Correction DS 5 - Intégrales à paramètres, variables aléatoires

Exercice 1 - CCINP PC 2023 (exercice 2) - La fonction dilogarithme

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

1. Soit $(t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$. On a $\mathrm{e}^t > 0$ pour tout $t > 0$, et puisque $x \leqslant 1$, on a :

$$\mathrm{e}^t - x \geqslant \mathrm{e}^t - 1 > 0 \quad (\text{car } \mathrm{e}^t > 1 \text{ pour } t > 0)$$

Donc le dénominateur ne s'annule pas et $\boxed{f \text{ est bien définie sur }]0, +\infty[\times]-\infty, 1].}$

2. Pour $x = 1$, on a $f(t, 1) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$. La fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$.
Étude en 0^+ : On a $\mathrm{e}^t - 1 \underset{t \to 0^+}{\sim} t$, donc $f(t, 1) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{t}{t} = 1$. Ainsi $f(t, 1) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 1$, ce qui montre que $t \mapsto f(t, 1)$ est prolongeable par continuité en 0. Donc $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, 1]$.
Étude en $+\infty$: On a $f(t, 1) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = t\mathrm{e}^{-t}$. Par croissances comparées, $t\mathrm{e}^{-t} = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{-t/2})$. Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable en $+\infty$ (car $1/2 > 0$). Par critère de négligeabilité, $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Finalement, $\boxed{t \mapsto f(t, 1) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$

3. Soit $x \in]-\infty, 1]$ et $t > 0$. Puisque $x \leqslant 1$, on a $\mathrm{e}^t - x \geqslant \mathrm{e}^t - 1 > 0$, donc :

$$0 \leqslant \frac{t}{\mathrm{e}^t - x} \leqslant \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = f(t, 1)$$

La fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question précédente. Par critère de comparaison pour les fonctions positives, $\boxed{t \mapsto f(t, x) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$

4. Montrons que L est continue sur $]-\infty, 1]$ en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégral.
Posons $g(t, x) = x \cdot f(t, x) = \frac{tx}{\mathrm{e}^t - x}$ pour $(t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

- Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, la fonction $t \mapsto g(t, x)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g(t, x)$ est continue sur $]-\infty, 1]$.
- **Hypothèse de domination :** Soit $[a, b] \subset]-\infty, 1]$. Pour tout $x \in [a, b]$ et $t > 0$:

$$|g(t, x)| = \frac{t|x|}{\mathrm{e}^t - x} \leqslant \frac{t \max(|a|, |b|)}{\mathrm{e}^t - 1}$$

car $x \leqslant 1$ implique $\mathrm{e}^t - x \geqslant \mathrm{e}^t - 1$. La fonction $t \mapsto \frac{t \max(|a|, |b|)}{\mathrm{e}^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 2.

Par le théorème de continuité sous le signe intégral, L est continue sur tout segment $[a, b]$ et par caractère local de la continuité, $\boxed{L \text{ est continue sur }]-\infty, 1].}$

Partie II - Développement en série entière

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $s_n : t \mapsto t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$.
En 0^+ : $s_n(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$, donc s_n est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable en 0.
En $+\infty$: $|s_n(t)| = t\mathrm{e}^{-(n+1)t}|x|^n = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{-t/2})$ par croissances comparées (car $n + 1 \geqslant 1 > 1/2$). Donc s_n est intégrable en $+\infty$.
Ainsi s_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$ converge.

