8xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 8\left(\frac{1}{4x}\right)\left(-\frac{1}{8x}\right) = 0 \\ z = -\frac{1}{8x} \\ y = \frac{1}{4x} \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = \frac{1}{8} \\ z = -\frac{1}{8x} \\ y = \frac{1}{4x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{8x} \\ y = \frac{1}{4x} \end{cases}$$

Donc la fonction f a un unique point critique :

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

Puis, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 8z & 8y \\ 8z & 0 & 8x \\ 8y & 8x & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$H = H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors

$$^tXHX = -2 < 0,$$

et si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors

$$^tXHX = 2 > 0.$$

Donc H n'est ni positive, ni négative, donc f n'a pas d'extremum local en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Remarque. Autre façon : on a

$$\chi_H = X^3 - 2X^2 - 36X + 96, \qquad \text{donc} \qquad \chi'_H = 3X^2 - 4X - 36$$

donc $\alpha = \frac{2-4\sqrt{7}}{3}$ et $\beta = \frac{2+4\sqrt{7}}{3}$ sont racines de χ'_H. Le tableau de variations de χ_H est alors

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$\chi'_H(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\chi_H(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	>0	$\searrow$	<0	$\nearrow$	$+\infty$

.

$\chi_H(\alpha) < 0$ et $\chi_H(\beta) > 0$ peuvent s'obtenir à la calculatrice, ou alors en faisant un calcul exact à la main, qui donne

$$\chi_H(\alpha) = \frac{8}{27}\left(241 + 112\sqrt{7}\right) > 0 \qquad \text{et} \qquad \chi_H(\beta) = \frac{8}{27}\left(241 - 112\sqrt{7}\right) < 0$$

(pour la dernière inégalité, c'est directe une fois que l'on remarque $\sqrt{7} > 2,5$).
Comme χ_H est continue sur $]-\infty, \alpha]$, $\chi_H(\alpha) > 0$ et $\lim\limits_{-\infty} \chi_H = -\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires donne qu'il existe $\lambda \in]-\infty, \alpha]$ racine de χ_H, donc

$$\lambda \leqslant \alpha < 0.$$

Comme χ_H est continue sur $[\beta, +\infty[$, $\chi_H(\beta) < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \chi_H = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires donne qu'il existe $\mu \in [\beta, +\infty[$ racine de χ_H, donc

$$\mu \geqslant \beta > 0.$$

Donc H a une valeur propre strictement négative, une valeur propre strictement positive, et H est symétrique réelle. Donc H n'est ni positive, ni négative, donc f n'a pas d'extremum local en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Donc f n'a pas d'extremum local
2) La fonction f est polynomiale sur $\mathbb{R}^3$, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Donc, si la fonction f a un extremum en un point, ce point est un point critique de f (car $\mathbb{R}^3$ est un ouvert).
Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3 + 4x - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2x + 2z + 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 8z + 2y + 8.$$

Puis, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla f(x,y,z) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 + 4x - 2y = 0 \\ 2y - 2x + 2z + 2 = 0 \\ 8z + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 4x^3 + 4x - 2y = 0 \\ 6y - 8x = 0 \\ 8z + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 + 4x - \frac{8}{3}x = 0 \\ 6y - 8x = 0 \\ 8z + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\Big(\underbrace{4x^2 + \frac{4}{3}}_{>0}\Big) = 0 \\ 6y - 8x = 0 \\ 8z + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4}{3}x = 0 \\ z = -1 - \frac{y}{4} = -1 \end{cases}$$

Donc la fonction f a un unique point critique :

$$(0, 0, -1).$$

Puis, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

donc

$$H = H_f(0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$\chi_H = X^3 - 14X^2 + 48X - 16, \qquad \chi_H' = 3X^2 - 28X + 48.$$

Donc, pour tout $x \in]-\infty, 0]$,

$$\chi_H'(x) = 3\underbrace{x^2}_{\geqslant 0} + 28\underbrace{(-x)}_{\geqslant 0} + 48 \geqslant 48 > 0,$$

donc la fonction polynomiale χ_H est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. Comme $\chi_H(0) = -16 < 0$, on en déduit

$$\chi_H \leqslant \chi_H(0) < 0$$

sur $]-\infty, 0]$. Donc χ_H n'a aucune racine réelle négative.
Donc, les racines réelles de χ_H sont dans $\mathbb{R}_+^*$. Or, la matrice H est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, et donc toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathbb{R}_+^*$ par ce qui précède.
Donc $H \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$, et donc f atteint un minimum local strict en $(0, 0, -1)$, et c'est le seul extremum local de f.

