

CORRECTION CONCOURS BLANC

Exercice 1 - CCINP PC 2022 (exercice 1) - Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Partie I - Généralités sur l'application φ

1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On distingue deux cas.

Cas 1 : $P = 0$. Alors $AP = 0$ et la division euclidienne de 0 par B donne $0 = B \times 0 + 0$. Donc $\varphi(0) = 0 \in \mathbb{C}_n[X]$.

Cas 2 : $P \neq 0$. Alors AP est un polynôme de degré $\deg(AP) = \deg(A) + \deg(P) \leq n + n = 2n$. Puisque $\deg(B) = n + 1 \geq 1$, on peut effectuer la division euclidienne de AP par B : il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$AP = BQ + R \quad \text{avec} \quad R = 0 \text{ ou } \deg(R) < \deg(B) = n + 1.$$

Dans tous les cas, le reste $R = \varphi(P)$ vérifie $\deg(\varphi(P)) \leq n$.

Donc $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

Remarque :

La distinction des cas est imposée par l'énoncé, qui sépare $R = 0$ et $\deg(R) < \deg(B)$ dans la définition de la division euclidienne. On pourrait l'éviter en adoptant la convention $\deg(0) = -\infty$, auquel cas la condition s'écrit simplement $\deg(R) < \deg(B)$, qui englobe le cas $R = 0$.

2. On a les deux divisions euclidiennes fournies par l'énoncé :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. En combinant ces deux égalités :

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = (BQ_1 + R_1) + \lambda(BQ_2 + R_2) = B \underbrace{(Q_1 + \lambda Q_2)}_{\in \mathbb{C}[X]} + \underbrace{(R_1 + \lambda R_2)}_{\in \mathbb{C}[X]}.$$

Il s'agit bien d'une division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B . En effet, vérifions la condition sur le reste : $R_1 + \lambda R_2$ est une combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ (puisque $R_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$), donc $R_1 + \lambda R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$, ce qui signifie :

$$R_1 + \lambda R_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R_1 + \lambda R_2) \leq n < n + 1 = \deg(B).$$

Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne, on en déduit que le quotient est $Q_1 + \lambda Q_2$ et que le reste est $R_1 + \lambda R_2$. D'où :

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2).$$

Ceci montre que φ est linéaire. Puisque d'après la question 1, φ envoie $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$, on conclut que :

φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

On rappelle qu'ici $n = 2$, $A = X^2 + 2X$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

3. On doit calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ en effectuant les divisions euclidiennes de $A \cdot 1$, $A \cdot X$ et $A \cdot X^2$ par B .

Calcul de $\varphi(1)$: On a $A \cdot 1 = X^2 + 2X$. Puisque $\deg(A) = 2 < 3 = \deg(B)$, le quotient est 0 et le reste est A lui-même :

$$X^2 + 2X = B \times 0 + (X^2 + 2X).$$

Donc $\varphi(1) = X^2 + 2X$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(1, X, X^2)$.

Calcul de $\varphi(X)$: On a $A \cdot X = X^3 + 2X^2$. On effectue la division euclidienne par $B = X^3 + X^2 - X - 1$:

$$X^3 + 2X^2 = (X^3 + X^2 - X - 1) \times 1 + (X^2 + X + 1).$$

Donc $\varphi(X) = X^2 + X + 1$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(1, X, X^2)$.

Calcul de $\varphi(X^2)$: On a $A \cdot X^2 = X^4 + 2X^3$. On effectue la division euclidienne par B :

$$X^4 + 2X^3 = (X^3 + X^2 - X - 1)(X + 1) + (2X + 1).$$

Donc $\varphi(X^2) = 2X + 1$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(1, X, X^2)$.

La matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$ est obtenue en plaçant les vecteurs-colonnes des images les uns à côté des autres :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Calcul du polynôme caractéristique :** On a :

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ (qui ne change pas le déterminant) :

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -4 & \lambda - 1 & -2 \\ \lambda - 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Effectuons $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -4 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

Développons selon la troisième ligne :

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)[(\lambda - 1)^2 - 4] = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3).$$

Or $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Donc :

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres de M sont les racines de χ_M : $\text{Sp}(M) = \{-1, 3\}$.

La valeur propre -1 a pour multiplicité 2 et la valeur propre 3 a pour multiplicité 1.

Sous-espace propre $E_{-1}(M) = \text{Ker}(M + I_3)$: On calcule :

$$M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les trois lignes sont proportionnelles, donc cette matrice est de rang 1. Par le théorème du rang, $\dim(E_{-1}) = 3 - 1 = 2$. Le système $(M + I_3)V = 0$ se réduit à l'unique équation $x + y + z = 0$, soit $x = -y - z$. On paramètre par y et z :

$$V = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où : $E_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

(On vérifie bien $\dim(E_{-1}) = 2$, ce qui est égal à la multiplicité de -1 .)

