

---



---

## CCINP - SEMAINE DU 18/05/2026

---

### Planche A

#### Exercice 1 - Majeur (14 points)

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$  telle que  $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$  converge.

1. Soit  $a \geq 1$ . À l'aide d'un changement de variable  $t = e^x$ , calculer  $\int_1^a \frac{\ln t}{t} dt$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t) dt.$$

En déduire que

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt.$$

3. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n).$$

Étudier la nature de  $\sum |v_n|$ .

En déduire que  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  converge si et seulement si  $\left( \int_1^n f(t) dt \right)_{n \geq 1}$  converge.

4. (a) Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  converge.

(b) En utilisant les mêmes procédés qu'auparavant, prouver que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos \sqrt{n}}{n}$  converge.

5. Montrer qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2} \ln^2 n + \ell + o(1).$$

#### Exercice 2 - Mineur (6 points)

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $AA^\top = A^\top A$ . On suppose que  $P = X^p$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

1. Montrer que  $P$  est annulateur de  $A^\top A$ .
2. En déduire que  $A = 0$ .

## Planche B

### Exercice 3 - Majeur (14 points)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) + 2\pi x y(x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

2. On donne  $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(a) Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $b_n : t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt$ .

3. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$B_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t) \exp(2i\pi xt) dt.$$

Montrer que  $B_n$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. Montrer que  $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$ .

5. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n \in E$ , où  $E$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et de la forme

$$f(t) = P(t) \exp(-\pi t^2),$$

où  $P$  est un polynôme.

### Exercice 4 - Mineur (6 points)

On considère  $N$  urnes numérotées de 1 à  $N$ . Dans l'urne  $i$ , il y a  $i$  boules numérotées de 1 à  $i$ .

On choisit au hasard successivement une urne (de manière équiprobable), puis une boule dans cette urne (de manière équiprobable). On note  $X$  le numéro de la boule tirée.

Donner la loi de  $X$ .

## Planche C

### Exercice 5 - Majeur (14 points)

On pose, pour tout  $x > 0$  :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. Montrer la convergence de  $S(x)$  pour  $x > 0$ .

2. (a) Pour  $a > 0$  fixé et pour tout  $x > a$  et  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2} \right| \leq \frac{1}{(a+n)^2}.$$

(b) Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x S(x) + x S(x+1) = 1.$$

(b) En déduire que  $S(x) \sim \frac{1}{x}$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ .

4. Préciser le tableau de variations de  $S$ .
5. Montrer que

$$S(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

### Exercice 6 - Mineur (6 points)

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{rg } A = 2$  et  $\text{Tr } A = 0$ .

1. Montrer que si  $A$  est diagonalisable, alors  $A^n \neq O_n$ .
2. Montrer que si  $A^n \neq O_n$ , alors  $A$  est diagonalisable.

## Planche D

### Exercice 7 - Majeur (14 points)

On pose  $g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2}$  pour  $t \in \mathbb{R}^*$ .

1. Montrer, après prolongement par continuité en 0, que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. On pose

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^p t}{t^2} dt \quad \text{où } p \in \mathbb{N}.$$

Pour quelles valeurs de  $p \in \mathbb{N}$  l'intégrale  $I_p$  converge-t-elle ?

3. (a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t.$$

(b) Montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

► On suppose désormais que  $p = 3$ .

4. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Soient  $U$  et  $V$  des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  telles qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  vérifiant  $U(a) = V(a)$ .

Montrer que

$$\int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

5. Déduire des questions précédentes la valeur de  $I_p$ .

### Exercice 8 - Mineur (6 points)

On munit  $\mathbb{R}^4$  du produit scalaire usuel et on considère

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}.$$

Déterminer une base orthonormale de  $F^\perp$ .

# Planche E

## Exercice 9 - Majeur (14 points)

Pour tout  $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ , on pose :

$$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x) P_n(x).$$

Soit  $F(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $F(0) = 0$ .

- Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{2x-1}{x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
- Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , puis montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) e^{-1/x}}{x^{2n+2}}.$$

- Étudier la limite à droite et à gauche de  $F$  en 0 (on pourra poser  $x = \frac{1}{u}$ ). Que peut-on dire de la continuité de  $F$  en 0 ?  
Mêmes questions avec la dérivabilité en 0.
  - Résoudre  $x^2 y' + (2x-1)y = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  (sur  $\mathbb{R}$  ?).
- On admet que :

$$P_1 = 1 - 2X, \quad P_2 = 1 - 6X + 6X^2, \quad P_3 = 1 - 12X + 36X^2 - 24X^3.$$

Déterminer le degré de  $P_n$  et son coefficient dominant.

- Est-il possible d'écrire  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  au voisinage de 0 où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels ?

## Exercice 10 - Mineur (6 points)

Soit  $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$f: M \mapsto M + \text{tr}(M) I_n.$$

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
- Déterminer  $(f \circ f)(M)$  pour tout  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . En déduire un polynôme annulateur de  $f$ .
- L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?