

---

# CCINP - CORRECTION - SEMAINE DU 18/05/2026

---

## Planche A - Correction

**Exercice 1 - Majeur (14 points)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$  telle que  $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$  converge.

1. Soit  $a \geq 1$ . On effectue le changement de variable  $\mathcal{C}^1$   $t = e^x$ , d'où  $dt = e^x dx$ , et quand  $t = 1$ ,  $x = 0$ ; quand  $t = a$ ,  $x = \ln a$ . L'intégrale est sur un segment, donc il n'y a pas d'autres hypothèses à vérifier. Ainsi :

$$\int_1^a \frac{\ln t}{t} dt = \int_0^{\ln a} \frac{x}{e^x} e^x dx = \int_0^{\ln a} x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\ln a} = \frac{(\ln a)^2}{2}$$

D'où :  $\boxed{\int_1^a \frac{\ln t}{t} dt = \frac{(\ln a)^2}{2}}$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue une intégration par parties sur le segment  $[n, n+1]$ . Posons  $u(t) = f(t)$  et  $v'(t) = 1$ , d'où  $u'(t) = f'(t)$  et  $v(t) = t - (n+1)$  (choix astucieux de la primitive de 1).

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[n, n+1]$  (segment), donc l'intégration par parties est licite :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} f(t) dt &= [f(t)(t - (n+1))]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f'(t)(t - (n+1)) dt \\ &= f(n+1) \cdot 0 - f(n) \cdot (n - (n+1)) - \int_n^{n+1} f'(t)(t - (n+1)) dt \\ &= f(n) + \int_n^{n+1} (n+1 - t) f'(t) dt \end{aligned}$$

D'où :  $\boxed{\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1 - t) f'(t) dt}$

Pour la majoration, on a pour  $t \in [n, n+1]$  :  $0 \leq n+1 - t \leq 1$ . Donc :

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| = \left| \int_n^{n+1} (n+1 - t) f'(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |n+1 - t| |f'(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$$

D'où :  $\boxed{\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt}$

3. On a  $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$  et d'après la question précédente :

$$|v_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$$

Or, par relation de Chasles :

$$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |f'(t)| dt = \int_1^{N+1} |f'(t)| dt \leq \int_1^{+\infty} |f'(t)| dt < +\infty$$

La série  $\sum \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$  converge (ses sommes partielles sont majorées et croissantes). Par comparaison de séries à termes positifs,  $\boxed{\sum |v_n| \text{ converge}}$ , donc  $\sum v_n$  converge (absolument).

**Équivalence série-intégrale :** On a  $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$ , soit :

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f(t) dt - \sum_{n=1}^N v_n = \int_1^{N+1} f(t) dt - \sum_{n=1}^N v_n$$

Puisque  $\sum v_n$  converge, notons  $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ . On a :

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^{N+1} f(t) dt - \sum_{n=1}^N v_n$$

Quand  $N \rightarrow +\infty$ ,  $\sum_{n=1}^N v_n \rightarrow V$  (constante finie). Donc  $\sum_{n=1}^N f(n)$  converge si et seulement si  $\int_1^{N+1} f(t) dt$  converge, ce qui équivaut à la convergence de  $(\int_1^n f(t) dt)_{n \geq 1}$ .

D'où :  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  converge si et seulement si  $(\int_1^n f(t) dt)_{n \geq 1}$  converge.

4. (a) Montrons que  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  converge. On intègre par parties : posons  $u(t) = \frac{1}{t}$  et  $v'(t) = \cos t$ , d'où  $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$  et  $v(t) = \sin t$ .

Pour  $A > 1$  :

$$\int_1^A \frac{\cos t}{t} dt = \left[ \frac{\sin t}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\sin t}{t^2} dt$$

Le crochet converge quand  $A \rightarrow +\infty$  car  $|\frac{\sin A}{A}| \leq \frac{1}{A} \rightarrow 0$ . L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$  converge absolument car  $|\frac{\sin t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge.

Donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  converge.

- (b) Posons  $g(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{t}$  pour  $t \geq 1$ . On a  $g'(t) = -\frac{\sin \sqrt{t}}{2t\sqrt{t}} - \frac{\cos \sqrt{t}}{t^2}$ , donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$ .

Montrons que  $\int_1^{+\infty} |g'(t)| dt$  converge. On a :

$$|g'(t)| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2}$$

Les deux intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  convergent (Riemann avec exposants  $3/2 > 1$  et  $2 > 1$ ). Donc  $\int_1^{+\infty} |g'(t)| dt$  converge.

D'après le résultat de la question 3,  $\sum_{n \geq 1} g(n) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos \sqrt{n}}{n}$  converge si et seulement si  $(\int_1^n g(t) dt)$  converge.