Sous-espace propre $E_3(M) = \text{Ker}(M - 3I_3)$: On calcule :

$$M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On résout $(M - 3I_3)V = 0$. La deuxième ligne donne $2x - 2y + 2z = 0$, soit $x - y + z = 0$. La première ligne donne $-3x + y + z = 0$. En soustrayant : $-4x + 2y = 0$, soit $y = 2x$. Puis $z = y - x = x$. Donc :

$$V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où : $E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

(On vérifie $\dim(E_3) = 1$, ce qui est bien la multiplicité de 3.)

5. On a $\dim(E_{-1}) + \dim(E_3) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{C}_2[X])$. Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité. D'après le critère de diagonalisabilité :

M est diagonalisable, et donc φ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}_2[X]$.

En traduisant les vecteurs propres en polynômes via la base $(1, X, X^2)$, on obtient une base de vecteurs propres de φ :

$$(-1 + X, -1 + X^2, 1 + 2X + X^2)$$

où $-1 + X$ et $-1 + X^2$ sont associés à la valeur propre -1 , et $1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2$ est associé à la valeur propre 3.

Remarque :

On peut vérifier directement : $\varphi(1 + 2X + X^2) = \varphi(1) + 2\varphi(X) + \varphi(X^2) = (X^2 + 2X) + 2(X^2 + X + 1) + (2X + 1) = 3X^2 + 6X + 3 = 3(1 + 2X + X^2)$.

Partie III - Étude d'un second exemple

On rappelle qu'ici $n = 2$, $B = X^3$ et $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$.

6. On effectue les divisions euclidiennes de $A \cdot P$ par $B = X^3$ pour les vecteurs de la base $(1, X, X^2)$.

Calcul de $\varphi(1)$: On a $A \cdot 1 = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Puisque $\deg(A) \leq 2 < 3 = \deg(B)$, la division euclidienne donne directement :

$$\alpha + \beta X + \gamma X^2 = X^3 \times 0 + (\alpha + \beta X + \gamma X^2).$$

Donc $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Calcul de $\varphi(X)$: On a $A \cdot X = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3$. La division euclidienne par X^3 donne :

$$\alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = X^3 \times \gamma + (\alpha X + \beta X^2).$$

Donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Calcul de $\varphi(X^2)$: On a $A \cdot X^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4$. La division euclidienne par X^3 donne :

$$\alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = X^3 \times (\gamma X + \beta) + \alpha X^2.$$

On vérifie : $X^3(\gamma X + \beta) + \alpha X^2 = \gamma X^4 + \beta X^3 + \alpha X^2$.

Donc $\varphi(X^2) = \alpha X^2$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

La matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$ est donc :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

7. La matrice T est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ici, $\text{Sp}(T) = \{\alpha\}$: la seule valeur propre est α , de multiplicité 3.

Sens direct ($\Leftarrow$) : Si A est constant, alors $\beta = \gamma = 0$ et $T = \alpha I_3$. La matrice αI_3 est (trivialement) diagonale, donc diagonalisable, et $\varphi = \alpha \text{Id}$ aussi.

Réciproque ($\Rightarrow$) : Supposons φ diagonalisable. Alors T est diagonalisable. Puisque $\text{Sp}(T) = \{\alpha\}$, la seule matrice diagonale semblable à T est αI_3 . Donc T est semblable à αI_3 , ce qui signifie $T = P^{-1}(\alpha I_3)P = \alpha I_3$ pour toute matrice de passage P . Ainsi $T = \alpha I_3$, ce qui impose $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, c'est-à-dire $A = \alpha$ est un polynôme constant.

φ est diagonalisable si et seulement si A est constant.

Remarque :

On peut aussi raisonner sur le sous-espace propre. Si φ est diagonalisable, on doit avoir $\dim(E_\alpha) = 3$ (multiplicité algébrique), soit $\text{Ker}(T - \alpha I_3) = \mathbb{C}^3$, soit $T - \alpha I_3 = 0$. Or $T - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix}$, qui est la matrice nulle si et seulement si $\beta = \gamma = 0$.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Posons $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Évaluons D en x_j :

$$D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i(x_j).$$

Or, d'après les propriétés des polynômes de Lagrange, $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). Donc la somme se réduit au seul terme $i = j$:

$$D(x_j) = P(x_j) - P(x_j) \times 1 = 0.$$

Ceci étant valable pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on conclut que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont des racines de D .

9. Le polynôme D appartient à $\mathbb{C}_n[X]$: en effet, $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et chaque $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ (par définition), donc $\sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$ est une combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$, qui appartient encore à $\mathbb{C}_n[X]$. Ainsi $D \in \mathbb{C}_n[X]$, soit $\deg(D) \leq n$.

Or, d'après la question précédente, D possède (au moins) $n + 1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_n$. Un polynôme non nul de degré au plus n a au plus n racines (comptées sans multiplicité). Comme D en possède $n + 1$, on a nécessairement $D = 0$.

D'où la formule d'interpolation de Lagrange :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i.$$

10. D'après la question précédente Q9, tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire des $L_0, \dots, L_n$. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est donc **génératrice** de $\mathbb{C}_n[X]$.

De plus, elle est constituée de $n + 1$ vecteurs, et $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n + 1$.

Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie dont le cardinal est égal à la dimension est une base. Donc :

$$(L_0, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].$$

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

11. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Par définition, $R_k = \varphi(L_k)$ est le reste de la division euclidienne de AL_k par B , c'est-à-dire :

$$AL_k = BQ_k + R_k.$$

Évaluons cette égalité en x_j . Puisque x_j est une racine de B (par hypothèse), on a $B(x_j) = 0$. D'où :

$$A(x_j)L_k(x_j) = \underbrace{B(x_j)}_{=0} \cdot Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j).$$

Or $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$. Donc :

- Si $j \neq k$: $R_k(x_j) = A(x_j) \times 0 = 0$.
- Si $j = k$: $R_k(x_k) = A(x_k) \times 1 = A(x_k)$.

$$R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \quad \text{et} \quad R_k(x_k) = A(x_k).$$

12. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $\varphi(L_k) = R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ (d'après la question 1). D'après la formule de décomposition de Q9, on peut écrire R_k dans la base de Lagrange :

$$\varphi(L_k) = R_k = \sum_{i=0}^n R_k(x_i)L_i.$$

Or, d'après la question précédente, $R_k(x_i) = 0$ pour tout $i \neq k$, et $R_k(x_k) = A(x_k)$. Tous les termes de la somme sont nuls sauf celui correspondant à $i = k$:

$$\varphi(L_k) = A(x_k)L_k.$$

$$\varphi(L_k) = A(x_k)L_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Autrement dit, L_k est un **vecteur propre** de φ pour la valeur propre $A(x_k)$.

13. D'après la question précédente, chaque vecteur L_k de la base $(L_0, \dots, L_n)$ est un vecteur propre de φ . On dispose donc d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Par définition, cela signifie que φ est diagonalisable.

Ses valeurs propres sont les scalaires $A(x_0), A(x_1), \dots, A(x_n)$, et la matrice de φ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ est la matrice diagonale :

$$\text{diag}(A(x_0), A(x_1), \dots, A(x_n)).$$

$$\text{Sp}(\varphi) = \{A(x_0), A(x_1), \dots, A(x_n)\}.$$

Remarque :

Attention, l'ensemble des valeurs propres est un *ensemble* (sans répétitions). Si certaines valeurs $A(x_k)$ coïncident, le spectre a moins de $n + 1$ éléments. Par exemple, si A est constant de valeur α , alors $\text{Sp}(\varphi) = \{\alpha\}$ et $\varphi = \alpha \text{Id}$, ce qui est cohérent avec la partie III (cas $B = X^3$, A constant).

Exercice 2 - CCINP PC 2024 (exercice 2) - La fonction $\ln(\Gamma)$ **Partie I - Existence de la solution du problème étudié**

1. Soit $x > 0$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

On cherche un équivalent de $u_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On utilise le développement limité $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ en $t = 0$, appliqué à $t = \frac{1}{n}$ et $t = \frac{x}{n}$:

$$\begin{aligned} x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{x}{n} - \frac{x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) &= \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

En faisant la différence :

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \frac{x}{2n^2} - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{x^2 - x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{x(x-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x(x-1)}{2n^2}$, et en particulier $u_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par comparaison de séries à termes positifs (pour n assez grand, $|u_n(x)| \leq C \cdot \frac{1}{n^2}$ pour une certaine constante $C > 0$ dépendant de x), et puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car l'exposant $2 > 1$), on conclut que la série $\sum u_n(x)$ est **absolument convergente** pour tout $x > 0$.

En particulier, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ est définie sur $]0, +\infty[$. C'est une combinaison linéaire de :

- la fonction $x \mapsto x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -n, +\infty[\supset]0, +\infty[$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.

Donc u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Calculons sa dérivée. Pour tout $x > 0$:

$$u'_n(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1/n}{1 + x/n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n + x}.$$

Pour faire apparaître la décomposition demandée, écrivons $\frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} - \frac{x}{n(n+x)}$ (mise au même dénominateur). Cela donne :

$$u'_n(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} + \frac{x}{n(n+x)}.$$

Posons alors :

$$\varepsilon_n := \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}.$$

Ce terme ε_n est une constante (indépendante de x). On a bien $u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$.

Il reste à montrer que $\sum |\varepsilon_n|$ converge. Par développement limité de $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ en $t = \frac{1}{n}$:

$$\varepsilon_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Donc $|\varepsilon_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum |\varepsilon_n|$ converge.

La série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et $u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$.

3. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$ (avec $0 < a \leq b$). Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x > 0$ et $n+x > 0$, d'où :

$$|u'_n(x)| = \left| \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n \right| \leq \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|.$$

Majorons le premier terme uniformément sur $[a, b]$. Comme $x \leq b$ et $n+x \geq n+a$ (car $x \geq a$) :

$$\frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n(n+a)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$:

$$|u'_n(x)| \leq \underbrace{\frac{b}{n(n+a)}}_{=: M_n} + |\varepsilon_n|.$$

Le terme M_n ne dépend pas de x . Donc :

$$\|u'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq M_n.$$

Montrons que la série $\sum M_n$ converge :

- $\frac{b}{n(n+a)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{n^2}$, donc $\sum \frac{b}{n(n+a)}$ converge par comparaison à $\sum \frac{1}{n^2}$.
- $\sum |\varepsilon_n|$ converge d'après la question précédente.