Exercice 12. 1) La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$.
Puis, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 2x_i - 1 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k}.$$

2) Analyse : soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, supposons qu'il soit un point critique de la fonction f. Notons alors $\alpha=\sum_{k=1}^{n}x_k$.
Alors, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a

$$0=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=2x_i-1+2\sum_{k=1}^{n}x_k,\qquad\text{donc}\qquad x_i=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{2}-\alpha.$$

Donc toutes les coordonnées du point $(x_1,\dots,x_n)$ sont égales à $\frac{1}{2}-\alpha$. Puis,

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)=\frac{n}{2}-n\alpha,$$

et donc

$$(n+1)\alpha=\frac{n}{2},\qquad\text{soit}\qquad\alpha=\frac{n}{2n+2},\qquad\text{puis}\qquad\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2n+2}$$

Donc, si la fonction f a un point critique, il est unique, et c'est

$$\left(\frac{1}{2n+2},\dots,\frac{1}{2n+2}\right).$$

Synthèse : pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2n+2},\dots,\frac{1}{2n+2}\right)=2\frac{1}{2n+2}-1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2}=\frac{2}{2n+2}-\frac{2n+2}{2n+2}+2\frac{n}{2n+2}=0.$$

Donc $\left(\frac{1}{2n+2},\dots,\frac{1}{2n+2}\right)$ est bien un point critique de la fonction f.
Conclusion : la fonction f a un et un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$, à savoir

$$\boxed{A=\left(\frac{1}{2n+2},\dots,\frac{1}{2n+2}\right)}.$$

3a) Pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1,\dots,x_n)=2+2=4,$$

et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, si $j\neq i$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=2.$$

Donc

$$H_f(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}4&2&\dots&2\\2&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&2\\2&\dots&2&4\end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$H_f(A)=\begin{pmatrix}4&2&\dots&2\\2&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&2\\2&\dots&2&4\end{pmatrix}=\boxed{2I_n+2J}.$$

3b) • La matrice J est non nulle, donc

$$\mathrm{rg}(J)\geqslant 1.$$

Puis, toutes les colonnes de J sont égales entre elles, donc

$$\mathrm{rg}(J)\leqslant 1.$$

Par double inégalité,
$$\boxed{\mathrm{rg}(J) = 1}.$$

• Comme la matrice J est de taille n avec $n \geqslant 2$, et que $\mathrm{rg}(J) < n$, on en déduit que 0 est valeur propre de J, et le théorème du rang donne alors
$$\dim(E_0) = n - \mathrm{rg}(J) = n - 1.$$

• Enfin, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice-colonne non nulle, et
$$JU = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
(la somme des coefficients de chaque ligne de J fait toujours n), donc n est une valeur propre de J et U en est un vecteur propre associé. En particulier,
$$\dim(E_n) \geqslant 1.$$

• La matrice J est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Donc
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(J)} \dim(E_\lambda) = n.$$

Or, on a vu que $0 \in \mathrm{Sp}(J)$ et $n \in \mathrm{Sp}(J)$, donc (comme une dimension est positive)
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(J)} \dim(E_\lambda) \geqslant \dim(E_0) + \dim(E_n) = n - 1 + \dim(E_n) \geqslant n.$$

Pour que l'égalité soit possible, cela force $\dim(E_n) = 1$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(J) \backslash \{0, n\}$,
$$\dim(E_\lambda) = 0.$$

Mais la dimension d'un espace propre n'est jamais nul, donc $\mathrm{Sp}(J) \backslash \{0, n\} = \varnothing$.
Donc
$$\boxed{\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}}.$$