Calculons cette intégrale par intégration par parties. Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-(n+1)t}$, d'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}$.
Les fonctions u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ et $u(t)v(t) = -\frac{t}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $u(0)v(0) = 0$. Ainsi les intégrales $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$ et $-\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$ ont même nature et sont donc convergentes car la première l'est.
Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}.}$

6. Soit $t \in]0, +\infty[$ et $x \in [-1, 1]$. On a :

$$\sum_{n=0}^{N} s_n(t) = \sum_{n=0}^{N} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n = t\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{N}(x\mathrm{e}^{-t})^n$$

Puisque $|x\mathrm{e}^{-t}| = |x|\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t} < 1$ pour $t > 0$, la série géométrique converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = t\mathrm{e}^{-t} \times \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-t}} = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{\frac{\mathrm{e}^t - x}{\mathrm{e}^t}} = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x} = f(t, x)$$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} s_n \text{ converge simplement vers } t \mapsto f(t,x) \text{ sur }]0, +\infty[.}$

7. D'après la question 5, $\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$. En décalant l'indice ($m = n + 1$), on a $\frac{x^{m-1}}{m^2}$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$$

Pour $x \in [-1, 1]$, on a $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec exposant $2 > 1$), donc par comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2} \text{ converge absolument.}}$

Il nous faut maintenant justifier l'interversion somme-intégrale. On utilise le théorème d'intégration terme à terme :

- Les s_n sont continues (donc continues par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- La série $\sum s_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- s_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme évoqué à la question 5.
- La série $\sum \int_0^{+\infty} |s_n(t)|\mathrm{d}t = \sum \frac{|x|^n}{(n+1)^2}$ converge (par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^2}$).

Par le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$$

Donc :

$$L(x) = x\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t = x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

D'où : $\boxed{L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} \text{ pour } x \in [-1, 1].}$

8. Soit $x \in [-1,1]$. On a :

$$L(x)+L(-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n+(-1)^n x^n}{n^2}$$

On peut sommer car les deux sommes sont convergentes.
Or $x^n+(-1)^n x^n = x^n(1+(-1)^n)$, qui vaut $2x^n$ si n est pair et 0 si n est impair. Donc :

$$L(x)+L(-x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x^{2k}}{(2k)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2k^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^k}{k^2}=\frac{1}{2}L(x^2)$$

D'où : $\boxed{L(x)+L(-x)=\frac{1}{2}L(x^2) \text{ pour tout } x\in[-1,1].}$

9. **Calcul de $L(1)$:** D'après le développement en série entière :

$$L(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Remarquez qu'on est sur le cercle d'incertitude, mais ça ne pose pas problème car le calcul précédent a été fait sur $[-1,1]$ avec ses bornes.
D'où : $\boxed{L(1)=\frac{\pi^2}{6}.}$
Calcul de $L(-1)$: En appliquant la relation de la question 8 avec $x=1$:

$$L(1)+L(-1)=\frac{1}{2}L(1)$$

Donc :

$$L(-1)=\frac{1}{2}L(1)-L(1)=-\frac{1}{2}L(1)=-\frac{\pi^2}{12}$$

D'où : $\boxed{L(-1)=-\frac{\pi^2}{12}.}$

Partie III - Une autre propriété

10. La série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2}$ a un rayon de convergence égal à 1 (par règle de d'Alembert ou comparaison). Sur $]-1,1[$, la somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme.
Donc $\boxed{L \text{ est dérivable sur }]-1,1[}$ et pour $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$L'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

Or on sait que pour $|x|<1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.
Donc pour $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$L'(x)=\frac{1}{x}\times(-\ln(1-x))=-\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Pour $x=0$: $L'(0)$ est le coefficient de x^1 dans le développement, c'est-à-dire $\frac{1}{1^2}=1$.

D'où : $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ L'(x)=\begin{cases}-\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}}$

11. La fonction h est définie sur $]0,1[$ par $h(x)=L(x)+L(1-x)+\ln(x)\ln(1-x)$.
Sur $]0,1[$, les fonctions L, $\ln$ sont dérivables (pour L, c'est vrai sur $]-1,1[\supset]0,1[$). Donc h est dérivable sur $]0,1[$.

Pour $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= L'(x) - L'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \ln(x) \times \frac{-1}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \left(-\frac{\ln(1-(1-x))}{1-x}\right) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[$, ce qui montre que $\boxed{h \text{ est constante sur }]0,1[.}$

12. **Calcul de la constante :** Calculons $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$.