Par somme, $\sum M_n$ converge. On a donc trouvé une série numérique convergente $\sum M_n$ telle que $\|u'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq M_n$ pour tout n .

Par définition, cela signifie que $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

4. Vérifions que φ satisfait les quatre conditions de $(\mathcal{C})$.

Condition (i) — φ est de classe $\mathcal{C}^1$:

Appliquons le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions. On vérifie ses hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (question 2) donc sur tout segment $[a, b]$.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (question 1) donc sur tout segment $[a, b]$.
- La série des dérivées $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$ (question 3, car la convergence normale entraîne la convergence uniforme).

Par le théorème de dérivation terme à terme, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $[a, b]$ et

donc sur $]0, +\infty[$ par caractère local de la dérivée et sa dérivée est $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n$.

La fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est également $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Par somme :

$\varphi = -\ln + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n \right).$$

Condition (ii) — $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$:

Soit $x > 0$. Calculons $u_n(x+1) - u_n(x)$:

$$\begin{aligned} u_n(x+1) - u_n(x) &= (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) - x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n+x}\right). \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n+x}\right) \right).$$

Étudions la somme partielle :

$$\sum_{n=1}^N \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n+x}\right) \right) = \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n+x+1}{n+x}\right).$$

Les deux sommes sont télescopiques :

- $\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{N+1}{N}\right) = \ln(N+1).$
- $\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n+x+1}{n+x}\right) = \ln\left(\frac{N+x+1}{1+x}\right).$

Donc :

$$\sum_{n=1}^N \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n+x}\right) \right) = \ln(N+1) - \ln\left(\frac{N+x+1}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{(N+1)(1+x)}{N+x+1}\right).$$

Quand $N \rightarrow +\infty$: $\frac{(N+1)(1+x)}{N+x+1} = (1+x) \cdot \frac{N+1}{N+x+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1+x.$

Donc la somme de la série vaut $\ln(1+x)$.

Finalement :

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \ln(1+x) = \ln(x).$$

$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x) \text{ pour tout } x > 0.$

Condition (iii) — φ' est croissante :

D'après l'expression de φ' obtenue en (i), on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n}_{\text{constante}}.$$

Montrons que chaque terme de cette expression est une fonction croissante de x :

- La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$ (sa dérivée $\frac{1}{x^2}$ est positive).

- Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{n(n+x)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$ (sa dérivée $\frac{1}{(n+x)^2}$ est positive).
- La constante $\sum \varepsilon_n$ est (trivialement) croissante.

Par croissance de la somme (y compris série convergente), on a $\varphi'(x) \leq \varphi'(y)$ si $x \leq y$ et donc la fonction φ' est croissante.

$$\boxed{\varphi' \text{ est croissante sur }]0, +\infty[.}$$

Condition (iv) — $\varphi(1) = 0$:

On a :

$$\varphi(1) = -\ln(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

$$\boxed{\varphi(1) = 0.}$$

En résumé : $\boxed{\varphi \text{ vérifie les quatre conditions } (\mathcal{C}).}$

Partie II - Unicité de la solution

On considère une fonction g vérifiant $(\mathcal{C})$ et on pose $h = \varphi - g$.

5. Montrons que h est 1-périodique. Pour tout $x > 0$:

$$h(x+1) - h(x) = (\varphi(x+1) - g(x+1)) - (\varphi(x) - g(x)) = \underbrace{(\varphi(x+1) - \varphi(x))}_{=\ln(x)} - \underbrace{(g(x+1) - g(x))}_{=\ln(x)} = 0.$$

On a utilisé le fait que φ et g vérifient toutes deux la condition (ii).

$$\text{Donc } \boxed{h(x+1) = h(x) \text{ pour tout } x > 0.}$$

Pour la dérivée : puisque φ et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ (condition (i)), $h = \varphi - g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. L'égalité $h(x+1) = h(x)$ est valable pour tout $x > 0$. En dérivant les deux membres (par rapport à x), on obtient :

$$h'(x+1) = h'(x) \quad \text{pour tout } x > 0.$$

$$\boxed{h' \text{ est également 1-périodique sur }]0, +\infty[.}$$

6. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Encadrement de $h'(x+p)$:

On a $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p)$. Puisque φ' et g' sont **croissantes** (condition (iii)) et que $p \leq x+p \leq 1+p$ (car $0 < x \leq 1$), on a :

- Pour φ' : $\varphi'(p) \leq \varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p)$.
- Pour $-g'$ (qui est **décroissante** car g' est croissante) : $-g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p)$.