3c) Comme la matrice J est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$, $\dim(E_0) = n - 1$ et $\dim(E_n) = 1$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec
$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$$
(*on peut même supposer P orthogonale par le théorème spectral, mais on ne s'en servira pas ici*). Alors
$$P^{-1}H_f(A)P = P^{-1}\big(2I_n + 2J\big)P = 2P^{-1}I_nP + 2P^{-1}JP = 2I_n + 2\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0) = \mathrm{diag}(2 + 2n, 2, \ldots, 2).$$

Donc $H_f(A)$ est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(2+2n, 2, \ldots, 2)$, donc ces deux matrices ont le même spectre, donc
$$\mathrm{Sp}\big(H_f(A)\big) = \{2, 2 + 2n\}.$$

La matrice $H_f(A)$ est alors symétrique réelle, ses valeurs propres sont toutes strictement positives (car $2 > 0$ et $2 + 2n > 0$), donc $H_f(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et donc
$$\boxed{f \text{ atteint un minimum local strict en } A},$$

et ce minimum vaut

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2n+2}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2} \\ &= \tfrac{n}{(2n+2)^2}+\tfrac{n^2}{(2n+2)^2}-\tfrac{n}{2n+2} \\ &= \tfrac{n+n^2-n(2n+2)}{(2n+2)^2} \\ &= n\tfrac{-n-1}{(2n+2)^2} \\ &= \boxed{-\frac{n}{4(n+1)}} \end{aligned}$$

3d) Soit $u=(u_1,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ non nul, notons $U=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons

$$\phi : t\in[0,1]\mapsto f(A+tu)\in\mathbb{R}.$$

Alors, par composition, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, et la règle de la chaîne donne, pour tout $t\in[0,1]$,

$$\phi'(t)=\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(A+tu)\qquad\text{et}\qquad \phi''(t)=\sum_{i=1}^{n}u_i\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(A+tu)={}^tUH_f(A+tu)U$$

(en identifiant $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$).
Or, on a vu

$$H_f(A+tu)=H_f(A)\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),$$

donc puisque $U\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $U\neq 0_{n,1}$, on a pour tout $t\in[0,1]$,

$$\phi''(t)={}^tUH_f(A+tu)U>0.$$

La formule de Taylor avec reste intégral donne alors

$$f(A+u)-f(A)=\phi(1)-\phi(0)=\phi'(0)+\int_0^1(1-t)\phi''(t)\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)\phi''(t)\mathrm{d}t,$$

car

$$\phi'(0)=\sum_{i=1}^{n}u_i\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)}_{=0}=0$$

(puisque A est un point critique de f). Puis, la fonction

$$h : t\in[0,1]\mapsto(1-t)\phi''(t)\in\mathbb{R}$$

est continue sur $[0,1]$ (car la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$), positive et n'est pas la fonction nulle, car pour tout $t\in[0,1[$, $1-t>0$ et $\phi''(t)>0$, donc

$$h(t)>0$$

(par produit), et

$$h(1)=0.$$

Enfin, « $0<1$ », donc « les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens ». Donc, par stricte positivité de l'intégrale,

$$\int_0^1(1-t)\phi''(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t>0.$$

Donc, pour tout $u\in\mathbb{R}^n$ non nul, on a

$$f(A+u)>f(A).$$

Donc

$$\boxed{f \text{ atteint un minimum global strict en } A}.$$

Exercice 13. 1) La fonction f est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Puis, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } f \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \\
&\Leftrightarrow \quad (4x - 2y + 2, -2x + 2y - 2) = (0,0) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,1)
\end{aligned}$$

Donc la fonction f a un seul point critique :

$$\boxed{a = (0,1)}.$$

2) Pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$q(h_1, h_2) = 2h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 = h_1^2 + (h_1 - h_2)^2 > 0$$

si $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ (et nul en $(0,0)$).

