

CORRECTION DS6 - MINES-PONTS MATHS 2 PC 2020

Problème 1 - Mines-Ponts PC 2020 (Maths II) - Approximation par des exponentielles-polynômes

Partie I - Résultats préliminaires

I.1 - Étude d'une série entière

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. On étudie la convergence de l'intégrale en scindant en $t = 1$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Convergence en 0 : Au voisinage de 0^+ , on a $e^{-t} \rightarrow 1$, donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$. Or $x-1 > -1$ (car $x > 0$), donc $x \mapsto t^{x-1}$ est intégrable (intégrale de Riemann en 0). Par critère d'équivalence au voisinage de 0^+ , $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable en 0 et donc l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

Convergence en $+\infty$: Par croissances comparées, $t^2 \cdot t^{x-1}e^{-t} = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Puisque $x \mapsto \frac{dt}{t^2}$ est intégrable (intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$), par critère de négligeabilité, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}dt$ est intégrable en $+\infty$.

La fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

De plus, l'intégrande $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive donc par positivité de l'intégrale, Γ est positive.

Si Γ s'annulait en un point $x \in \mathbb{R}$, comme $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, positive et comme $0 < +\infty$, d'après le théorème aux quatre hypothèses, on aurait $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ identiquement nulle, ce qui est faux. Par contraposée, Γ ne s'annule jamais et donc $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2. Soit $x > 0$. On a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. On pose :

$$u(t) = t^x \quad \text{et} \quad v'(t) = e^{-t}, \quad \text{avec} \quad u'(t) = x t^{x-1} \quad \text{et} \quad v(t) = -e^{-t}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. De plus :

- Quand $A \rightarrow +\infty$: $u(A)v(A) = -A^x e^{-A} \rightarrow 0$ par croissances comparées (l'exponentielle l'emporte sur toute puissance).
- Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$: $u(\varepsilon)v(\varepsilon) = -\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ car $x > 0$ et $e^{-\varepsilon} \rightarrow 1$.

Donc une intégration par partie est valide et les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^x (-e^{-t}) dt$$

ont même nature. La première intégrale est $\Gamma(x)$ à facteur près donc convergente. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Ainsi : $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Remarque :

On en déduit par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$, et si $\Gamma(n+1) = n!$, alors $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

3. On utilise la règle de d'Alembert pour les séries entières. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n > 0$ (car $n + \alpha + 1 > 0$ puisque $n \geq 0$ et $\alpha > -1$, et Γ est à valeurs strictement positives d'après la question 1). On calcule le rapport :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

Or $n + \alpha + 1 > 0$. D'après la question 2, $\Gamma(n+\alpha+2) = (n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)$. Donc :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\alpha+1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries entières :

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+\alpha+1}.$$

$$\boxed{R = 1.}$$

4. Soit $x \in]-1, 1[$. On le considère fixé tout le long de cette question. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit a_n à l'aide de la définition intégrale de Γ :

$$a_n x^n = \frac{x^n}{n!} \Gamma(n+\alpha+1) = \frac{x^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^{n+\alpha} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(tx)^n}{n!} t^\alpha e^{-t} dt.$$

On pose $f_n(t) = \frac{(tx)^n}{n!} t^\alpha e^{-t}$ pour tout $t > 0$. On souhaite intervertir $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$.

Justification de l'interversion :

- $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto e^{tx} t^\alpha e^{-t}$. On a reconnu la série exponentielle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx)^n}{n!} = e^{tx}$, valable pour tout $t, x \in \mathbb{R}$.
- Chaque fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Vérifions que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^{n+\alpha} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n \Gamma(n+\alpha+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x|^n.$$

Cette dernière série converge car $|x| < R = 1$ (convergence absolue d'une série entière à l'intérieur de son disque de convergence).