En additionnant membre à membre :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq \underbrace{\varphi'(x+p) - g'(x+p)}_{=h'(x+p)} \leq \varphi'(1+p) - g'(p).$$

$$\boxed{\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p).}$$

Calcul de $\varphi'(p) - g'(1+p)$:

La fonction g vérifie la condition (ii) : $g(x+1) - g(x) = \ln(x)$ pour tout $x > 0$. En dérivant cette relation (puisque g est $\mathcal{C}^1$), on obtient :

$$g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

En particulier, en $x = p$: $g'(1+p) = g'(p) + \frac{1}{p}$. Ainsi :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) = \varphi'(p) - g'(p) - \frac{1}{p} = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

$$\boxed{\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.}$$

De même, en appliquant la relation de récurrence de φ' (qui vérifie aussi (ii), donc $\varphi'(1+p) = \varphi'(p) + \frac{1}{p}$) :

$$\varphi'(1+p) - g'(p) = \varphi'(p) + \frac{1}{p} - g'(p) = h'(p) + \frac{1}{p}.$$

Conclusion : L'encadrement devient :

$$h'(p) - \frac{1}{p} \leq h'(x+p) \leq h'(p) + \frac{1}{p},$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}.}$$

7. Soient $x, y \in]0, 1]$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, par l'inégalité triangulaire :

$$|h'(x+p) - h'(y+p)| \leq |h'(x+p) - h'(p)| + |h'(p) - h'(y+p)| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

d'après la question 6.

Or, h' est 1-périodique (question 5). En notant que $x+p \equiv x \pmod{1}$ (au sens où $h'(x+p) = h'(x)$ par p applications de la 1-périodicité), on a $h'(x+p) = h'(x)$ et $h'(y+p) = h'(y)$. Donc :

$$|h'(x) - h'(y)| = |h'(x+p) - h'(y+p)| \leq \frac{2}{p}.$$

Cette inégalité étant valable pour **tout** $p \in \mathbb{N}^*$, on fait tendre $p \rightarrow +\infty$ et on obtient $|h'(x) - h'(y)| \leq 0$, soit $h'(x) = h'(y)$.

Ceci étant vrai pour tous $x, y \in]0, 1]$, la fonction h' est constante sur $]0, 1]$.

Par 1-périodicité, h' est constante sur chaque intervalle $]k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}$) avec la même valeur constante. Donc :

$$\boxed{h' \text{ est constante sur }]0, +\infty[.}$$

8. La fonction h est 1-périodique (question 5), donc en particulier $h(1) = h(2)$.

La fonction h est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$. Par le **théorème de Rolle**, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $h'(c) = 0$.

Or h' est constante sur $]0, +\infty[$ (question 7). Donc $h' = 0$ sur tout $]0, +\infty[$, ce qui signifie que h est constante sur $]0, +\infty[$.

Or $h(1) = \varphi(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$ (car φ et g vérifient toutes deux la condition (iv)). Donc $h = 0$ sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\varphi = g \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

Remarque :

| On a montré que φ est l'**unique** fonction vérifiant $(\mathcal{C})$. En effet, si g vérifie $(\mathcal{C})$, alors nécessairement $g = \varphi$.

Partie III - La formule de duplication

9. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) - \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right).$$

En passant à l'exponentielle de la somme :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \prod_{n=1}^N \exp\left(u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \prod_{n=1}^N \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\frac{2n+1}{2n}} = \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1}.$$

Premier produit (télescopique) :

$$\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\prod_{n=1}^N \frac{n+1}{n}} = \sqrt{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{N+1}{N}} = \sqrt{N+1}.$$

Deuxième produit : Calculons séparément numérateur et dénominateur.

- Le numérateur vaut $\prod_{n=1}^N (2n) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2N) = 2^N \cdot N!$.
- Le dénominateur vaut $\prod_{n=1}^N (2n+1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2N+1)$.

Pour exprimer le produit des impairs, on utilise l'astuce classique :

$$\prod_{n=1}^N (2n+1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2N+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2N)} = \frac{(2N+1)!}{2^N \cdot N!}.$$

Donc :

$$\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} = \frac{2^N N!}{\frac{(2N+1)!}{2^N N!}} = \frac{(2^N N!)^2}{(2N+1)!}.$$

Or $(2N+1)! = (2N+1) \cdot (2N)!$, donc :

$$\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} = \frac{(2^N N!)^2}{(2N+1)(2N)!}.$$

En combinant les deux produits :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{N+1} \cdot \frac{(2^N N!)^2}{(2N+1)(2N)!} = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \cdot \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

10. Commençons par calculer $\psi(1)$. D'après la définition de ψ :

$$\psi(1) = (1-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi(1) - \frac{1}{2}\ln(\pi) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\varphi(1)}_{=0} - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Or, par définition de φ :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Donc } \psi(1) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Il reste à calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right)$. D'après la question 9, la somme partielle vérifie :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \cdot \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

Cherchons la limite du membre de droite grâce à la **formule de Stirling** : $N! \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$. On a alors :

$$\bullet (2^N N!)^2 \sim 2^{2N} \cdot 2\pi N \cdot \frac{N^{2N}}{e^{2N}},$$

$$\bullet (2N)! \sim \sqrt{4\pi N} \cdot \frac{(2N)^{2N}}{e^{2N}} = 2\sqrt{\pi N} \cdot \frac{2^{2N} N^{2N}}{e^{2N}}.$$