Or, par le changement de variable  $t = u^2$  ( $dt = 2u du$ ) :

$$\int_1^n \frac{\cos \sqrt{t}}{t} dt = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos u}{u^2} 2u du = 2 \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos u}{u} du$$

D'après la question 4a),  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$  converge, donc  $\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos u}{u} du$  converge quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Par le critère établi,  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos \sqrt{n}}{n}$  converge.

5. D'après la question 1,  $\int_1^n \frac{\ln t}{t} dt = \frac{(\ln n)^2}{2}$ . Posons  $h(t) = \frac{\ln t}{t}$  pour  $t \geq 1$ . On a  $h'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$ .

Pour  $t \geq e$  :  $|h'(t)| = \frac{\ln t - 1}{t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$ . Or  $\frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$  par croissances comparées, et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$  converge. Donc  $\int_1^{+\infty} |h'(t)| dt$  converge.

D'après la question 3, avec  $v_n = \int_n^{n+1} h(t) dt - h(n) = \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt - \frac{\ln n}{n}$ , la série  $\sum v_n$  converge. On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \int_1^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt - \sum_{k=1}^n v_k = \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \sum_{k=1}^n v_k$$

Or  $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ , donc :

$$\frac{(\ln(n+1))^2}{2} = \frac{(\ln n)^2}{2} + \frac{\ln n}{n} + o(1)$$

Posons  $V = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$  (reste de la série, qui tend vers 0). Alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{(\ln n)^2}{2} + \frac{\ln n}{n} + o(1) - V + R_n = \frac{(\ln n)^2}{2} - V + o(1)$$

car  $\frac{\ln n}{n} = o(1)$  et  $R_n = o(1)$ .

En posant  $\ell = -V$ , on obtient : 
$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2} \ln^2 n + \ell + o(1).$$

## Exercice 2 - Mineur (6 points)

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $AA^\top = A^\top A$  et  $P = X^p$  annulateur de  $A$ .

1. On a  $A^p = 0_n$  (puisque  $P(A) = A^p = 0_n$ ). Calculons  $(A^\top A)^p$  :

$$(A^\top A)^p = \underbrace{(A^\top A)(A^\top A) \cdots (A^\top A)}_{p \text{ fois}}$$

Puisque  $AA^\top = A^\top A$ , on peut permuter les facteurs. Plus précisément, montrons par récurrence que  $(A^\top A)^k = (A^\top)^k A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour  $k = 1$  c'est évident. Si  $(A^\top A)^k = (A^\top)^k A^k$ , alors :

$$(A^\top A)^{k+1} = (A^\top A)^k (A^\top A) = (A^\top)^k A^k A^\top A = (A^\top)^k (A^k A^\top) A$$

Or  $AA^\top = A^\top A$  implique (par récurrence facile) que  $A^k A^\top = A^\top A^k$  (en effet :  $A^{k+1} A^\top = A \cdot A^k A^\top = A \cdot A^\top A^k = A^\top A \cdot A^k = A^\top A^{k+1}$  en utilisant l'hypothèse de commutation).

Donc  $(A^\top A)^{k+1} = (A^\top)^k \cdot A^\top A^k \cdot A = (A^\top)^{k+1} A^{k+1}$ .

Ainsi  $(A^\top A)^p = (A^\top)^p A^p = (A^\top)^p \cdot 0_n = 0_n$ .

D'où :  $P = X^p$  est annulateur de  $A^\top A$ .

2. On a  $(A^\top A)^p = 0_n$ . Calculons  $\|(A^\top A)^p\|$  via la trace. On a :

$$A^\top A \cdot (A^\top A)^{p-1} = 0_n$$

En particulier, pour  $p = 1$ , si  $A^1 = A = 0$ , c'est terminé. Supposons  $p \geq 2$ .

Posons  $B = A^p = 0_n$ . Calculons  $\text{tr}((A^\top A)^p)$ . On a :

$$\text{tr}((A^\top A)^p) = \text{tr}((A^\top)^p A^p) = \text{tr}(0_n) = 0$$

Cependant, on peut raisonner plus directement. Puisque  $A^\top A$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres (réelles). De plus,  $A^\top A$  est symétrique positive (car pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $X^\top (A^\top A) X = \|AX\|^2 \geq 0$ ), donc  $\lambda_i \geq 0$ .

De  $(A^\top A)^p = 0_n$ , on déduit que  $\lambda_i^p = 0$  pour tout  $i$ , donc  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i$ .

Ainsi  $A^\top A = 0_n$  (matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont nulles, diagonalisable donc nulle).