On a :

- $L(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} L(1) = \frac{\pi^2}{6}$ par continuité de L en 1.
- $L(1-x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} L(0) = 0$.
- $\ln(x)\ln(1-x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$. En effet, posons $u = 1-x$, alors quand $x \to 1^-$, $u \to 0^+$. On a :

$$\ln(x)\ln(1-x) = \ln(1-u)\ln(u)$$

Or $\ln(1-u) \underset{u \to 0^+}{\sim} -u$ et $u\ln(u) \xrightarrow[u \to 0^+]{} 0$. Donc $\ln(1-u)\ln(u) \sim -u\ln(u) \to 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + 0 + 0 = \dfrac{\pi^2}{6} = L(1)$.

Comme h est constante sur $]0,1[$, on a $\boxed{h(x) = L(1) = \frac{\pi^2}{6} \text{ pour tout } x \in]0,1[.}$

Calcul de l'intégrale : Prenons $x = \frac{1}{2}$ dans l'égalité $h(x) = L(1)$:

$$L\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Donc :

$$2L\left(\frac{1}{2}\right) + (\ln 2)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

D'où :

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Or, par définition :

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\frac{2\mathrm{e}^t - 1}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}}$$

Exercice 2 - CCINP PC 2023 (exercice 3) - Un jeu de société

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

1. - X_n représente le nombre de cases dont avance le pion au n-ième tour de jeu.
   - S_n représente la position du pion après n tours de jeu (numéro de la case sur laquelle se trouve le pion).
2. T représente le nombre de tours de jeu nécessaires pour que le pion atteigne ou dépasse la case A. Si le pion n'atteint jamais la case A (ce qui n'arrive que si toutes les variables X_k valent 0), alors $T = 0$ par convention.

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Montrons par récurrence que $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.
   Initialisation : Pour $p = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{0!}{(1-x)^1}$. OK.
   Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang p. Alors :
   $$f^{(p+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}\right) = p! \times (p+1) \times \frac{1}{(1-x)^{p+2}} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$$
   Donc la propriété est héréditaire et $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.}$
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $a_n = \binom{n}{p}$ pour $n \geqslant p$ (et $a_n = 0$ pour $n < p$).
   Pour $n \geqslant p+1$:
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
   Par la règle de d'Alembert, $\boxed{\text{le rayon de convergence est } R = 1.}$
5. On sait que $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $|x| < 1$.
   D'après la question 3, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$:
   $$f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$
   D'autre part, on peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence :
   $$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$$
   En multipliant par x^p et en divisant par $p!$:
   $$\frac{x^p}{p!}f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{p!(n-p)!}x^n = \sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n}{p}x^n$$
   Donc :
   $$\sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n}{p}x^n = \frac{x^p}{p!} \times \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$
   D'où : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n}{p}x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.}$

Partie II - Étude d'un premier cas

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

6. Avec $M = 2$, les X_k suivent la loi uniforme sur $\{0, 1\}$, c'est-à-dire la loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
   $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
   Donc $\boxed{S_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2).}$
7. La variable T prend ses valeurs dans $\{0, A, A+1, A+2, ...\}$.
   En effet :
   - $T = 0$ si et seulement si tous les X_k valent 0.
   - Sinon, $T \geqslant A$ car il faut au moins A tours pour atteindre la case A (puisque $X_k \leqslant 1$).
   - De plus, toutes les valeurs plus grandes que A sont possibles, il suffit de faire une série de $X_k = 0$ puis A fois $X_k = 1$.

   $\boxed{T(\Omega) = \{0, A, A+1, A+2, ...\}.}$
8. Soit $k \geqslant A$. L'événement $(T = k)$ signifie que :
   - Après $k-1$ tours, le pion est sur une case $< A$, donc $S_{k-1} < A$.
   - Après k tours, le pion est sur une case $\geqslant A$, donc $S_k \geqslant A$.

