
CCINP - SEMAINE DU 25/05/2026

Planche F

Exercice 1 - Majeur (14 points)

Soit

$$h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^3 - y^2 \end{array}$$

Soit l'ensemble $C = \{(x, y) \mid h(x, y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , puis montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de h .
 h admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?
2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 et telle que $f(x, y) = 0$ pour (x, y) dans C .
 - (a) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t^2, t^3) = 0$.
 - (b) En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
3. Soit

$$\varphi_t: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto f(t^2, u) \end{array}$$

Justifier que φ_t est dérivable sur \mathbb{R} et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3, t^3[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$.

4. Conclure que $(0, 0)$ est un point critique pour f .
5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C .

Exercice 2 - Mineur (6 points)

Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Planche G

Exercice 3 - Majeur (14 points)

Soit h une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , à valeurs positives, de classe \mathcal{C}^2 , convexe et de dérivée strictement négative.

1. Montrer que $x \mapsto e^{-x}$ vérifie ces hypothèses.
2. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + h'(x)$$
 - (a) Montrer que g est strictement croissante, et vérifier que $g(0) < 0$.
 - (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution. On la notera α .
3. Soit f l'application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , qui à (x, y) associe $x^2 - 2xy + 2y^2 + h(x)$.
 - (a) Montrer que $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$ est l'unique point critique de f .
 - (b) Montrer que f admet un extremum local et déterminer sa nature.

4. On pose $\phi: ((x, y), (x', y')) \mapsto xx' - xy' - x'y + 2yy'$; on admet que ϕ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

Montrer que

$$\exists k > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 - 2xy + 2y^2 \geq k(x^2 + y^2).$$

5. Montrer que l'extremum de f est global.

Exercice 4 - Mineur (6 points)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle et

$$\begin{aligned} f: \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ B &\longmapsto (\operatorname{Tr} A) B - (\operatorname{Tr} B) A \end{aligned}$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)$.
2. f est-elle diagonalisable ?

Planche H

Exercice 5 - Majeur (14 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de la norme usuelle $\|\cdot\|$.

On dit que f est un **endomorphisme stabilisant** lorsque

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x) | x \rangle = \|x\|^2.$$

Soit h l'endomorphisme de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de E .

1. Montrer que h est stabilisant.
2. Soit f un endomorphisme stabilisant. On pose $g = f - \operatorname{Id}$.
 - (a) Montrer que $\forall x \in E, \langle g(x) | x \rangle = 0$.
 - (b) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible pour g .
En examinant son polynôme caractéristique, montrer que 0 est la seule valeur propre de g .
3.
 - (a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle g(x) | y \rangle + \langle g(y) | x \rangle = 0$.
 - (b) Montrer que $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont orthogonaux.
4. On suppose désormais que g n'est pas l'application nulle.
Soit $e_1 \in E$, de norme 1, un vecteur propre associé à la valeur propre 0 de g . Soit $e_2 \in E$, de norme 1, tel que $e_2 \in \operatorname{Im}(g)$.
 - (a) Montrer que $g(e_2) \neq 0$.
 - (b) On pose $e_3 = \frac{1}{\|g(e_2)\|} g(e_2)$. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E .
 - (c) Exprimer les matrices associées aux endomorphismes g et f dans la base (e_1, e_2, e_3) .

Exercice 6 - Mineur (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) :

$$x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{1/2} = 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution dans \mathbb{R}^{+*} , notée x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante.

Planche A

Exercice 7 - Majeur (14 points)

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On pose $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, dite *dérivée* de la suite $(a_n)_n$.

► On admet que si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, divergente vers $+\infty$, telle que $\left(\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}\right) \rightarrow L$, alors $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow L$.

On pose $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \exp(-\alpha_n)$.

1. Montrer que $(\alpha_n)_n$ est monotone et qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. (a) Trouver un équivalent de $\exp(\exp(-\alpha_n)) - 1$, puis déterminer la limite de $\Delta \exp(\alpha_n)$.
(b) Montrer que $\exp(\alpha_n) \sim n$.
3. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Exercice 8 - Mineur (6 points)

Soit $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1$ et $Q = (n+1)X^n - nX^{n+1} - 1$.