Or  $A^\top A = 0_n$  signifie que pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  :  $\|AX\|^2 = X^\top A^\top A X = 0$ , donc  $AX = 0$ .

D'où :  $A = 0_n$ .

# Planche B - Correction

## Exercice 3 - Majeur (14 points)

1. L'équation  $y'(x) + 2\pi x y(x) = 0$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. On a  $a(x) = 2\pi x$ . Une primitive de  $a$  est  $A(x) = \pi x^2$ . Les solutions sont donc :

$$y(x) = C \exp(-\pi x^2), \quad C \in \mathbb{R}$$

La condition initiale  $y(0) = 1$  donne  $C \cdot e^0 = 1$ , soit  $C = 1$ .

D'où :  $y(x) = \exp(-\pi x^2)$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $b_n : t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrons qu'elle est intégrable. La fonction est paire si  $n$  est pair, impaire si  $n$  est impair. Il suffit d'étudier l'intégrabilité sur  $[0, +\infty[$  (et sur  $] -\infty, 0]$  par symétrie).

En  $+\infty$  : par croissances comparées,  $t^n e^{-\pi t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} (e^{-t})$ . Or  $t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc par comparaison,  $b_n$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Sur  $[0, 1]$ ,  $b_n$  est continue donc intégrable.

Par le même argument sur  $] -\infty, 0]$ ,  $b_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) On a  $b_0(t) = \exp(-\pi t^2)$ . Par le changement de variable affine  $u = \sqrt{\pi} t$  ( $du = \sqrt{\pi} dt$ ) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

D'où :  $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt = 1$ .

3. Montrons que  $B_n$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Posons  $\varphi_n(t, x) = t^n e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} = b_n(t) e^{2i\pi x t}$ .

$B_n$  **bien définie** : Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$|\varphi_n(t, x)| = |t^n e^{-\pi t^2}| \cdot |e^{2i\pi x t}| = |t^n e^{-\pi t^2}| = |b_n(t)|$$

qui est intégrable sur  $\mathbb{R}$  d'après la question 2a). Donc  $B_n(x)$  est bien définie pour tout  $x$ .

**Classe  $\mathcal{C}^1$**  : On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral. La dérivée partielle par rapport à  $x$  est :

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(t, x) = 2i\pi t \cdot t^n e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} = 2i\pi t^{n+1} e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t}$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \varphi_n(t, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (donc mesurable).
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \varphi_n(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- **Hypothèse de domination** : Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(t, x) \right| = 2\pi |t|^{n+1} e^{-\pi t^2}$$

qui est indépendant de  $x$  et intégrable sur  $\mathbb{R}$  car c'est  $2\pi |b_{n+1}(t)|$ , intégrable d'après 2a).

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral,  $B_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. Montrons que  $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$ . On a :

$$B_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} dt$$

D'après la question 3,  $B_0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$B_0'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi t e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} dt$$

Intégrons par parties. On a  $2i\pi t e^{-\pi t^2} = -i(-2\pi t e^{-\pi t^2}) = -i \frac{d}{dt}(e^{-\pi t^2})$ . Donc, en intégrant par parties ( $u = e^{2i\pi x t}$ ,  $v' = -2\pi t e^{-\pi t^2}$ ) :

$$\begin{aligned} B_0'(x) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}(e^{-\pi t^2}) e^{2i\pi x t} dt \\ &= -i \left( \left[ e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} 2i\pi x e^{2i\pi x t} dt \right) \end{aligned}$$

Le crochet est nul (car  $e^{-\pi t^2} \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$ ). Donc :

$$B_0'(x) = -i \times (-2i\pi x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} dt = -2\pi x B_0(x)$$

Ainsi  $B_0$  vérifie l'équation  $B_0'(x) + 2\pi x B_0(x) = 0$  avec  $B_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$  (question 2b).

D'après la question 1, la seule solution est  $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$ .

D'où :  $\boxed{B_0(x) = \exp(-\pi x^2)}$ .

5. Montrons par récurrence sur  $n$  que  $B_n \in E$ , c'est-à-dire  $B_n(x) = Q_n(x) e^{-\pi x^2}$  pour un certain polynôme  $Q_n$ .

**Initialisation** : Pour  $n = 0$ ,  $B_0(x) = e^{-\pi x^2} = 1 \cdot e^{-\pi x^2}$  avec  $Q_0 = 1$ . OK.

**Hérédité** : Supposons  $B_n(x) = Q_n(x) e^{-\pi x^2}$  pour un polynôme  $Q_n$ . D'après la question 3 :

$$B_n'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi t \cdot t^n e^{-\pi t^2} e^{2i\pi x t} dt = 2i\pi B_{n+1}(x)$$

Donc  $B_{n+1}(x) = \frac{1}{2i\pi} B_n'(x)$ .