Par le théorème d'intégration terme à terme, l'interversion est justifiée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \right) dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} e^{tx} dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t(1-x)} dt.$$

Calcul de l'intégrale : Puisque $x < 1$, on a $1-x > 0$. On effectue le changement de variable (affine)

$u = t(1-x)$, soit $t = \frac{u}{1-x}$ et $dt = \frac{du}{1-x}$:

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t(1-x)} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1-x} \right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-1, 1[.}$$

Remarque :

Pour $\alpha = 0$: $a_n = \Gamma(n+1)/n! = n!/n! = 1$, et on retrouve la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Pour $\alpha = 1$: $a_n = \Gamma(n+2)/n! = (n+1)!/n! = n+1$, et on retrouve $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$, ce qui est cohérent avec la dérivation terme à terme de la série géométrique.

I.2 - Projections orthogonales

5. Puisque F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , on dispose de la décomposition en somme directe orthogonale :

$$E = F \oplus F^\perp \quad \text{où} \quad F^\perp = \{y \in E \mid \forall f \in F, \langle y, f \rangle = 0\}.$$

La projection orthogonale π_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Autrement dit, pour tout $x \in E$, $\pi_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - \pi_F(x) \in F^\perp$.

6. Posons $p = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. Montrons que $p = \pi_F(x)$, c'est-à-dire que $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$.

$p \in F$: C'est immédiat car p est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ qui appartiennent à F .

$x - p \in F^\perp$: Il suffit de montrer que $x - p$ est orthogonal à chaque vecteur de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de F . Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\langle x - p, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle p, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

On a utilisé l'orthonormalité de la base : $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). Puisque $\langle x - p, e_j \rangle = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x - p \in F^\perp$.

Par unicité de la décomposition dans $E = F \oplus F^\perp$, on conclut :

$$\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

7. On développe $\|x - \pi_F(x)\|^2$ en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \langle x - \pi_F(x), x - \pi_F(x) \rangle = \langle x - \pi_F(x), x \rangle - \langle x - \pi_F(x), \pi_F(x) \rangle.$$

Or $x - \pi_F(x) \in F^\perp$ et $\pi_F(x) \in F$, donc $\langle x - \pi_F(x), \pi_F(x) \rangle = 0$. Il reste :

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \langle x - \pi_F(x), x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle \pi_F(x), x \rangle = \|x\|^2 - \langle \pi_F(x), x \rangle.$$

Calculons $\langle \pi_F(x), x \rangle$ à l'aide de la question 6 :

$$\langle \pi_F(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, x \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

D'où :

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

Partie II - Polynômes de Laguerre

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, ce qui donne :

$$|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \geq 0, \quad \text{soit} \quad a^2 + b^2 \geq 2|ab|.$$

En divisant par 2 :

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Soient $f, g \in E_\alpha$. Pour tout $x > 0$, on applique la question 8 avec $a = f(x)$ et $b = g(x)$:

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2}.$$

En multipliant par $x^\alpha e^{-x} > 0$ (car $x > 0$) :

$$x^\alpha e^{-x} |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} g(x)^2.$$

Le membre de droite est la somme de deux fonctions dont les intégrales sur $[0, +\infty[$ convergent : $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ converge car $f \in E_\alpha$, et de même pour g . Par comparaison de fonctions positives :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ converge absolument, donc converge.

10. Montrons que E_α est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Inclusion : Par définition, les éléments de E_α sont des fonctions continues sur $[0, +\infty[$, donc $E_\alpha \subset \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Non-vacuité : La fonction nulle est continue et $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \cdot 0^2 dx = 0$ converge. Donc $0 \in E_\alpha$.

Stabilité par combinaison linéaire : Soient $f, g \in E_\alpha$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est continue sur $[0, +\infty[$. On développe :

$$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2.$$

En multipliant par $x^\alpha e^{-x}$ et en intégrant, on obtient une combinaison linéaire de trois intégrales :

- $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f^2 dx$ converge car $f \in E_\alpha$,
- $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} fg dx$ converge d'après la question 9,
- $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g^2 dx$ converge car $g \in E_\alpha$.