   Puisque $S_k = S_{k-1} + X_k$ avec $X_k \in \{0, 1\}$:
   - Si $S_{k-1} \leqslant A-2$, alors même avec $X_k = 1$, on a $S_k \leqslant A-1 < A$, donc $T \neq k$.
   - Si $S_{k-1} = A-1$ et $X_k = 1$, alors $S_k = A \geqslant A$, donc $T = k$.
   - Si $S_{k-1} = A-1$ et $X_k = 0$, alors $S_k = A-1 < A$, donc $T \neq k$.

   Donc : $\boxed{(T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1).}$
   Les événements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants car S_{k-1} ne dépend que de $X_1, \ldots, X_{k-1}$ et les X_i sont mutuellement indépendantes et donc, d'après le lemme des coalitions, S_{k-1} et X_k sont indépendantes.
   Donc :
   $$P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1) \times P(X_k = 1) = \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}$$
   D'où : $\boxed{P(T = k) = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}.}$
9. L'événement $(T = 0)$ correspond au cas où $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n < A$. Cela n'arrive que si tous les $X_k = 0$.
   Pour tout n, on a par indépendance, $P(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   Par continuité décroissante (les événements $\bigcap_{k=1}^n (X_k = 0)$ sont décroissants) :
   $$P(T = 0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(X_n = 0)\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$
   D'où : $\boxed{P(T = 0) = 0.}$

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

10. On a $P(T = k) = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}$ pour $k \geqslant A$.
    Posons $a_k = P(T = k) = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}$. La série entière $\sum_{k \geqslant A} a_k x^k$ s'écrit :
    $$\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\frac{x^k}{2^k} = \frac{1}{2^A}\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-A} x^A$$
    Posons $n = k-1$ (donc $k = n+1$, et $k \geqslant A$ équivaut à $n \geqslant A-1$) :
    $$\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \frac{x}{2}\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

D'après la question 5 avec $p = A - 1$:

$$\sum_{n=A-1}^{+\infty} \binom{n}{A-1} y^n = \frac{y^{A-1}}{(1-y)^A} \quad \text{pour } |y| < 1$$

Donc pour $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, i.e. $|x| < 2$:

$$G_T(x) = \frac{x}{2} \times \frac{(x/2)^{A-1}}{(1-x/2)^A} = \frac{x}{2} \times \frac{x^{A-1}}{2^{A-1}} \times \frac{1}{((2-x)/2)^A} = \frac{x^A}{2^A} \times \frac{2^A}{(2-x)^A} = \frac{x^A}{(2-x)^A}$$

Si $|x| < 2$, $|y| < 1$ et donc la série converge (absolument). Si $|x| > 2$, alors $|y| > 1$ et la série diverge (grossièrement). D'où : $\boxed{R_T = 2.}$

Et donc $\boxed{\forall x \in]-2, 2[,\ G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.}$

11. **(Pour les 5/2)** On utilise la propriété : si T est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_T, alors $E(T) = G_T'(1)$ (à condition que $1 < R_T$).
On a $G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A$. Posons $u(x) = \frac{x}{2-x}$, alors $G_T(x) = u(x)^A$.
On a :

$$u'(x) = \frac{(2-x) - x \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}$$

Donc :

$$G_T'(x) = A \cdot u(x)^{A-1} \cdot u'(x) = A \left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1} \times \frac{2}{(2-x)^2}$$

En $x = 1$:

$$G_T'(1) = A \times 1^{A-1} \times \frac{2}{1} = 2A$$

D'où : $\boxed{E(T) = 2A.}$
En moyenne, il faut $2A$ tours de jeu pour terminer la partie.