Or  $B_n(x) = Q_n(x) e^{-\pi x^2}$ , donc :

$$B_n'(x) = Q_n'(x) e^{-\pi x^2} + Q_n(x) (-2\pi x) e^{-\pi x^2} = (Q_n'(x) - 2\pi x Q_n(x)) e^{-\pi x^2}$$

Ainsi :

$$B_{n+1}(x) = \frac{Q_n'(x) - 2\pi x Q_n(x)}{2i\pi} e^{-\pi x^2} = Q_{n+1}(x) e^{-\pi x^2}$$

où  $Q_{n+1}(x) = \frac{Q_n'(x) - 2\pi x Q_n(x)}{2i\pi}$  est bien un polynôme.

D'où :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in E}$ .

#### Exercice 4 - Mineur (6 points)

On choisit une urne  $i$  uniformément parmi  $\{1, \dots, N\}$ , puis une boule dans l'urne  $i$  uniformément parmi  $\{1, \dots, i\}$ . La variable  $X$  prend ses valeurs dans  $\{1, \dots, N\}$ .

Soit  $k \in \{1, \dots, N\}$ . Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (urne  $i$ ) $_{1 \leq i \leq N}$  :

$$P(X = k) = \sum_{i=1}^N P(\text{urne } i) \cdot P(X = k \mid \text{urne } i)$$

On a  $P(\text{urne } i) = \frac{1}{N}$ . De plus,  $P(X = k \mid \text{urne } i) = \frac{1}{i}$  si  $k \leq i$  (la boule  $k$  est dans l'urne  $i$ ) et 0 si  $k > i$ .

Donc :

$$P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \frac{1}{i}$$

D'où :  $\boxed{P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \frac{1}{i} \text{ pour } k \in \{1, \dots, N\}}$ .

# Planche C - Correction

## Exercice 5 - Majeur (14 points)

On pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$  pour  $x > 0$ .

1. Pour  $x > 0$ , posons  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ . La suite  $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n \geq 0}$  est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, la série  $\sum u_n(x)$  converge pour tout  $x > 0$ .

2. (a) Pour  $x > a > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2} \right| = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{(a+n)^2}$$

car  $x > a$  implique  $x+n > a+n > 0$ .

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2} \right| \leq \frac{1}{(a+n)^2}.$$

(b) On pose  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$  pour  $x > 0$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ .
- La série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  (question 1).
- Pour tout  $a > 0$  et  $x > a$  :  $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{(a+n)^2}$ , et  $\sum \frac{1}{(a+n)^2}$  converge (Riemann). Donc  $\sum f'_n$  converge normalement, et donc uniformément, sur  $]a, +\infty[$ .

Par le théorème de dérivation terme à terme sur  $]a, +\infty[$ ,  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a, +\infty[$ . Ceci étant vrai pour tout  $a > 0$ ,  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. (a) Pour  $x > 0$  :

$$S(x) + S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+1+n}$$

Dans la seconde somme, on a  $\frac{(-1)^n}{x+1+n} = -\frac{(-1)^{n+1}}{x+(n+1)}$ . En posant  $m = n+1$  :

$$S(x+1) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^m}{x+m} = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{x+m}$$

Donc :

$$S(x) + S(x+1) = \frac{(-1)^0}{x+0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{x+m} = \frac{1}{x}$$

D'où  $xS(x) + xS(x+1) = 1$ , soit  $xS(x) + xS(x+1) = 1$  pour tout  $x > 0$ .

(b) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $S(x+1) \rightarrow S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = \ln 2$  car  $S$  est continue (la valeur n'est pas importante pour conclure).

Donc  $xS(x+1) \rightarrow 0 \cdot \ln 2 = 0$ .

De  $xS(x) + xS(x+1) = 1$ , on déduit  $xS(x) \rightarrow 1$ .

D'où :  $S(x) \sim \frac{1}{x}$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ .

4. On a  $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$  pour  $x > 0$ .

Posons  $g_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2}$ . La suite  $(g_n(x))$  est décroissante (en  $n$ ) et tend vers 0. Par le TSSA,  $\sum (-1)^n g_n(x)$  converge et sa somme est positive (car le premier terme  $\frac{1}{x^2}$  domine).

Donc  $S'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} < 0$  pour tout  $x > 0$  (la somme alternée est strictement positive car son premier terme  $\frac{1}{x^2} > 0$  et la suite est décroissante).

Ainsi  $S$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus,  $S(x) \sim \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$  :  $|S(x)| \leq \frac{1}{x}$  (par le TSSA, le reste est majoré par le premier terme), donc  $S(x) \rightarrow 0$ .

