

QUINZAINE DU 16/03 AU 27/03

1 Contenu du cours

Chapitre 15 - Espérance et variance (cours et TD)

...

Chapitre 16 - Fonctions de plusieurs variables (cours et TD)

1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles, fonction dérivée partielle, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$, DL à l'ordre 1, différentielle en un point.

2. Règle de la chaîne

Règle de la chaîne pour $f \circ \phi$ avec ϕ définie sur $I \subset \mathbb{R}$, généralisation à ϕ définie sur un $U \subset \mathbb{R}^n$, une fonction de différentielle nul sur un convexe est constante, quelques exemples d'applications.

3. Gradient

Définition, interprétation géométrique.

4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwarz, matrice hessienne, formule de Taylor-Young.

5. Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extrema globaux et locaux, points critiques, condition nécessaire pour un extremum local sur un ouvert, condition suffisante en utilisant la hessienne, exemples.

Révisions : tout depuis le début de l'année

2 Questions de cours

1. **Exemple** : Calculer de deux manières différentes $g'(t)$ en tout $t \in \mathbb{R}$ pour $g(t) = f(t, t^2)$ avec $f(x, y) = xe^y$.
2. **Exercice/exemple** : Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On pose :

$$f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^y \end{cases}$$

- Justifier que U est ouvert.
 - Déterminer l'unique point critique de f .
 - Quelle est la nature de ce point critique ?
3. **Exemple** : Justifier en détaillant les compositions de fonctions que $x, y \mapsto \max(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
 4. **Exercice/exemple** : déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

5. **Exemple** : Déterminer la fonction génératrice de la loi géométrique de paramètre p ainsi que le rayon de convergence correspondant.
6. **Démonstration** : Loi faible des grands nombres.