Partie III - Étude d'un second cas

III.1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![0, A-1]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M-1)\big)$:

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} P_{X_{n+1}=\ell}(S_{n+1} \leqslant k) P(X_{n+1} = \ell)$$

Or $P(X_{n+1} = \ell) = \frac{1}{M}$ pour tout $\ell \in [\![0, M-1]\!]$.
De plus, sachant $X_{n+1} = \ell$:

$$P_{X_{n+1}=\ell}(S_{n+1} \leqslant k) = P_{X_{n+1}=\ell}(S_n + j \leqslant k) = P(S_n + \ell \leqslant k) = P(S_n \leqslant k - \ell)$$

où la seconde égalité découle de l'indépendance de S_n et X_{n+1}.
Cette probabilité est nulle si $k - \ell < 0$, c'est-à-dire si $\ell > k$. Comme $k \leqslant A - 1 < M$ (car $A \leqslant M$), on a :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell).$$

D'où : $\boxed{\forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell).}$

13. Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{H}_n$: « $\forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}$ ».
Initialisation $(n = 1)$: On a $S_1 = X_1 \sim \mathcal{U}([\![0, M-1]\!])$. Pour $k \in [\![0, A-1]\!]$ (avec $A \leqslant M$) :

$$P(S_1 \leqslant k) = P(X_1 \leqslant k) = \frac{k+1}{M}$$

D'autre part, $\frac{1}{M}\binom{1+k}{1} = \frac{1}{M}(k+1)$. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. D'après la question 12 :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{1}{M^n}\binom{n+k-\ell}{n} = \frac{1}{M^{n+1}}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n+k-\ell}{n}$$

D'après la formule donnée dans l'énoncé :

$$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}$$

Donc :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M^{n+1}}\binom{(n+1)+k}{n+1}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}.}$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(T > n)$ signifie que le pion n'a pas encore atteint la case A après n tours, c'est-à-dire $S_n < A$.
Donc $\boxed{(T > n) = (S_n < A) = (S_n \leqslant A-1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(Pour les 5/2) D'après le résultat rappelé, si la série $\sum P(T > n)$ converge, alors $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.
On a $P(T > 0) = P(S_0 < A) = P(0 < A) = 1$ (car $S_0 = 0$ et $A \geqslant 1$).
Pour $n \geqslant 1$, d'après la question 13 :

$$P(T > n) = P(S_n \leqslant A-1) = \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n}$$

Étudions la convergence de la série. On a :

$$\binom{n+A-1}{n} = \frac{(n+A-1)!}{n!(A-1)!} \sim \frac{n^{A-1}}{(A-1)!}$$

En effet $n!$ se simplifie et il nous reste un polynôme en n de degré $A-1$ équivalent à son terme de plus degré.
Donc $P(T > n) \sim \frac{n^{A-1}}{(A-1)!M^n} = o\left(M^{-n/2}\right)$. Puisque $M \geqslant 2$, la série de terme général $M^{-n/2}$ converge (série géométrique de raison $0 \leqslant 1/M < 1$). Par critère de négligeabilité, la série de terme général $P(T > n)$ converge également .
Donc T admet une espérance et :

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n}$$

D'après la question 5 avec $p = A-1$ et $x = \frac{1}{M}$:

$$\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{1}{M}\right)^n = \frac{(1/M)^{A-1}}{(1-1/M)^A} = \frac{1}{M^{A-1}} \times \frac{M^A}{(M-1)^A} = \frac{M}{(M-1)^A}$$

Or $\binom{n+A-1}{n} = \binom{n+A-1}{A-1}$, donc en posant $m = n+A-1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{A-1} = M^{A-1}\sum_{m=A}^{+\infty}\binom{m}{A-1}\left(\frac{1}{M}\right)^m$$

Or $\sum_{m=A}^{+\infty} = \sum_{m=A-1}^{+\infty} -$terme $m = A-1 = \frac{M}{(M-1)^A} - \binom{A-1}{A-1}\left(\frac{1}{M}\right)^{A-1} = \frac{M}{(M-1)^A} - \frac{1}{M^{A-1}}$.
Donc :

$$E(T) = 1 + M^{A-1}\left(\frac{M}{(M-1)^A} - \frac{1}{M^{A-1}}\right) = 1 + \frac{M^A}{(M-1)^A} - 1 = \frac{M^A}{(M-1)^A}$$