$S$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$ .

5. Soit  $x > 0$ . Pour  $t \in ]0, 1[$ , on a  $|-t| < 1$  donc la série géométrique donne :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (-t)^n$$

Posons  $S_N(t) = t^{x-1} \sum_{n=0}^N (-t)^n = \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{x-1+n}$  la suite des sommes partielles. On a :

$$S_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \quad \text{pour tout } t \in ]0, 1[$$

**Domination :** Par le TSSA (la suite  $(t^{x-1+n})_n$  est décroissante et positive pour  $t \in ]0, 1[$ ), la somme partielle alternée est majorée par son premier terme :

$$|S_N(t)| \leq t^{x-1} \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}, t \in ]0, 1[$$

La fonction  $t \mapsto t^{x-1}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  car  $x-1 > -1$  (puisque  $x > 0$ ), avec  $\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$ .

Par le théorème de convergence dominée (appliqué à la suite  $(S_N)$ ) :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^{x-1+n} dt$$

Or  $\int_0^1 t^{x-1+n} dt = \frac{1}{x+n}$ . Donc :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = S(x)$$

D'où : 
$$S(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

### Exercice 6 - Mineur (6 points)

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{rg } A = 2$  et  $\text{Tr } A = 0$ .

1. Supposons  $A$  diagonalisable. Puisque  $\text{rg } A = 2$ , le noyau de  $A$  est de dimension  $n-2$ , donc 0 est valeur propre de multiplicité  $n-2$ .

Notons  $\lambda_1, \lambda_2$  les deux valeurs propres non nulles (comptées avec multiplicité). La trace donne  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , soit  $\lambda_2 = -\lambda_1$  avec  $\lambda_1 \neq 0$ .

Puisque  $A$  est diagonalisable,  $A$  est semblable à  $\text{diag}(\lambda_1, -\lambda_1, 0, \dots, 0)$ . Donc :

$$A^n \text{ est semblable à } \text{diag}(\lambda_1^n, (-\lambda_1)^n, 0, \dots, 0)$$

Or  $\lambda_1^n \neq 0$  car  $\lambda_1 \neq 0$ . Donc  $A^n \neq O_n$ .

D'où : Si  $A$  est diagonalisable, alors  $A^n \neq O_n$ .

2. Supposons  $A^n \neq O_n$ . Montrons que  $A$  est diagonalisable.

Puisque  $\text{rg } A = 2$ , la dimension du noyau est  $n-2$ , donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité au moins  $n-2$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  est de degré  $n$  et 0 est racine d'ordre au moins  $n-2$ . On peut écrire  $\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-2} Q(\lambda)$  où  $Q$  est un polynôme de degré 2.

De  $\text{Tr } A = 0$ , la somme de toutes les valeurs propres (comptées avec multiplicité) est nulle. Les racines de  $Q$  sont les éventuelles valeurs propres non nulles  $\lambda_1, \lambda_2$  avec  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ .

**Cas 1 :** Si  $Q$  a deux racines distinctes non nulles  $\lambda_1$  et  $-\lambda_1$ . Alors  $\chi_A = \lambda^{n-2}(\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_1)$  a ses racines simples (sauf 0 d'ordre  $n-2$ ). La dimension du sous-espace propre associé à 0 est  $\dim \ker A = n - \text{rg } A = n-2$  qui coïncide avec la multiplicité. Les sous-espaces propres de  $\lambda_1$  et  $-\lambda_1$  sont de dimension au moins 1 (= leur multiplicité). Donc  $A$  est diagonalisable.

**Cas 2 :** Si  $Q$  a une racine double  $\mu$ . Alors  $2\mu + 0 = 0$  donne  $\mu = 0$ , et  $\chi_A = \lambda^n$ . Alors  $A$  est nilpotente et donc  $A^n = 0$ , ce qui contredit  $A^n \neq O_n$ .

**Cas 3 :** Si  $Q$  a 0 comme racine simple et une autre racine  $\mu \neq 0$ . Alors  $\mu = 0$  par la trace, contradiction.

Seul le cas 1 est compatible avec  $A^n \neq O_n$ .

D'où : Si  $A^n \neq O_n$ , alors  $A$  est diagonalisable.

# Planche D - Correction

## Exercice 7 - Majeur (14 points)

On pose  $g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2}$  pour  $t \in \mathbb{R}^*$ .

1. En 0, on a  $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ , donc  $\sin t - t = -\frac{t^3}{6} + o(t^3)$  et :

$$g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2} = -\frac{t}{6} + o(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

On prolonge  $g$  par continuité en posant  $g(0) = 0$ . La fonction prolongée est continue en 0 (par définition du prolongement), et continue sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions continues avec dénominateur non nul.