Par linéarité des intégrales convergentes, $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (f + \lambda g)^2 dx$ converge. Donc $f + \lambda g \in E_\alpha$.

E_α est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

11. Montrons d'abord que chaque fonction monôme $x \mapsto x^k$ (pour $k \in \mathbb{N}$) appartient à E_α . Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (x^k)^2 dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+2k} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + 2k + 1).$$

Cette intégrale converge d'après la question 1, car $\alpha + 2k + 1 \geq \alpha + 1 > 0$. Donc $x \mapsto x^k \in E_\alpha$.

Soit maintenant p une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$: $p = \sum_{j=0}^m c_j x^j$. C'est une combinaison linéaire finie de fonctions monômes, qui appartiennent toutes à E_α . Puisque E_α est un sous-espace vectoriel (question 10) :

Toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α .

12. On calcule ψ_0 , ψ_1 et ψ_2 à partir des définitions $\varphi_n(x) = x^{n+\alpha} e^{-x}$ et $\psi_n(x) = x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$.

Calcul de ψ_0 : On a $\varphi_0(x) = x^\alpha e^{-x}$ et $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$ (par convention). Donc :

$$\psi_0(x) = x^{-\alpha} e^x \cdot x^\alpha e^{-x} = 1.$$

$$\psi_0 = 1.$$

Calcul de ψ_1 : On a $\varphi_1(x) = x^{1+\alpha} e^{-x}$. On dérive par la règle du produit :

$$\varphi_1'(x) = (1 + \alpha) x^\alpha e^{-x} - x^{1+\alpha} e^{-x} = x^\alpha e^{-x} [(\alpha + 1) - x].$$

Donc :

$$\psi_1(x) = x^{-\alpha} e^x \cdot x^\alpha e^{-x} [(\alpha + 1) - x] = (\alpha + 1) - x.$$

$$\boxed{\psi_1(x) = -x + \alpha + 1.}$$

Calcul de ψ_2 : On a $\varphi_2(x) = x^{2+\alpha} e^{-x}$. On calcule ses deux premières dérivées.

Première dérivée :

$$\varphi_2'(x) = (\alpha + 2) x^{1+\alpha} e^{-x} - x^{2+\alpha} e^{-x}.$$

Deuxième dérivée (en dérivant chaque terme de φ_2') :

$$\begin{aligned} \varphi_2''(x) &= (\alpha + 2) [(\alpha + 1) x^\alpha e^{-x} - x^{1+\alpha} e^{-x}] - [(\alpha + 2) x^{1+\alpha} e^{-x} - x^{2+\alpha} e^{-x}] \\ &= x^\alpha e^{-x} [(\alpha + 2)(\alpha + 1) - 2(\alpha + 2)x + x^2]. \end{aligned}$$

Donc :

$$\psi_2(x) = x^{-\alpha} e^x \cdot \varphi_2''(x) = x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2).$$

$$\boxed{\psi_2(x) = x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2).}$$

13. La fonction φ_n est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$: $x \mapsto x^{n+\alpha}$ et $x \mapsto e^{-x}$. On applique la **formule de Leibniz** :

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^{n+\alpha})^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)}.$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

- $(x^{n+\alpha})^{(k)} = (n + \alpha)(n + \alpha - 1) \cdots (n + \alpha - k + 1) \cdot x^{n+\alpha-k}$ (produit de k facteurs consécutifs, avec la convention que le produit vide vaut 1 pour $k = 0$).
- $(e^{-x})^{(n-k)} = (-1)^{n-k} e^{-x}$.

En substituant et en factorisant $x^\alpha e^{-x}$ (car $x^{n+\alpha-k} = x^\alpha \cdot x^{n-k}$) :

$$\varphi_n^{(n)}(x) = x^\alpha e^{-x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha - k + 1)} x^{n-k}$$

où l'on a utilisé la relation $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$ (question 2) pour écrire le produit de k facteurs sous la forme

$\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha - k + 1)}$ (ce qui est licite car $n + \alpha - k + 1 \geq \alpha + 1 > 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$).