Donc :

$$\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!} \sim \frac{2^{2N} \cdot 2\pi N \cdot \frac{N^{2N}}{e^{2N}}}{2\sqrt{\pi N} \cdot \frac{2^{2N} N^{2N}}{e^{2N}}} = \frac{2\pi N}{2\sqrt{\pi N}} = \sqrt{\pi N}.$$

Et :

$$\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \cdot \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N} \cdot \sqrt{\pi N} = \frac{\sqrt{\pi N}}{2\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{N} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Plus directement : $\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \sim \frac{\sqrt{N}}{2N} = \frac{1}{2\sqrt{N}}$, puis $\frac{1}{2\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\pi N} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

La fonction exp est continue, donc par passage à la limite :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En prenant le logarithme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(\pi) - \ln(2).$$

On conclut :

$$\psi(1) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(\pi) - \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(\pi) = 0.$$

$$\boxed{\psi(1) = 0.}$$

11. **Stratégie :** On montre que ψ vérifie les conditions (C). Par unicité (démontrée dans les parties I et II), on aura $\psi = \varphi$, ce qui est exactement la formule de duplication.

Condition (i) — ψ est $\mathcal{C}^1$:

La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ (question 4), donc les fonctions $x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \mapsto \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)$ sont $\mathcal{C}^1$ (composées de fonctions $\mathcal{C}^1$). La fonction $x \mapsto (x-1)\ln(2)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\frac{1}{2}\ln(\pi)$ est une constante. Par somme :

$$\boxed{\psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

Condition (ii) — $\psi(x+1) - \psi(x) = \ln(x)$:

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \psi(x+1) - \psi(x) &= ((x+1)-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi) \\ &\quad - (x-1)\ln(2) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(\pi) \\ &= \ln(2) + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Or $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$, donc en appliquant la condition (ii) vérifiée par φ (avec $\frac{x}{2}$ à la place de x) :

$$\varphi\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Donc :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(2) + \ln(x) - \ln(2) = \ln(x).$$

$$\boxed{\psi(x+1) - \psi(x) = \ln(x) \text{ pour tout } x > 0.}$$

Condition (iii) — ψ' est croissante :

Par dérivation (en utilisant la règle de la chaîne) :

$$\psi'(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

La fonction φ' est croissante (question 4). Pour tout $x_1 < x_2$:

- $\frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2}$, donc $\varphi'(\frac{x_1}{2}) \leq \varphi'(\frac{x_2}{2})$.
- $\frac{x_1+1}{2} < \frac{x_2+1}{2}$, donc $\varphi'(\frac{x_1+1}{2}) \leq \varphi'(\frac{x_2+1}{2})$.

Par somme, $\psi'(x_1) \leq \psi'(x_2)$.

ψ' est croissante sur $]0, +\infty[$.

Condition (iv) — $\psi(1) = 0$:

C'est exactement le résultat de la question 10.

$\psi(1) = 0$.

Conclusion : La fonction ψ vérifie les quatre conditions $(\mathcal{C})$. Par unicité de la solution (parties I et II), on a $\psi = \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x > 0, \quad (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi) = \varphi(x),$$

soit :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Remarque :

En posant $\Gamma(x) = e^{\varphi(x)}$, cette relation devient la classique **formule de duplication de Legendre** :

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Exercice 3 - CCINP PC 2022 (exercice 2) - Étude de séries de pile ou de face

Partie I - Étude de la longueur de la première série

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

- La série entière $\sum_{k \geq 0} x^k$ est la série géométrique. Son rayon de convergence est $R = 1$ (par exemple par la règle de d'Alembert : $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1 \rightarrow 1$, donc $R = 1$, ou plus simplement car $x^k \rightarrow 0$ si et seulement si $|x| < 1$). Pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

- On sait qu'une série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, et que la série dérivée a le même rayon de convergence. En dérivant $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ terme à terme sur $]-1, 1[$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(Le terme $k = 0$ dans la série dérivée est nul, donc on peut commencer la somme à $k = 1$.)

En multipliant les deux membres par x :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \underbrace{0 \cdot x^0}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$. Donc :

Pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ signifie que la première série a exactement k lancers, c'est-à-dire :
- les k premiers lancers donnent tous le même résultat,
 - le $(k+1)$ -ième lancer donne un résultat différent.

Le premier lancer peut être pile ou face, ce qui donne deux scénarios incompatibles :

- les k premiers lancers sont pile, et le $(k+1)$ -ième est face : $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}$,
- les k premiers lancers sont face, et le $(k+1)$ -ième est pile : $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$.