D'où : Après prolongement par  $g(0) = 0$ ,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. On a  $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^p t}{t^2} dt$ .

**Étude en  $0^+$**  :  $\frac{\sin^p t}{t^2} \sim \frac{t^p}{t^2} = t^{p-2}$ . L'intégrabilité en  $0^+$  requiert  $p - 2 > -1$ , soit  $p \geq 2$  (pour  $p = 0$  ou  $p = 1$ , la fonction se comporte comme  $\frac{1}{t^2}$  ou  $\frac{1}{t}$  en  $0^+$  qui ne sont pas intégrables).

Plus précisément : pour  $p = 0$ ,  $\frac{1}{t^2}$  n'est pas intégrable en  $0^+$ . Pour  $p = 1$ ,  $\frac{\sin t}{t^2} \sim \frac{1}{t}$  en  $0^+$ , non intégrable.

Comme l'intégrande est positive au voisinage de 0, l'intégrabilité est équivalente à la convergence.

**Étude en  $+\infty$**  :  $|\frac{\sin^p t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$  pour tout  $t \geq 1$ , et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge. Donc l'intégrale converge en  $+\infty$  pour tout  $p$ .

D'où :  $I_p$  converge si et seulement si  $p \geq 2$ .

3. (a) On utilise les formules de linéarisation. On a  $\sin^3 t = \sin t \cdot \sin^2 t = \sin t \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2}$ . Or :

$$\sin t \cdot \cos 2t = \frac{1}{2}(\sin 3t + \sin(-t)) = \frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t)$$

Donc :

$$\sin^3 t = \frac{\sin t}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t) = \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin 3t}{4} + \frac{\sin t}{4} = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$$

D'où :  $\sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$ .

**Remarque** : Sinon, on passe par les formules d'Euler.

- (b) Pour  $x > 0$ , on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2} dt$$

Toutes les intégrales convergent si  $x > 0$ .

Dans la seconde intégrale, effectuons le changement de variable  $u = 3t$  ( $du = 3 dt$ ,  $t = u/3$ ) :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2} dt = \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin u}{(u/3)^2} \frac{du}{3} = 3 \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$$

Donc :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \left( \int_x^{+\infty} - \int_{3x}^{+\infty} \right) \frac{\sin t}{t^2} dt$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

D'où :  $\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ .

4. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $U$  et  $V$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que  $U(a) = V(a)$  pour un certain  $a \in \mathbb{R}$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  (qui existe car  $f$  est continue). On a :

$$\int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt = F(V(x)) - F(U(x))$$

Quand  $x \rightarrow a : U(x) \rightarrow U(a)$  et  $V(x) \rightarrow V(a) = U(a)$  par continuité. Par continuité de  $F$  :

$$F(V(x)) - F(U(x)) \rightarrow F(U(a)) - F(U(a)) = 0$$

D'où :  $\boxed{\int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.}$

5. On a, d'après la question 3b), pour  $x > 0$  :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

Or  $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ . Donc :

$$I_3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

D'après la question 4 avec  $f(t) = \frac{\sin t}{t^2}$  (continue sur  $\mathbb{R}^*$  mais pas en 0), on ne peut pas appliquer directement le résultat. Cependant, on peut écrire :

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{3x} \frac{\sin t - t}{t^2} dt + \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$$

Le premier terme :  $\frac{\sin t - t}{t^2} = g(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (question 1). On applique la question 4 avec  $U(x) = x$ ,  $V(x) = 3x$ ,  $a = 0 : U(0) = V(0) = 0$ . Donc  $\int_x^{3x} g(t) dt \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

Le second terme :

$$\int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \ln(3x) - \ln(x) = \ln 3$$

Donc :

$$I_3 = \frac{3}{4} (0 + \ln 3) = \frac{3 \ln 3}{4}$$

D'où :  $\boxed{I_3 = \frac{3 \ln 3}{4}.}$

### Exercice 8 - Mineur (6 points)

On a  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$ .

**Détermination de  $F$  :** Les deux équations donnent :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

En sommant :  $2x + 2z = 0$ , soit  $z = -x$ . En soustrayant :  $2y + 2t = 0$ , soit  $t = -y$ .

Donc  $F = \{(x, y, -x, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ .

**Détermination de  $F^\perp$  :** On a  $\dim F^\perp = 4 - 2 = 2$ . L'espace  $F^\perp$  est l'ensemble des  $(a, b, c, d)$  tels que :

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la base précédemment trouvée. Ainsi  $c = a$  et  $d = b$ . Donc  $F^\perp = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ .

Cette famille est déjà orthogonale (leur produit scalaire vaut 0). On normalise :

$$\|(1, 0, 1, 0)\| = \sqrt{2}, \quad \|(0, 1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$$

D'où :  $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)\right)}$  est une base orthonormale de  $F^\perp$ .

# Planche E - Correction

## Exercice 9 - Majeur (14 points)

Pour  $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$  :  $P_0(x) = 1$  et  $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x)P_n(x)$ .  
 $F(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$  pour  $x \neq 0$  et  $F(0) = 0$ .

1. On cherche une primitive de  $h(x) = \frac{2x-1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .

Une primitive de  $\frac{2}{x}$  est  $2 \ln |x|$  et une primitive de  $-\frac{1}{x^2}$  est  $\frac{1}{x}$ .

D'où :  $H(x) = 2 \ln |x| + \frac{1}{x}$  est une primitive de  $\frac{2x-1}{x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

2.  $F$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  : Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $F(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$  est un produit et une composée de fonctions  $C^\infty$  ( $x \mapsto 1/x$ , l'exponentielle,  $x \mapsto x^{-2}$ ), donc  $F$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Récurrence** : Montrons que  $F^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n+2}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Initialisation** ( $n = 0$ ) :  $F^{(0)}(x) = F(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{P_0(x)e^{-1/x}}{x^2}$  car  $P_0 = 1$ . OK.

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $F^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n+2}}$ . On dérive ce produit de trois fonctions :

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= P_n'(x) e^{-1/x} x^{-(2n+2)} + P_n(x) \frac{1}{x^2} e^{-1/x} x^{-(2n+2)} \\ &\quad + P_n(x) e^{-1/x} (-(2n+2)) x^{-(2n+3)} \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^{2n+2}} \left( P_n'(x) + \frac{P_n(x)}{x^2} \right) - \frac{(2n+2) P_n(x) e^{-1/x}}{x^{2n+3}} \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^{2n+4}} (x^2 P_n'(x) + P_n(x) - (2n+2)x P_n(x)) \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^{2(n+1)+2}} (x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x) P_n(x)) \\ &= \frac{P_{n+1}(x) e^{-1/x}}{x^{2(n+1)+2}} \end{aligned}$$

D'où :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, F^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n+2}}$ .

3. (a) **Limite à droite en 0** : Posons  $x = \frac{1}{u}$  avec  $u \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^+$  :

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = u^2 e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées. Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 = F(0)$ .

**Limite à gauche en 0** : Posons  $x = -\frac{1}{u}$  avec  $u \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^-$  :

$$F\left(-\frac{1}{u}\right) = u^2 e^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = +\infty$  :  $F$  n'a pas de limite finie à gauche en 0.

$F$  n'est pas continue en 0 (pas de limite finie à gauche).

**Dérivabilité à droite en 0** :  $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{e^{-1/x}}{x^3}$ . En posant  $x = 1/u$  :  $u^3 e^{-u} \rightarrow 0$ . Donc  $F$  est dérivable à droite en 0 avec  $F_d'(0) = 0$ .

$F$  n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est même pas continue à gauche en 0.

(b) L'équation  $x^2 y' + (2x-1)y = 0$  s'écrit, pour  $x \neq 0$  :

$$y' + \frac{2x-1}{x^2} y = 0$$

C'est une équation linéaire homogène d'ordre 1. Une primitive de  $\frac{2x-1}{x^2}$  est  $2 \ln|x| + \frac{1}{x}$  (question 1).

Sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  $y(x) = C \exp(-2 \ln x - \frac{1}{x}) = \frac{C e^{-1/x}}{x^2} = C F(x)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Sur  $\mathbb{R}_-^*$  :  $y(x) = C' \exp(-2 \ln(-x) - \frac{1}{x}) = \frac{C' e^{-1/x}}{x^2} = C' F(x)$ ,  $C' \in \mathbb{R}$ .

Les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont  $y = CF$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont  $y = C'F$ , avec  $C, C' \in \mathbb{R}$ .

**Recollement sur  $\mathbb{R}$**  : Cherchons les solutions de  $x^2 y' + (2x-1)y = 0$  sur  $\mathbb{R}$  entier, c'est-à-dire continues (et dérivables) en 0, avec  $y(0) = 0$  (car en 0 l'équation donne  $0 + (-1)y(0) = 0$ ).

- Sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  $y = CF$  avec  $CF(x) = \frac{C e^{-1/x}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = y(0)$  pour tout  $C$  (croissances comparées). Le recollement à droite est donc automatique.
- Sur  $\mathbb{R}_-^*$  :  $y = C'F$  avec  $C'F(x) = \frac{C' e^{-1/x}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \pm\infty$  si  $C' \neq 0$  (car  $e^{-1/x} \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^-$ ). La continuité en 0 impose donc  $C' = 0$ .