Par conséquent :

$$\psi_n(x) = x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha - k + 1)} x^{n-k}.$$

C'est une somme finie de puissances entières de x (les exposants $n - k$ parcourent $\llbracket 0, n \rrbracket$).

$$\boxed{\psi_n \text{ est donc une fonction polynomiale.}}$$

Degré et coefficient dominant : Le terme de plus haut degré correspond à $k = 0$:

$$\binom{n}{0} (-1)^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} x^n = (-1)^n x^n.$$

Le coefficient dominant est $(-1)^n \neq 0$, donc le degré est exactement n .

$$\boxed{\psi_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } (-1)^n.}$$

Remarque :

On vérifie la cohérence avec la question 12 : $\psi_0 = 1$ a pour degré 0 et coefficient dominant $(-1)^0 = 1$; $\psi_1 = -x + (\alpha + 1)$ a pour degré 1 et coefficient dominant $(-1)^1 = -1$; $\psi_2 = x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2)$ a pour degré 2 et coefficient dominant $(-1)^2 = 1$.

14. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur $E_\alpha \times E_\alpha$: pour $f, g \in E_\alpha$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ converge d'après la question 9.

Vérifions les quatre propriétés d'un produit scalaire.

Bilinéarité : Soient $f, g, h \in E_\alpha$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale convergente :

$$\langle f + \lambda g, h \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (f(x) + \lambda g(x)) h(x) dx = \langle f, h \rangle + \lambda \langle g, h \rangle.$$

La linéarité à droite s'obtient de la même manière. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bilinéaire.

Symétrie : Pour $f, g \in E_\alpha$, on a $f(x) g(x) = g(x) f(x)$ pour tout x , donc $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.

Positivité : Pour $f \in E_\alpha$:

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx \geq 0$$

car l'intégrande est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Caractère défini : Supposons $\langle f, f \rangle = 0$. L'intégrande $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ ($0 < +\infty$), et son intégrale vaut 0. Elle est donc identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ d'après le théorème aux quatre hypothèses. Or $x^\alpha e^{-x} > 0$ pour tout $x > 0$, d'où $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$, puis $f(0) = 0$ par continuité de f sur $[0, +\infty[$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α .

15. D'après la formule de Leibniz appliquée au produit $\varphi_n(x) = x^{n+\alpha} \cdot e^{-x}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-j+1)} (-1)^{k-j} x^{n+\alpha-j} e^{-x}.$$

Chaque terme de cette somme est de la forme $c_j \cdot x^{n+\alpha-j} \cdot e^{-x}$.

Comportement en $+\infty$: Pour tout $j \leq k$, on écrit $x^{n+\alpha-j} e^{-x} = (x^{n+\alpha-j} e^{-x/2}) \cdot e^{-x/2}$. Par croissances comparées, $x^{n+\alpha-j} e^{-x/2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc chaque terme est un $o(e^{-x/2})$. Comme le nombre de termes est fixé, on peut sommer les o .

$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2})$ quand $x \rightarrow +\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Limite en 0^+ : Si $k \leq n-1$, alors pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$:

$$n + \alpha - j \geq n + \alpha - k \geq n + \alpha - (n-1) = \alpha + 1 > 0.$$

L'exposant de x dans chaque terme est strictement positif, donc $x^{n+\alpha-j} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Pour $k \leq n-1$, $\varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Remarque :

Plus généralement, pour tout polynôme P et tout $k \leq n-1$, le produit $P(x) \varphi_n^{(k)}(x)$ est une combinaison linéaire de termes $x^{n+\alpha-j+d} e^{-x}$ (avec $d \geq 0$), qui tendent tous vers 0 en 0^+ et en $+\infty$. Ce fait sera utile à la question suivante.

