DS 5 - Intégrales à paramètres, variables aléatoires

Samedi 31/01/2026 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Rendre les exercices sur copies séparées et mettre son nom sur **chaque** copie.
5. Rendre les copies les unes dans les autres **dans l'ordre des exercices**.

Exercice 1 - CCINP PC 2023 (exercice 2) - La fonction dilogarithme

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0,+\infty[\times]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t,x) \in]0,+\infty[\times]-\infty,1],\ f(t,x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. Soit $x \in]-\infty,1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t,x)$ et $t \mapsto f(t,1)$, montrer que $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty,1],\ L(x) = x\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

4. Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty,1]$.

Partie II - Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction L est développable en série entière. On considère un nombre réel $x \in [-1,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ s_n(t) = t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

6. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall t \in \,]0,+\infty[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t,x)$$

7. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
8. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.
9. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \,]0,1[,\ h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$$

10. Justifier que la fonction L est dérivable sur $]-1,1[$ et montrer que l'on a :

$$\forall x \in \,]-1,1[,\ L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

11. Montrer que la fonction h est constante sur $]0,1[$.
12. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in \,]0,1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 - CCINP PC 2023 (exercice 3) - Un jeu de société

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^\star$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^\star \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?
2. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{1}{1-x}$$

3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.
7. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?
8. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

9. Calculer $P(T = 0)$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice [1] G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant A} P(T = k) x^k$ sur son intervalle de convergence.

10. Déterminer le rayon de convergence R_T de la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant A} P(T = k) x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[,\ G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

11. **Pour les 5/2 :** En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III.1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

1. Aucune connaissance préalable sur la fonction génératrice n'est nécessaire sauf pour la question 11.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En considérant le système complet d'évènements $\big((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M-1)\big)$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell).$$

13. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} P(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$$

14. Que peut-on dire des évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? **Pour les** $5/2$ **:** En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 3 - Centrale Supélec PC 2024 Maths 2 (extrait) - Produits infinis

Notations

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

- La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.
- La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n.$$

Partie I - Résultats préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

2. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,
$$|(1+t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.
6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.

Partie II - Exemples de calcul de produit infini

7. Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\prod_{n=2}^{N}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\prod_{n=2}^{2N}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \mathrm{d}u.$$

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$
9. Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{4n^2-1}\right)$.

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\prod_{p=n}^{+\infty}(1 - \mathbb{P}(A_p)) = 0$.

On pourra utiliser l'inégalité démontrée en Q 2.

11. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1$.