D'où : $\boxed{E(T) = \left(\frac{M}{M-1}\right)^A.}$

Exercice 3 - Centrale Supélec PC 2024 Maths 2 (extrait) - Produits infinis

Partie I - Résultats préliminaires

1. Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}_n$: « $|\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)-1| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)-1$ ».
Initialisation ($n=1$) : $|(1+x_1)-1| = |x_1| = (1+|x_1|)-1$. OK.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Posons $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$ et $Q_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)$.
$$\begin{aligned}|P_{n+1}-1| &= |P_n(1+x_{n+1})-1| = |P_n - 1 + P_n x_{n+1}| \\ &\leqslant |P_n - 1| + |P_n|\cdot|x_{n+1}|\end{aligned}$$
Par hypothèse de récurrence, $|P_n - 1| \leqslant Q_n - 1$. De plus, $|P_n| \leqslant Q_n$ (car $|1+x_k| \leqslant 1+|x_k|$).
Donc :
$$|P_{n+1}-1| \leqslant Q_n - 1 + Q_n|x_{n+1}| = Q_n(1+|x_{n+1}|) - 1 = Q_{n+1} - 1$$
D'où : $\boxed{|\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)-1| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)-1.}$
2. Pour tout $x \geqslant -1$, on a $1+x \leqslant \mathrm{e}^x$ (convexité de l'exponentielle : la courbe est au-dessus de sa tangente en 0).
Donc pour $(x_1,\dots,x_n) \in [-1,+\infty[^n$:
$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{x_k} = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n}x_k}$$
D'où : $\boxed{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).}$
3. On peut utiliser la série entière :
$$\mathrm{e}^t - (1+t) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}$$
D'où :
$$|\mathrm{e}^t - (1+t)| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k!} = |t|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^{k-2}}{k!} \leqslant |t|^2\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{|t|^j}{j!} = |t|^2\mathrm{e}^{|t|}$$
D'où : $\boxed{|(1+t)-\mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2\mathrm{e}^{|t|}.}$
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M = \max(|a|,|b|)$. On utilise l'identité :
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}) = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1}a^{n-1-j}b^j$$
Donc :
$$|a^n-b^n| \leqslant |a-b|\sum_{j=0}^{n-1}|a|^{n-1-j}|b|^j \leqslant |a-b|\sum_{j=0}^{n-1}M^{n-1-j}M^j = |a-b|\times nM^{n-1}$$
D'où : $\boxed{|a^n-b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|.}$
5. Posons $a = 1+\frac{z}{n}$ et $b = \mathrm{e}^{z/n}$. Alors $a^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ et $b^n = \mathrm{e}^z$.
D'après la question 3 avec $t = \frac{z}{n}$:
$$|a-b| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)-\mathrm{e}^{z/n}\right| \leqslant \left|\frac{z}{n}\right|^2\mathrm{e}^{|z|/n} = \frac{|z|^2}{n^2}\mathrm{e}^{|z|/n}$$
De plus, $M = \max(|a|,|b|)$. On a $|a| = |1+z/n| \leqslant 1+|z|/n$ et $|b| = \mathrm{e}^{\Re(z)/n} \leqslant \mathrm{e}^{|z|/n}$. Donc $M \leqslant \mathrm{e}^{|z|/n}$ pour n assez grand.
D'après la question 4 :
$$|a^n-b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b| \leqslant n\cdot\mathrm{e}^{(n-1)|z|/n}\cdot\frac{|z|^2}{n^2}\mathrm{e}^{|z|/n} = \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$$
D'où : $\boxed{\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}.}$

6. D'après la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$|u_n - \mathrm{e}^z| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \mathrm{e}^z.}$

Partie II - Exemples de calcul de produit infini

7. **Premier produit :** Pour $n \geqslant 2$:

$$1-\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

Donc :