16. **Formule d'intégration par parties** : Par définition de ψ_n , on a $x^\alpha e^{-x} \psi_n(x) = \varphi_n^{(n)}(x)$. Donc :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx.$$

Montrons par récurrence (finie) sur ℓ la propriété suivante, pour ℓ allant de 0 à n :

$$\mathcal{H}(\ell) : \text{ l'intégrale } I_\ell = \int_0^{+\infty} \psi_m^{(\ell)}(x) \varphi_n^{(n-\ell)}(x) dx \text{ converge et } \langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^\ell I_\ell.$$

- **Initialisation** ($\ell = 0$) : L'intégrale $I_0 = \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$ converge car ψ_m est un polynôme et $\varphi_n^{(n)}(x) = x^\alpha e^{-x} \psi_n(x)$ (cf. ci-dessus), et on a $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^0 I_0$, ce qui est l'égalité déjà établie.
- **Hérédité** : Soit $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\mathcal{H}(\ell)$ est vraie. On effectue une intégration par parties sur I_ℓ . On pose :

$$u(x) = \psi_m^{(\ell)}(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = \varphi_n^{(n-\ell)}(x), \quad \text{avec} \quad u'(x) = \psi_m^{(\ell+1)}(x) \quad \text{et} \quad v(x) = \varphi_n^{(n-\ell-1)}(x).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus :

- Quand $A \rightarrow +\infty$: $\psi_m^{(\ell)}(A)$ est un polynôme et $\varphi_n^{(n-\ell-1)}(A) = o(e^{-A/2})$ en $+\infty$ (question 15, car $n - \ell - 1 \leq n - 1$), donc $u(A)v(A) \rightarrow 0$ par croissances comparées.
- Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$: $\psi_m^{(\ell)}(\varepsilon)$ tend vers une constante (valeur d'un polynôme en 0) et $\varphi_n^{(n-\ell-1)}(\varepsilon) \rightarrow 0$ (question 15, car $n - \ell - 1 \leq n - 1$), donc $u(\varepsilon)v(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Donc une intégration par parties est valide et les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \psi_m^{(\ell)}(x) \varphi_n^{(n-\ell)}(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \psi_m^{(\ell+1)}(x) \varphi_n^{(n-\ell-1)}(x) dx$$

ont même nature. La première est I_ℓ qui converge par hypothèse de récurrence. La seconde, $I_{\ell+1}$, converge donc aussi, et :

$$I_\ell = \left[\psi_m^{(\ell)}(x) \varphi_n^{(n-\ell-1)}(x) \right]_0^{+\infty} - I_{\ell+1} = -I_{\ell+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^\ell I_\ell = (-1)^\ell \cdot (-I_{\ell+1}) = (-1)^{\ell+1} I_{\ell+1}$, ce qui prouve $\mathcal{H}(\ell+1)$.

Par récurrence, $\mathcal{H}(n)$ est vraie :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

Orthogonalité : Si $m < n$, le polynôme ψ_m est de degré m (question 13), donc $\psi_m^{(n)} = 0$. On en déduit $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$.

Si $m > n$, par symétrie du produit scalaire : $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \langle \psi_n, \psi_m \rangle = 0$ (car $n < m$, cas précédent).

Pour $m \neq n$, $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$: la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

17. En appliquant la formule de la question 16 avec $m = n$:

$$\|\psi_n\|^2 = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

D'après la question 13, ψ_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$. Donc :

$$\psi_n^{(n)} = (-1)^n \cdot n!$$

En substituant :

$$\|\psi_n\|^2 = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx = n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n! \Gamma(n + \alpha + 1).$$

L'intégrale converge d'après la question 1 (car $n + \alpha + 1 > 0$).

$$\|\psi_n\|^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1).$$

Remarque :

$$\left| \begin{array}{l} \text{On vérifie pour } n = 0 : \|\psi_0\|^2 = 0! \Gamma(\alpha + 1) = \Gamma(\alpha + 1). \text{ En effet, } \psi_0 = 1 \text{ donc } \|\psi_0\|^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = \\ \Gamma(\alpha + 1). \end{array} \right.$$

Partie III - Approximation

18. **Existence :** La famille $\left(\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha} \right)_{0 \leq n \leq N}$ est une base orthonormale de V_N . D'après la question 7 appliquée à f_k dans $(E_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ avec $F = V_N$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \|f_k\|_\alpha^2 - \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 \leq \|f_k\|_\alpha^2.$$

La série $\sum \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par $\|f_k\|_\alpha^2 < +\infty$. Elle converge.