3) Notons

$$\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + th),$$

par composition la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et par application du théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\phi(1) - \phi(0) = (1-0)\phi'(\theta) = \phi'(\theta).$$

Puis,

$$\phi(1) - \phi(0) = f(a+h) - f(a), \qquad \text{et} \qquad \phi'(\theta) = \langle \vec{\nabla} f(a + \theta h), h \rangle.$$

Enfin,

$$\langle \vec{\nabla} f(a + \theta h), h \rangle = \langle \theta(4h_1 - 2h_2, -2h_1 + 2h_2), (h_1, h_2) \rangle = 2\theta\big(2h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2\big) = 2\theta q(h_1, h_2) \geqslant 0,$$

et

$$q(h_1, h_2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad h_1 = h_2 = 0.$$

Donc

$$f(a+h) \geqslant f(a), \qquad \text{et} \qquad f(a+h) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad h = 0.$$

Donc a est un minimum **global** strict.

Exercice 14.

1. • L'application f est continue (car polynomiale) sur $\mathbb{R}^2$, $[0,1]^2$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, donc par le théorème des bornes atteintes, la fonction f admet un maximum et un minimum global sur $[0,1]^2$: il existe $(a,b) \in [0,1]^2$ et $(c,d) \in [0,1]^2$ avec, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$f(a,b) \leqslant f(x,y) \leqslant f(c,d).$$

• Justifions que $[0,1]^2$ est un fermé borné : pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on a

$$|x| = x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |y| = y \leqslant 1, \qquad \text{donc} \qquad \big\|(x,y)\big\|_\infty \leqslant 1.$$

Donc $[0,1]^2$ est borné ($[0,1]$ est inclus dans la boule unité de centre $(0,0)$ pour la norme $\|.\|_\infty$).
Puis, soit

$$f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1-x, \qquad f_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x, \qquad f_3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1-y \qquad \text{et} \qquad f_4 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y.$$

Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiales. Donc, pour $i \in [\![1,4]\!]$,

$$E_i = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_i(x,y) \geqslant 0\big\} = f_i^{-1}\big([0, +\infty[\big)$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Donc

$$[0,1]^2 = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$, comme intersections de fermés de $\mathbb{R}^2$.

2. • Cherchons les extrema locaux sur l'ouvert $\Omega =]0,1[^2$. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale) sur $\mathbb{R}^2$, et que Ω est un ouvert, un extremum local est un point critique. Puis, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{3}{2} + y + 2x = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} + x - 2y = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & \frac{3}{2} \\ x - 2y & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Donc $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est l'unique point critique de f sur $\mathbb{R}^2$, et il est bien dans Ω. On a

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Remarque. On peut pousser l'étude, pour voir si ce point critique est un extremum local ou non : pour tout $(x,y) \in \Omega$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

donc

$$H = H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{donc} \qquad \det(H) = -5 < 0,$$

donc $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ n'est pas un extremum local de f.

★ Étude des extrema sur les bords du carré $[0,1]^2$ (on fera le tableau de variation de chacune des fonctions ci-après) : pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $y \in [0,1]$, on pose :

$$g(x) = f(x,0) = -\frac{3}{2}x + x^2, \qquad h(x) = f(x,1) = -\frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2},$$
$$u(y) = f(0,y) = \frac{1}{2}y - y^2, \qquad v(y) = f(1,y) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y - y^2.$$

Faisons les tableaux de variations de g, h, u, v :

x	0		$\frac{3}{4}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{16}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{9}{16}$	$\nearrow$	0

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

x	0		$\frac{3}{4}$		1
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	0

Des quatre tableaux, on obtient que la fonction f a un minimum sur le bord en

$$\left(\frac{3}{4}, 0\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

(qui vaut $-\frac{9}{16}$), et un maximum sur le bord en

$$\left(0, \frac{1}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(1, \frac{3}{4}, 1\right)$$

(qui vaut $\frac{1}{16}$).
Or, d'après la question 1, la fonction f a un maximum global sur $[0,1]^2$. Deux cas sont possibles :

- soit c'est en un point de $]0,1[^2$,
- soit c'est en un point du bord.