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont  $y(x) = CF(x)$  pour  $x \geq 0$  et  $y(x) = 0$  pour  $x < 0$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ .

4. D'après la relation de récurrence  $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x)P_n(x)$ .

Si  $\deg P_n = n$  avec coefficient dominant  $a_n$ , alors :

- $\deg(x^2 P_n') = 2 + (n-1) = n+1$ , coefficient dominant  $n a_n$ .
- $\deg(-2(n+1)x P_n) = 1 + n = n+1$ , coefficient dominant  $-2(n+1)a_n$ .
- $\deg((1)P_n) = n < n+1$ .

Donc  $\deg P_{n+1} = n+1$  et  $a_{n+1} = n a_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n$ .

On vérifie avec les valeurs données :  $P_0 = 1$  ( $a_0 = 1$ , degré 0),  $P_1 = 1 - 2X$  ( $a_1 = -2$ , degré 1),  $P_2 = 1 - 6X + 6X^2$  ( $a_2 = 6$ , degré 2),  $P_3 = 1 - 12X + 36X^2 - 24X^3$  ( $a_3 = -24$ , degré 3).

On a  $a_{n+1} = -(n+2)a_n$  avec  $a_0 = 1$ , d'où :

$$a_n = (-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1) = (-1)^n (n+1)!$$

**Vérification** :  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 6$ ,  $a_3 = -24$ . OK.

D'où :  $\deg P_n = n$  et le coefficient dominant de  $P_n$  est  $(-1)^n (n+1)!$ .

5. Supposons que  $F$  soit développable en série entière au voisinage de 0 :  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $|x| < r$  avec  $r > 0$ .

Alors  $F$  serait  $\mathcal{C}^\infty$  en 0 et  $a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$ . Or la question 3a) montre que  $F$  n'est même pas continue à gauche en 0 (car  $F(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^-$ ). Mais une série entière de rayon  $r > 0$  est continue sur  $] -r, r[$ , et en particulier en 0, ce qui contredit la discontinuité à gauche.

D'où :  $F$  n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

### Exercice 10 - Mineur (6 points)

Soit  $f : M \mapsto M + \text{tr}(M) I_n$ .

1. Pour  $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= (M + \lambda N) + \text{tr}(M + \lambda N) I_n \\ &= M + \lambda N + (\text{tr}(M) + \lambda \text{tr}(N)) I_n \\ &= (M + \text{tr}(M) I_n) + \lambda (N + \text{tr}(N) I_n) \\ &= f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

D'où :  $f$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

2. Pour  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} (f \circ f)(M) &= f(f(M)) = f(M + \text{tr}(M) I_n) \\ &= M + \text{tr}(M) I_n + \text{tr}(M + \text{tr}(M) I_n) I_n \\ &= M + \text{tr}(M) I_n + (\text{tr}(M) + n \text{tr}(M)) I_n \\ &= M + \text{tr}(M) I_n + (n+1) \text{tr}(M) I_n \\ &= M + (n+2) \text{tr}(M) I_n \end{aligned}$$

Ainsi  $f^2(M) = M + (n+2)\operatorname{tr}(M)I_n$ .

De plus,  $(n+2)f(M) = (n+2)M + (n+2)\operatorname{tr}(M)I_n$ .

Donc  $f^2(M) - (n+2)f(M) = M - (n+2)M = -(n+1)M$ .

Soit  $f^2(M) - (n+2)f(M) + (n+1)M = 0$  pour tout  $M$ .

D'où :  $P = X^2 - (n+2)X + (n+1) = (X-1)(X-(n+1))$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

3. Le polynôme annulateur  $(X-1)(X-(n+1))$  est scindé à racines simples (car  $n \geq 1$  implique  $n+1 \neq 1$ ).

Donc  $f$  est diagonalisable.

#### Description des sous-espaces propres :

$\ker(f - \operatorname{Id}) = \{M \mid \operatorname{tr}(M)I_n = 0\} = \{M \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$  : c'est l'hyperplan des matrices de trace nulle, de dimension  $n^2 - 1$ .

$\ker(f - (n+1)\operatorname{Id}) = \{M \mid M + \operatorname{tr}(M)I_n = (n+1)M\} = \{M \mid \operatorname{tr}(M)I_n = nM\}$ , soit  $M = \frac{\operatorname{tr}(M)}{n}I_n = \lambda I_n$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ . C'est  $\operatorname{Vect}(I_n)$ , de dimension 1.

On vérifie :  $(n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . OK.