Calcul de $\langle f_k, \psi_n \rangle$: Puisque $x^\alpha e^{-x} \psi_n(x) = \varphi_n^{(n)}(x)$:

$$\langle f_k, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} f_k(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx.$$

On a déjà rédigé proprement plusieurs IPP. Allons un peu plus vite, on effectue n intégrations par parties, en dérivant f_k et en intégrant les dérivées de φ_n . Les crochets aux bornes s'annulent par le même argument qu'à la question 16 : $f_k^{(\ell)}(x) = (-k)^\ell e^{-kx}$ est bornée au voisinage de 0 et tend vers 0 en $+\infty$, tandis que $\varphi_n^{(n-1-\ell)}(x) \rightarrow 0$ en 0^+ et est un $o(e^{-x/2})$ en $+\infty$ (question 15). On obtient :

$$\langle f_k, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} f_k^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx = (-1)^n \cdot (-k)^n \int_0^{+\infty} e^{-kx} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x} dx.$$

Par le changement de variable (affine) $t = (k+1)x$:

$$\langle f_k, \psi_n \rangle = \frac{k^n}{(k+1)^{n+\alpha+1}} \Gamma(n+\alpha+1).$$

Calcul de la somme : En utilisant $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n+\alpha+1)$ (question 17) et en posant $a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$:

$$\frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{k^{2n} \Gamma(n+\alpha+1)}{n! (k+1)^{2n+2\alpha+2}} = \frac{a_n}{(k+1)^{2\alpha+2}} \cdot \left(\frac{k^2}{(k+1)^2} \right)^n.$$

On pose $u = \frac{k^2}{(k+1)^2} \in [0, 1[$. En sommant et en appliquant la question 4 (puisque $|u| < R = 1$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-u)^{\alpha+1}}.$$

Or $1-u = 1 - \frac{k^2}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{(k+1)^2}$, donc $(1-u)^{\alpha+1} = \frac{(2k+1)^{\alpha+1}}{(k+1)^{2\alpha+2}}$. En substituant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1) \cdot (k+1)^{2\alpha+2}}{(2k+1)^{\alpha+1}}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}}.$$

On reconnaît $\|f_k\|_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2k+1)x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}$ (par le changement de variable $t = (2k+1)x$).

L'égalité peut donc aussi s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \|f_k\|_\alpha^2$.

19. D'après la question 7 appliquée à f_k et à la base orthonormale $\left(\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right)_{0 \leq n \leq N}$ de V_N :

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^N \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}.$$

D'après la question 18, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \|f_k\|_\alpha^2$. Donc :

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

en tant que reste d'une série convergente.

$$\boxed{\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.}$$

20. Pour $N \in \mathbb{N}$, $\pi_N(f_k)$ est une combinaison linéaire de $\psi_0, \dots, \psi_N$, qui sont des fonctions polynomiales (question 13). Donc $\pi_N(f_k) \in \mathcal{P}$.

D'après la question 19, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N assez grand tel que $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$.

$$\boxed{\text{En posant } p = \pi_N(f_k) \in \mathcal{P}, \text{ on a } \|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon.}$$

21. On définit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(-\ln t)$ pour $t \in]0, 1]$ et $g(0) = 0$.

Continuité de g : La fonction g est continue sur $]0, 1]$ par composition de fonctions continues. En 0 : lorsque $t \rightarrow 0^+$, on a $-\ln t \rightarrow +\infty$, donc $g(t) = f(-\ln t) \rightarrow 0$ car f tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$, et g est continue sur $[0, 1]$.