Mais, si c'est en un point de $]0,1[^2$, alors ce point est un point critique, et donc c'est $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et alors le maximum vaut

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

mais c'est impossible car
$$f\left(0, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} > -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$
Donc le point est sur le bord, et donc f atteint un maximum global sur $[0,1]^2$ en
$$\left(\frac{3}{4}, 0\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{4}, 1\right),$$
et ce maximum vaut
$$\frac{1}{16}.$$
De même, comme
$$-\frac{9}{16} < -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$
le minimum global de f sur $[0,1]^2$ est atteint sur le bord, donc en
$$\left(\frac{3}{4}, 0\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{4}, 1\right),$$
et il vaut
$$-\frac{9}{16}.$$

Exercice 15. 1) D est la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la norme euclidienne standard, donc est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
B est la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la norme euclidienne standard, donc est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2) La fonction
$$(x,y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$$
est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$, donc sur D. De plus, pour tout $(x,y) \in D$,
$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0.$$
Or, la fonction
$$t \mapsto \sqrt{t}$$
est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, on en déduit que la fonction f est continue sur D.
La fonction f est alors continue sur D qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, donc par le théorème des bornes atteintes, il existe un maximum global et un minimum global de f sur D.
3) La fonction
$$(x,y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$$
est une fonction polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc sur l'ouvert B. De plus, pour tout $(x,y) \in B$,
$$1 - x^2 - y^2 > 0.$$
Or, la fonction
$$t \mapsto \sqrt{t}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert B.
Puis, pour tout $(x,y) \in B$,
$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0$$
Donc la fonction f a un seul point critique sur B, qui est $(0,0)$.
De plus, $f(0,0) = 1$, et pour tout $(x,y) \in D$, on a $1 - x^2 - y^2 \leqslant 1$, donc par croissance de la fonction racine carrée,
$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leqslant \sqrt{1} = 1 = f(0,0).$$
Donc

$$\boxed{f \text{ a un maximum global sur } D \text{ en } (0,0)}.$$

4) Remarquons que, B étant ouvert, et la fonction f ayant un seul point critique sur B, qui est son maximum global, tout point réalisant le minimum global de f sur D se trouve nécessairement sur $D\backslash B$ (puisque, s'il est dans B, c'est un point critique, et que ce n'est pas le maximum global de f, puisque la fonction f n'est pas constante), c'est-à-dire s'écrit (x,y) avec $x^2+y^2 \leqslant 1$, mais pas $x^2+y^2<1$, c'est-à-dire

$$x^2+y^2=1.$$

Or, dans ce cas, $f(x,y)=0$.
De plus, $f \geqslant 0$ sur D de manière directe. Donc

$$\boxed{f \text{ a un minimum global sur } D \text{ en tout point du cercle unité}}$$

(c'est-à-dire aux points (x,y) vérifiant $x^2+y^2=1$).

Exercice 16. **1)** Soit $p \in]0,1[$, alors

$$\boxed{f(p)=\binom{n}{n_1}p^{n_1}(1-p)^{n-n_1}}$$

car la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches lors de n tirages avec remise dans une urne qui contient une proportion p de boules blanches suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (les tirages successifs sont avec remise, donc indépendants et identiques, et on en fait n et on compte le nombre de boules blanches, chacune arrivant avec probabilité p).
La fonction f est alors dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $p \in]0,1[$,

$$f'(p)=\binom{n}{n_1}p^{n_1-1}(1-p)^{n-n_1-1}\big(n_1(1-p)-(n-n_1)p\big),$$

et

$$n_1(1-p)-(n-n_1)p>0 \qquad \Leftrightarrow \qquad n_1>np \Leftrightarrow \frac{n_1}{n}>p,$$

donc la fonction f est (strictement) croissante sur $\left]0,\frac{n_1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{n_1}{n},1\right[$, autrement dit la fonction f a un maximum en

$$\boxed{p=\frac{n_1}{n}}.$$

2a) On a $\binom{n}{n_1}$ façons de choisir les tirages qui amènent la première couleur, puis $\binom{n-n_1}{n_2}$ façons de choisir les tirages qui amènent la deuxième couleur,..., ce qui fait

$$\begin{aligned}\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!}\\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\end{aligned}$$

(après télescopage et, pour la dernière égalité, car $n=n_1+\cdots+n_k$ et $0!=1$) tirages différents qui réalisent la répartition $(n_1,\ldots,n_k)$. Ils sont tous de même probabilité, à savoir $p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}$ par indépendance des tirages, d'où

$$\boxed{f(p_1,\ldots,p_n)=\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}}.$$