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{\prod_{n=2}^{N}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{N}(n+1)}{\left(\prod_{n=2}^{N} n\right)^2}$$

On a :

- $\prod_{n=2}^{N}(n-1) = 1\times 2\times\cdots\times(N-1) = (N-1)!$
- $\prod_{n=2}^{N}(n+1) = 3\times 4\times\cdots\times(N+1) = \frac{(N+1)!}{2}$
- $\prod_{n=2}^{N} n = N!/1! = N!$

Donc :

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(N-1)!\times(N+1)!/(2)}{(N!)^2} = \frac{(N-1)!(N+1)!}{2(N!)^2} = \frac{N+1}{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

D'où : $\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.}$

Second produit : Si on regroupe deux termes consécutifs (un terme impair puis un terme pair), on a :

$$\left(1+\frac{(-1)^{2k+1+1}}{2k+1}\right)\left(1+\frac{(-1)^{2k+2+1}}{2k+2}\right) = \frac{2k+1+1}{2k+1}\times\frac{2k+2-1}{2k+2} = 1.$$

Ainsi, si $M = 2N$ est pair (et donc qu'on s'arrête sur un terme pair), on a :

$$\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}\times 1\times 1\times\cdots\times 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Et si $M = 2N+1$ est impair (et donc qu'on s'arrête sur un terme impair), on a :

$$\prod_{n=2}^{2N+1}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}\times 1\times\cdots\times 1\times\left(1+\frac{(-1)^{2N+1+1}}{2N+1}\right) \xrightarrow{N\to+\infty} \frac{1}{2}.$$

Comme les deux suites extraites tendent vers $\frac{1}{2}$, on a :

$$\prod_{n=2}^{M}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \xrightarrow{M\to+\infty} \frac{1}{2}.$$

D'où : $\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}.}$

8. On a $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos u)^n \mathrm{d}u$. Par intégration par parties (l'intégrale est sur un segment, aucune difficulté de convergence), posons $\alpha(u) = \cos^{n+1}(u)$ et $\beta'(u) = \cos(u)$. Alors $\beta(u) = \sin(u)$ et $\alpha'(u) = -(n+1)\cos^n(u)\sin(u)$ (et α et β sont $\mathcal{C}^1$).

$$\begin{aligned} W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(u)\mathrm{d}u &= \left[\cos^{n+1}(u)\sin(u)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(u)\sin^2(u)\mathrm{d}u \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(u)(1-\cos^2(u))\mathrm{d}u \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, soit $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$

Pour W_{2n+1} : On a $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos u \mathrm{d}u = 1$.

Par récurrence (faites ce que je dis pas ce que je fais !) :

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times W_1$$

Donc :

$$W_{2n+1} = \frac{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!}$$

où $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

Donc :

$$W_{2n+1} = \frac{2^n n!}{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

D'où : $\boxed{W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$

9. **Équivalent de W_{2n+1} :** D'après la question précédente, on a :

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

En utilisant l'équivalent de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, on obtient :

- $(n!)^2 \sim 2\pi n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} = 2\pi n \cdot \frac{n^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}$
- $(2n+1)! \sim (2n)! \cdot (2n+1) \sim \sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \cdot (2n+1) \sim 2\sqrt{\pi n} \cdot \frac{(2n)^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}} \cdot 2n = 4n\sqrt{\pi n} \cdot \frac{(2n)^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}$

Donc :

$$W_{2n+1} \sim \frac{2^{2n} \cdot 2\pi n \cdot \frac{n^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}}{4n\sqrt{\pi n} \cdot \frac{(2n)^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}} = \frac{2^{2n} \cdot 2\pi n \cdot n^{2n}}{4n\sqrt{\pi n} \cdot (2n)^{2n}} = \frac{2^{2n} \cdot 2\pi n \cdot n^{2n}}{4n\sqrt{\pi n} \cdot 2^{2n} \cdot n^{2n}} = \frac{2\pi n}{4n\sqrt{\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