D'où :

$$(L_1 = k) = \left(\bigcap_{i=1}^k P_i \cap F_{k+1} \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^k F_i \cap P_{k+1} \right).$$

4. Les deux évènements de l'union ci-dessus sont **incompatibles** (ils imposent des résultats contradictoires au premier lancer : P_1 dans le premier, F_1 dans le second). De plus, les lancers sont **mutuellement indépendants** et chaque lancer donne pile ou face avec probabilité $\frac{1}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} P(L_1 = k) &= P\left(\bigcap_{i=1}^k P_i \cap F_{k+1}\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^k F_i \cap P_{k+1}\right) \\ &= \underbrace{P(P_1) \cdots P(P_k)}_{=(1/2)^k} \cdot \underbrace{P(F_{k+1})}_{=1/2} + \underbrace{P(F_1) \cdots P(F_k)}_{=(1/2)^k} \cdot \underbrace{P(P_{k+1})}_{=1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2 \times \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

$$P(L_1 = k) = 2^{-k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

5. La variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(L_1 = k) = 2^{-k}$. Calculons $P(L_1 \neq 0)$:

$$P(L_1 \neq 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

C'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ et de premier terme $\frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

Donc $P(L_1 \neq 0) = 1$, et par passage au complémentaire :

$$P(L_1 = 0) = 1 - 1 = 0.$$

Remarque :

L'évènement $(L_1 = 0)$ correspond au cas où la première série ne se termine jamais, c'est-à-dire où tous les lancers donnent le même résultat (que des piles ou que des faces). C'est un évènement de probabilité nulle, ce qui est rassurant : la probabilité que la pièce tombe indéfiniment du même côté est bien nulle.

6. **Existence de l'espérance :** On doit vérifier que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k P(L_1 = k)$ converge (absolument). Puisque $P(L_1 = 0) = 0$ et $P(L_1 = k) = 2^{-k}$ pour $k \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k P(L_1 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

D'après la question 2, la série $\sum_{k \geq 0} k x^k$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$. En prenant $x = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$, la série

$\sum k \cdot (1/2)^k$ converge. Donc L_1 admet une espérance.

Calcul de l'espérance : Toujours d'après la question 2, $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$. En $x = \frac{1}{2}$:

$$E(L_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2.$$

$$\boxed{E(L_1) = 2.}$$

Interprétation : Ce nombre représente la **longueur moyenne de la première série** de résultats identiques consécutifs. En moyenne, il faut 2 lancers avant que le résultat change pour la première fois.

Partie II - Étude du nombre de séries

II.1 - Généralités

7. **Loi de N_1 :** Après un seul lancer, il y a toujours exactement une série en cours (que le résultat soit pile ou face). Donc N_1 est une variable aléatoire **certaine** (constante) égale à 1 :

$$N_1(\Omega) = \{1\} \quad \text{et} \quad P(N_1 = 1) = 1.$$

Loi de N_2 : Après deux lancers, on distingue deux cas :

- Si les deux lancers donnent le même résultat ($P_1 \cap P_2$ ou $F_1 \cap F_2$), la première série est encore en cours : $N_2 = 1$.
- Si les deux lancers donnent des résultats différents ($P_1 \cap F_2$ ou $F_1 \cap P_2$), une nouvelle série commence au deuxième lancer : $N_2 = 2$.

Par indépendance et équiprobabilité :

$$P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(N_2 = 2) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Donc $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1, 2\}.}$

8. **Valeur minimale :** On a $N_n \geq 1$ toujours (il y a au moins une série, celle qui commence au premier lancer). La valeur $N_n = 1$ est atteinte lorsque tous les résultats sont identiques ($P_1 \cap \dots \cap P_n$ ou $F_1 \cap \dots \cap F_n$), ce qui est possible.

Valeur maximale : On a $N_n \leq n$ (il y a au plus n séries, une par lancer). La valeur $N_n = n$ est atteinte lorsque les résultats alternent à chaque lancer (par exemple $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots$), ce qui est possible.

Valeurs intermédiaires : Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut construire une configuration avec exactement k séries (par exemple $k-1$ alternances parmi les $n-1$ transitions). Donc toutes les valeurs entre 1 et n sont atteintes.

$$\boxed{N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.}$$

II.2 - Relation de récurrence pour la loi N_n

9. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Égalité d'évènements : L'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ signifie que les lancers n et $n+1$ donnent tous les deux pile. En particulier, il n'y a pas de changement de côté entre les lancers n et $n+1$, donc pas de nouvelle série qui commence au lancer $n+1$. Par conséquent, le nombre de séries après $n+1$ lancers est le même qu'après n lancers :

$$\text{sur l'évènement } P_n \cap P_{n+1}, \quad N_{n+1} = N_n.$$

Plus formellement, cela signifie que $(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$ et $(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$ décrivent exactement le même évènement :

$$\boxed{(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.}$$

Calcul de la probabilité : L'évènement $(N_n = k) \cap P_n$ ne dépend que des résultats des lancers $1, 2, \dots, n$. L'évènement P_{n+1} ne dépend que du lancer $n + 1$. Par **indépendance mutuelle** des lancers, ces deux évènements sont indépendants. Donc :

$$\begin{aligned} P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) &= P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) \\ &= P((N_n = k) \cap P_n) \cdot P(P_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n). \end{aligned}$$

$$\boxed{P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n).}$$

10. Soit $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$. Les quatre évènements $(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$ forment un système complet d'évènements (ils sont deux à deux incompatibles et de réunion Ω , car les lancers n et $n + 1$ donnent chacun pile ou face). Par la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} P(N_{n+1} = k) &= P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &\quad + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}). \end{aligned}$$

D'après la question 9 et les trois relations admises, on remplace chaque terme :

$$\begin{aligned} P(N_{n+1} = k) &= \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap F_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} P((N_n = k - 1) \cap F_n) + \frac{1}{2} P((N_n = k - 1) \cap P_n). \end{aligned}$$

Regroupons les termes :

$$\begin{aligned} P(N_{n+1} = k) &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) \right]}_{(\star)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\left[P((N_n = k - 1) \cap P_n) + P((N_n = k - 1) \cap F_n) \right]}_{(\star\star)}. \end{aligned}$$

Or (P_n, F_n) est un système complet d'évènements (le lancer n donne soit pile, soit face). Par la formule des probabilités totales :

- $(\star) = P(N_n = k)$,
- $(\star\star) = P(N_n = k - 1)$.