2b) • L'ensemble F est un fermé de $\mathbb{R}^k$ comme intersection de deux fermés : pour $[0,1]^k$, on va considérer que c'est du cours - par exemple, c'est la boule fermée de centre $\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$ de rayon $\frac{1}{2}$ pour la norme $\|.\|_\infty$ -, et pour

$$F_1:=\left\{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k p_i=1\right\},$$

si on pose

$$\phi:(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{R}^k \mapsto \sum_{i=1}^k p_i-1,$$

l'application ϕ est continue sur $\mathbb{R}^k$ car polynomiale, donc

$$F_1 = \phi^{-1}\big(\{0\}\big)$$

est un fermé de $\mathbb{R}^k$.
L'ensemble F est borné (tout point de F a une norme infinie majorée par 1, donc F est inclus dans la boule de centre $(0, \dots, 0)$ et de rayon 1 pour la norme infinie).
De plus, la fonction f est polynomiale, donc continue sur F. Et $\mathbb{R}^k$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.
Donc, par le théorème des bornes atteintes, la fonction f a un maximum global sur F. Notons $a \in F$ un point en lequel il est atteint.
• Pour tout $(p_1, \dots, p_k) \in F$, on a $f(p_1, \dots, p_k) = 0$ dès que l'un des p_j est nul (car les n_j sont strictement positifs !). Si l'un des p_j vaut 1, alors comme $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ et $p_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on en déduit que tous les autres p_i sont nuls, et donc $f(p_1, \dots, p_k) = 0$ (car $k \geqslant 2$, donc il y a au moins l'un des p_i qui est nul). Comme

$$f\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\frac{1}{k^n} > 0,$$

et que $\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right) \in F$, on en déduit que : tout point $(p_1, \dots, p_k) \in F$ qui a une coordonnée qui vaut 0 ou 1, n'est pas un maximum global de f sur F.
Donc a a toutes ses coordonnées dans $]0, 1[$.
2c) • Commençons par remarquer que la fonction H est bien définie : pour tout $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega$, on a

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{k-1}) > 0,$$

donc $H(x_1, \dots, x_{k-1})$ existe. De plus, la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{k-1})$$

est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et comme on a vérifié que l'on peut composer, la fonction H (qui est la composée des deux fonctions précédentes) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
• Puis, si on note $a = (a_1, \dots, a_k)$, on a $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, et

$$a_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i > 0,$$

donc $(a_1, \dots, a_{k-1}) \in \Omega$ (car si on a $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$, alors $a_i < 1$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ aussi).
• Soit ensuite $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega$. Alors si on note

$$x_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i,$$

on a $x_k \in]0, 1[$, et donc $(x_1, \dots, x_k) \in F$. Par conséquent,

$$f(x_1, \dots, x_k) \leqslant f(a).$$

Comme la fonction ln est strictement croissante, on en déduit

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}) = \ln\big(f(x_1, \dots, x_k)\big) \leqslant \ln\big(f(a)\big) = H(a_1, \dots, a_{k-1}).$$

Donc $(a_1, \dots, a_{k-1})$ est un maximum de H sur l'ouvert Ω, donc un point critique (car la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω)
2d) Puis, pour $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega$,

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}) = \underbrace{\ln\left(\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\right)}_{=K} + \sum_{i=1}^{k-1} n_k \ln(x_k) + n_k \ln\big(1 - x_1 - \dots - x_{k-1}\big).$$

On a alors, pour tout $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega$, et pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{n_i}{x_i} - \frac{n_k}{1 - x_1 - \cdots - x_{k-1}}.$$

Donc, pour $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega$,

$$(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ est un point critique de } H \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, k-1]\!] : \frac{n_i}{x_i} = \frac{n_k}{1 - x_1 - \cdots - x_{k-1}}.$$