Approximation uniforme : D'après le résultat admis (théorème d'approximation de Weierstrass), pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe un polynôme $p(t) = \sum_{k=0}^n \lambda_k t^k$ tel que $|g(t) - p(t)| \leq \varepsilon'$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $e^{-x} \in]0, 1] \subset [0, 1]$ et $g(e^{-x}) = f(x)$, donc :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-kx} \right| = |g(e^{-x}) - p(e^{-x})| \leq \varepsilon'.$$

Passage à la norme : En élevant au carré et en intégrant :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-kx} \right)^2 dx \leq (\varepsilon')^2 \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = (\varepsilon')^2 \Gamma(\alpha + 1).$$

En choisissant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha + 1)}}$:

$$\boxed{\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.}$$

22. D'après la question 21 (appliquée avec le paramètre $\varepsilon/2$), il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $S = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|$. D'après la question 20, pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $\|f_k - p_k\|_\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2(S+1)}$.

On pose $p = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k$, qui est une combinaison linéaire de polynômes, donc $p \in \mathcal{P}$. Par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|f - p\|_\alpha &\leq \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha + \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k (f_k - p_k) \right\|_\alpha \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \|f_k - p_k\|_\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2} + S \cdot \frac{\varepsilon}{2(S+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Remarque :

Ce résultat signifie que l'espace des fonctions polynomiales $\mathcal{P}$ est **dense** dans l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 en $+\infty$, pour la norme $\|\cdot\|_\alpha$.

23. On définit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = h(\sqrt{x}) e^{x/2}$, comme suggéré par l'énoncé.

Vérification des hypothèses : La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. Puisque h est paire et nulle en dehors de $[-A, A]$, on a $h(\sqrt{x}) = 0$ dès que $\sqrt{x} > A$, i.e. $x > A^2$. Donc $f(x) = 0$ pour $x > A^2$: en particulier, f tend vers 0 en $+\infty$.

Choix de α : On prend $\alpha = -\frac{1}{2}$, qui vérifie bien $\alpha > -1$.

Application de la question 22 : La fonction f vérifie les hypothèses de la question 22. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme q tel que $\|f - q\|_{-1/2}^2 \leq \varepsilon$, i.e. :

$$\int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} (f(t) - q(t))^2 dt \leq \varepsilon.$$

Lien avec l'intégrale cherchée : On pose $p(x) = q(x^2)$, qui est bien une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$. Puisque h est paire et $x \mapsto p(x) e^{-x^2/2}$ est paire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-x^2/2} \right)^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \left(h(x) - q(x^2) e^{-x^2/2} \right)^2 dx.$$

Par le changement de variable $t = x^2$ ($x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$= 2 \int_0^{+\infty} \left(h(\sqrt{t}) - q(t) e^{-t/2} \right)^2 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \left(h(\sqrt{t}) - q(t) e^{-t/2} \right)^2 dt$$

où les intégrales ont la même nature que la première que l'on sait convergente.

Or $h(\sqrt{t}) = f(t) e^{-t/2}$ par définition de f , donc :

$$h(\sqrt{t}) - q(t) e^{-t/2} = e^{-t/2} (f(t) - q(t)).$$

En substituant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-x^2/2} \right)^2 dx = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} (f(t) - q(t))^2 dt = \|f - q\|_{-1/2}^2 \leq \varepsilon.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-x^2/2} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

Remarque :

Ce résultat signifie que toute fonction continue, paire et à support compact peut être approchée en norme $L^2(\mathbb{R})$ par des fonctions de la forme $x \mapsto p(x) e^{-x^2/2}$, c'est-à-dire par des combinaisons linéaires de fonctions $x^n e^{-x^2/2}$ (fonctions d'Hermite). L'énoncé affirme que ce résultat s'étend en fait à toute fonction continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.