D'où :

$$\boxed{P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k - 1).}$$

Remarque :

Cette relation est intuitive : lors du passage du lancer n au lancer $n + 1$, soit le résultat est le même (probabilité 1/2) et le nombre de séries ne change pas, soit le résultat change (probabilité 1/2) et une nouvelle série commence.

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la fonction génératrice :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1} = k) x^k.$$

D'après Q10, pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, on a $P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k - 1)$. En substituant :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k - 1) \right) x^k.$$

Séparons cette somme en deux :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1) x^k.$$

Première somme : Puisque $N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $P(N_n = n+1) = 0$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k) x^k = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) x^k = G_n(x).$$

Deuxième somme : On effectue le changement d'indice $j = k-1$ (soit $k = j+1$) :

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1) x^k = \sum_{j=0}^n P(N_n = j) x^{j+1} = x \sum_{j=0}^n P(N_n = j) x^j.$$

Or $P(N_n = 0) = 0$ (car $N_n \geq 1$), donc $\sum_{j=0}^n P(N_n = j) x^j = \sum_{j=1}^n P(N_n = j) x^j = G_n(x)$.

En rassemblant :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{2} G_n(x) + \frac{x}{2} G_n(x).$$

$$\boxed{G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).}$$

12. La relation $G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x)$ montre que, pour x fixé, la suite $(G_n(x))_{n \geq 1}$ est une suite **géométrique** de raison $\frac{1+x}{2}$.

Son premier terme est $G_1(x) = x$ (donné par l'énoncé). Donc, pour tout $n \geq 1$:

$$G_n(x) = G_1(x) \cdot \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} = x \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = x \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}.$$

13. On rappelle que pour une variable aléatoire N_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (donc dans $\mathbb{N}$), dont la fonction génératrice est G_n , l'espérance (lorsqu'elle existe) est donnée par :

$$\boxed{E(N_n) = G'_n(1).}$$

(En effet, $G'_n(x) = \sum_{k=1}^n k P(N_n = k) x^{k-1}$, et en $x = 1$ on obtient $\sum_{k=1}^n k P(N_n = k) = E(N_n)$.)

L'existence de l'espérance quant à elle est liée à la dérivabilité de G_n en 1. Dans notre cas, on peut voir que l'espérance existe de plusieurs manières. D'abord, la somme est finie donc le rayon de convergence de G_n est ∞ . Donc G_n est dérivable en 1. Ensuite, la variable est à support fini donc admet une espérance.

Calculons $G'_n(x)$. On a $G_n(x) = x \cdot \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$. Par la formule du produit :

$$G'_n(x) = 1 \cdot \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}.$$

En évaluant en $x = 1$: $\frac{1+1}{2} = 1$, donc $\left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} = 1$ et $\left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} = 1$. D'où :

$$G'_n(1) = 1 + 1 \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$\boxed{E(N_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Remarque :

Pour $n = 1$: $E(N_1) = 1$, cohérent car $N_1 = 1$ est certaine. Pour $n = 2$: $E(N_2) = \frac{3}{2}$, cohérent car N_2 suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

14. On développe $G_n(x) = x \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$ grâce à la **formule du binôme de Newton**. On a :

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}(1+x)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j.$$

Donc :

$$G_n(x) = x \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1}.$$

En posant $k = j + 1$ (soit $j = k - 1$, avec k allant de 1 à n) :

$$G_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1} x^k.$$

Or, par définition de la fonction génératrice : $G_n(x) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) x^k$.

Par **unicité** de la décomposition d'un polynôme dans la base canonique (identification des coefficients de x^k), on obtient :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

Identification de la loi : Posons $M = N_n - 1$. Alors M prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et :

$$P(M = j) = P(N_n = j + 1) = \binom{n-1}{j} \frac{1}{2^{n-1}} = \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-j}.$$

On reconnaît la formule d'une **loi binomiale** $\mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$. Donc :

$$\boxed{N_n - 1 \sim \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right).}$$

Remarque :

C'est cohérent avec le calcul de l'espérance : $E(N_n) = E(N_n - 1) + 1 = (n-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$.
L'interprétation est la suivante : le nombre de séries N_n après n lancers vérifie $N_n = 1 + Y$ où Y est le nombre de changements de côté parmi les $n-1$ transitions (du lancer i au lancer $i+1$, pour $i = 1, \dots, n-1$). Chaque transition donne lieu à un changement avec probabilité $\frac{1}{2}$, et les transitions sont indépendantes. Donc $Y \sim \mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$.