1. Montrer que P et Q possèdent les mêmes racines.
2. Montrer que toutes les racines de P sont simples.

Planche B

Exercice 9 - Majeur (14 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = -4 + \sum_{k=1}^n x^k$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x > 0$ tel que $P_n(x) = 0$.

► On note cette solution x_n dans la suite.

2. (a) Déterminer x_1 et x_2 et montrer que $x_5 < 1$.
(b) Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de $(x_n)_{n \geq 1}$ ainsi que sa convergence vers une limite notée ℓ .
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.
(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{n+1} = 0$ et en déduire la valeur de ℓ .

► On note $\delta_n = x_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Démontrer que $\delta_n = \frac{1}{5}x_n^{n+1}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\delta_n = 0$.
5. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $x_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} k\ell^{n+1}$ et déterminer la valeur de k .

Exercice 10 - Mineur (6 points)

Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & (0) \\ & & & & \vdots \\ & & & & (0) \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ & & & & (0) \\ & & & & \vdots \\ & & & & (0) \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 .
2. M est-elle diagonalisable ?
3. Donner une valeur propre de M .

Planche C**Exercice 11 - Majeur (14 points)**

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

2. On pose, pour r réel, $s(r) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x} dx$.

- (a) Déterminer le domaine \mathcal{D} de définition de s .
- (b) Montrer par un changement de variable que pour tout $r \in \mathcal{D}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t} dt$$

3. L'objet de cette question est le calcul de $s(r)$ pour tout $r \in \mathcal{D}$.

- (a) Étant donné $\alpha > -1$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+\alpha} dt$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$, on a $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+\alpha} \right| \leq t^n$ et en déduire que (u_n) converge vers 0.

- (b) En déduire, étant donné $\alpha > -1$, la valeur de $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t} dt$ sous la forme de la somme d'une série, puis celle de $s(r)$.

Exercice 12 - Mineur (6 points)

Soit E un espace euclidien, $g \in \mathcal{O}(E)$ et $f = g - \text{Id}_E$. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)^\perp$.

Planche D

Exercice 13 - Majeur (14 points)

On pose : $\forall x \in]0, 1], \varphi(x) = -x \ln x$.

- Donner le tableau de variations de φ sur $]0, 1]$.
Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* .

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = P(X = n)$.

On appelle entropie de X , lorsqu'elle existe, la quantité :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(p_n).$$

- On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p .
Montrer que X admet une entropie et la calculer.

On revient au cas général d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* et on suppose que celle-ci est d'espérance finie.

- (a) Montrer que $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
(b) Montrer que $\sqrt{p_n} \ln^2(p_n) \leq 4$.

- Déduire de la question 3 que :

$$0 \leq -p_n \ln p_n \leq np_n + \frac{4}{n^{3/2}} \sqrt{np_n}$$

- En déduire que X admet une entropie.

Exercice 14 - Mineur (6 points)

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$.
$$P \longmapsto \frac{1}{2}(P(X) - P(1 - X))$$

- Calculer φ^2 .
- Démontrer que $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect} \left(X - \frac{1}{2}, \left(X - \frac{1}{2} \right)^3 \right)$ et $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect} \left(1, \left(X - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$.
- Montrer que φ est un projecteur et en identifier les éléments géométriques.

Planche E

Exercice 15 - Majeur (14 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad . \\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

On pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. (a) La convergence est-elle normale sur \mathbb{R}_+ ?
(b) Montrer que, pour tout $a > 0$, la série converge normalement sur $[a, +\infty[$.
En déduire que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(x) - R_{2n}(x) \geq \frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$.
(b) En déduire que $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

4. On admet (ε) :

$$\forall x > 0, \quad 2 \arctan \frac{1}{x} \leq S(x) \leq 2 \arctan \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

Montrer que S n'est pas continue en 0.

5. Démontrer (ε) .

Exercice 16 - Mineur (6 points)

Soit E un espace euclidien et $(a, b) \in E^2$ une famille libre de vecteurs unitaires.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E$.
 $x \longmapsto (x | a)b + (x | b)a$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(a, b)^\perp$.
3. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$.
4. Évaluer $\varphi(a+b)$ et $\varphi(a-b)$; φ est-il diagonalisable ?