D'où : $\boxed{W_{2n+1} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$

Calcul du produit : On a :

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{4n^2-1}\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Complétons le dénominateur en multipliant par les termes pairs $(2n)$ et $(2n+2)$, et compensons au numérateur :

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2 \cdot (2n)(2n+2)}{(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2)}$$

Dénominateur : Séparons le produit en deux :

$$\prod_{n=1}^{N}(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2) = \prod_{n=1}^{N}(2n-1)(2n) \times \prod_{n=1}^{N}(2n+1)(2n+2)$$

- $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(2n-1)(2n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2N-1)(2N) = (2N)!$
- $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(2n+1)(2n+2) = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(2N+1)(2N+2) = \frac{(2N+2)!}{2}$

Donc le dénominateur vaut $(2N)!\cdot\dfrac{(2N+2)!}{2}$.

Numérateur : On factorise les 2 des termes pairs :

$$\prod_{n=1}^{N}4n^2\cdot(2n)(2n+2) = \prod_{n=1}^{N}4n^2\cdot 2n\cdot 2(n+1) = 4^N\cdot(N!)^2\cdot 4^N\cdot N!\cdot(N+1)! = 16^N(N!)^3(N+1)!$$

Donc :

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{16^N(N!)^3(N+1)!}{(2N)!\cdot\frac{(2N+2)!}{2}} = \frac{2\cdot 16^N(N!)^3(N+1)!}{(2N)!(2N+2)!}$$

Or $(N+1)! = (N+1)\cdot N!$ et $(2N+2)! = (2N+2)(2N+1)(2N)!$, donc :

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{2\cdot 16^N(N!)^4(N+1)}{(2N)!(2N+2)(2N+1)(2N)!}\\ &= \frac{2\cdot 2^{4N}(N!)^4(N+1)}{2(N+1)(2N+1)((2N)!)^2}\\ &= \frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)((2N)!)^2}\end{aligned}$$

On reconnaît :

$$W_{2N+1} = \frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N+1)!} = \frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N+1)(2N)!}$$

Donc :

$$W_{2N+1}^2 = \frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)^2((2N)!)^2}$$

Et ainsi :

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)((2N)!)^2} = (2N+1)\cdot\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)^2((2N)!)^2} = (2N+1)W_{2N+1}^2$$

D'après l'équivalent de W_{2N+1} :

$$(2N+1)W_{2N+1}^2 \sim 2N\cdot\frac{\pi}{4N} = \frac{\pi}{2}$$

D'où : $\boxed{\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}.}$

10. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $1-\mathbb{P}(A_p)\leqslant \mathrm{e}^{-\mathbb{P}(A_p)}$ d'après la question 2.
Donc :

$$\prod_{p=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_p)) \leqslant \exp\left(-\sum_{p=n}^{N}\mathbb{P}(A_p)\right)$$

Or $\sum_{p\geqslant 0}\mathbb{P}(A_p)$ diverge, donc $\sum_{p=n}^{N}\mathbb{P}(A_p)\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$.

Donc $\exp\left(-\sum_{p=n}^{N}\mathbb{P}(A_p)\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$.

D'où : $\boxed{\displaystyle\prod_{p=n}^{+\infty}(1-\mathbb{P}(A_p)) = 0.}$

11. Par indépendance des (A_p) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{A_p}\right) = \prod_{p=n}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_p}) = \prod_{p=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_p))$$

D'après la question 10, cette probabilité tend vers 0 quand $N \to +\infty$.
Donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right) = 0$, soit $\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{p\geqslant n} A_p}\right) = 0$.
Donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1$ pour tout n.
Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1$$

(par continuité décroissante, les $\bigcup_{p\geqslant n} A_p$ étant décroissants en n).

D'où : $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1.}$

Remarque : C'est le lemme de Borel-Cantelli (seconde partie) : si les (A_n) sont indépendants et $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors presque sûrement, une infinité d'événements A_n se réalisent.