Si on note

$$\alpha = \frac{n_k}{1 - x_1 - \cdots - x_{k-1}} > 0$$

($\alpha > 0$ car $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \Omega$), on a alors

$$\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ est un point critique de } H \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{n_k}{1-x_1-\cdots-x_{k-1}} \\ \forall i \in [\![1, k-1]\!] : x_i = \frac{n_i}{\alpha} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{n_k}{1-\sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{\alpha}} = \frac{n_k}{1-\frac{n-n_k}{\alpha}} \\ \forall i \in [\![1, k-1]\!] : x_i = \frac{n_i}{\alpha} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - (n - n_k) = n_k \\ \forall i \in [\![1, k-1]\!] : x_i = \frac{n_i}{\alpha} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = n \\ \forall i \in [\![1, k-1]\!] : x_i = \frac{n_i}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc H a un seul point critique sur Ω :

$$\left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_{k-1}}{n_k}\right)$$

(qui est bien dans Ω car n_1, …, n_{k-1} et $n - \sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i = n_k$ sont tous strictement positifs).

On en déduit que le maximum global de f sur F est $(a_1, \dots, a_k)$ avec $a_i = \frac{n_i}{n}$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, et

$$a_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{n} = \frac{n_k}{n}.$$

Donc la proportion $(p_1, \dots, p_k)$ de boules qui rende maximale la probabilité d'avoir en n tirage la configuration n_i boules de couleur i pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ (avec $n_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$) est donnée par

$$\boxed{p_i = \frac{n_i}{n}}$$

pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Remarque. On appelle cette valeur pour $(p_1, \dots, p_k)$, le « maximum de vraisemblance ».

Exercice 17. 1) • E_a est inclus dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ par définition.
• La fonction nulle (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$) vérifie bien

$$0 = t^a \cdot 0$$

pour tout $t \in]0, +\infty[$, donc fait partie de E_a (qui est donc non vide).
• Puis, soit $(f, g) \in E_a^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$(\lambda f + g)(tx, ty, tz) = \lambda f(tx, ty, tz) + g(tx, ty, tz) = \lambda t^a f(x, y, z) + t^a g(x, y, z) = t^a \cdot (\lambda f + g)(x, y, z)$$

Donc
$$\lambda f + g \in E_a.$$
Donc E_a est stable par combinaisons linéaires.
• Donc E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.
2) Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
Puis, si on dérive par rapport à x l'égalité
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(tx,ty,tz) = t^a \cdot f(x,y,z)$$
(à $t \in]0,+\infty[$ et (y,z) fixé, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $t \in]0,+\infty[$,
$$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(tx,ty,tz)\big) = t^a \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z).$$
Or, par la règle de la chaîne,
$$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(tx,ty,tz)\big) = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz),$$
et donc on obtient, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $t \in]0,+\infty[$, l'égalité
$$t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz) = t^a \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),$$
soit en divisant par t (qui est non nul) :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz) = t^{a-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$$
Cela étant vrai pour tout $t \in]0,+\infty[$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on en déduit bien que
$$\frac{\partial f}{\partial x} \in E_{a-1}.$$
3) • Si $f \in E_0$, alors pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, pour tout $t \in]0,+\infty[$,
$$f(tx,ty,tz) = f(x,y,z).$$
Si on fixe (x,y,z) et que l'on fait tendre t vers 0, comme la fonction f est continue en $(0,0,0)$, on a
$$f(0,0,0) = \lim_{t\to 0^+} f(tx,ty,tz) = \lim_{t\to 0^+} f(x,y,z) = f(x,y,z).$$
Donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}^3$.
• Réciproquement, si la fonction f est constante, on a directement que $f \in E_0$.
• Donc E_0 est formé de l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}^3$.
4) • C'est mal précisé dans l'énoncé : la fonction g n'est défini que pour (x,y,z) **fixé**. Donc, dans la suite, on fixe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
La fonction g est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée puis différence de fonctions qui le sont. Puis, pour tout $t \in]0,+\infty[$, la règle de la chaîne donne :
$$\begin{aligned} g'(t) &= x\partial_1(f)(tx,ty,tz) + y\partial_2(f)(tx,ty,tz) + z\partial_3(f)(tx,ty,tz) - at^{a-1}f(x,y,z) \\ &= \tfrac{1}{t}\Big(tx\partial_1(f)(tx,ty,tz) + ty\partial_2(f)(tx,ty,tz) + tz\partial_3(f)(tx,ty,tz)\Big) - at^{a-1}f(x,y,z) \\ &= \tfrac{a}{t}f(tx,ty,tz) - at^{a-1}f(x,y,z) = \tfrac{a}{t}g(t) \end{aligned}$$
(où l'avant dernière égalité s'obtient en évaluant l'EDP vérifiée par f, non pas en (x,y,z), mais en (tx,ty,tz)).
Donc la fonction g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre : il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \alpha t^a.$$
Or,
$$g(1) = f(x,y,z) - f(x,y,z) = 0, \qquad \text{donc} \qquad \alpha = 0,$$

donc $g = 0$ (la fonction nulle).
Donc $g(t) = 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, soit

$$f(tx, ty, tz) = t^a f(x, y, z)$$

pour tout $t \in]0, +\infty[$. Ceci est vrai pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donc

$$f \in E_a.$$

• Si $f \in E_a$, alors en dérivant par rapport à t la relation

$$f(tx, ty, tz) = t^a \cdot f(x, y, z)$$

(en ayant fixé $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$), on a, par la règle de la chaîne, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$x\partial_1(f)(tx, ty, tz) + y\partial_2(f)(tx, ty, tz) + z\partial_3(f)(tx, ty, tz) = at^{a-1}f(x, y, z).$$

On prend $t = 1$, et on obtient que la fonction f vérifie l'EDP en (x, y, z). Comme c'est vrai pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on en déduit bien que la réciproque est vraie.

Remarque. Si $a < 0$, si on fait tendre $t \to 0$ dans l'égalité

$$f(x, y, z) = \frac{1}{t^a} f(tx, ty, tz),$$

comme la fonction f a une limite finie en $(0, 0, 0)$, on en déduit

$$f(x, y, z) = 0$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donc $f = 0$. Donc pour $a < 0$,

$$E_a = \{0\}$$

(cela provient du fait que l'on impose la continuité en $(0, 0, 0)$).

Exercice 18. Pour tout $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

en particulier, tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut bien s'écrire ainsi, et plus précisément,

$$\text{« } (x, y) \text{ parcourt } \mathbb{R}^2 \text{ »} \quad \Leftrightarrow \quad \text{« } (u, v) \text{ parcourt } \mathbb{R}^2 \text{ »}.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On veut

$$\text{« } g(u, v) = f(x, y) \text{ »}.$$

On définit donc

$$g : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right),$$

alors la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition avec des polynômes.
Puis, par la règle de la chaîne, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de l'EDP sur } \mathbb{R}^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial f}{\partial x}\left(\tfrac{u+v}{2}, \tfrac{u-v}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial f}{\partial y}\left(\tfrac{u+v}{2}, \tfrac{u-v}{2}\right) = \tfrac{1}{2}g(u, v) \\
&\qquad \text{(en notant } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \text{, car alors } \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \tfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \tfrac{1}{2}g(u, v)
\end{aligned}$$

(car « (x, y) parcourt $\mathbb{R}^2$ » si et seulement si « (u, v) parcourt $\mathbb{R}^2$ »).
Puis, notons

$$h : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(u, v)e^{-\frac{u}{2}},$$

alors par opérations usuelles, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2}g(u, v).$$

Alors

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de l'EDP sur } \mathbb{R}^2 \quad & \Leftrightarrow \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \tfrac{\partial h}{\partial u}(u, v) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \text{il existe } K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ avec } h : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto K(v) \text{ (car } \mathbb{R}^2 \text{ est convexe...)} \\
& \Leftrightarrow \quad \text{il existe } K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ avec } g : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto K(v)e^{\frac{u}{2}} \\
& \Leftrightarrow \quad \text{il existe } K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ avec } f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \boxed{K(x - y)e^{\frac{x+y}{2}}}.
\end{aligned}$$

Exercice 19. La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc, si la fonction f a un extremum en un point, ce point est un point critique de f (car $\mathbb{R}^2$ est un ouvert).
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 5 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x - 1.$$

Donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 2y + x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Donc la fonction f a un unique point critique :

$$(3, -1)$$

Puis, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$H = H_f(3, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \det(H) = 3 > 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(A) = 4 > 0,$$

donc la fonction f atteint un minimum local strict en $(3, -1)$, et c'est le seul extremum local de f.