CCINP - Correction - Semaine du 25/05/2026

Planche F - Correction

Exercice 1 - Majeur (14 points)

Soit $h : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$ et $C = \{(x, y) \mid h(x, y) = 0\}$.

1. La fonction h est polynomiale en (x, y), donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Les dérivées partielles sont :
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 3x^2, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -2y$$
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$(x, y) \text{ point critique} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) & = & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0.$$
   $\boxed{(0, 0) \text{ est le seul point critique de } h.}$

   Extremum local en $(0, 0)$? On a $h(0, 0) = 0$. Dans tout voisinage de $(0, 0)$, on peut trouver des points où $h > 0$ (par exemple $(x, 0)$ avec $x > 0$ donne $h = x^3 > 0$) et des points où $h < 0$ (par exemple $(x, 0)$ avec $x < 0$ donne $h = x^3 < 0$). Donc $\boxed{h \text{ n'admet pas d'extremum local en } (0, 0).}$

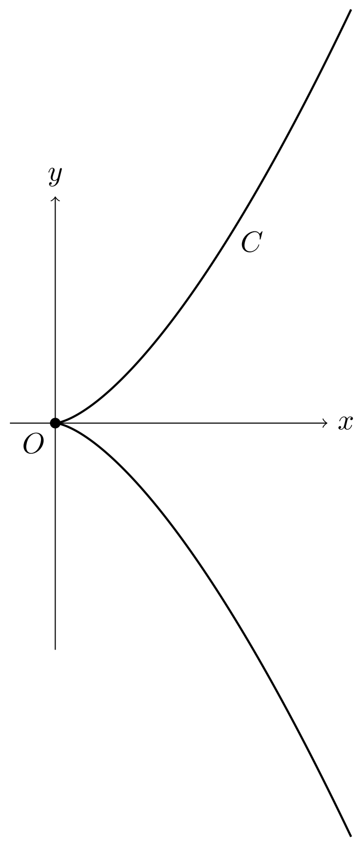
2. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $x = t^2$ et $y = t^3$. Alors :
$$h(t^2, t^3) = (t^2)^3 - (t^3)^2 = t^6 - t^6 = 0$$
   Donc $(t^2, t^3) \in C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque f s'annule sur C, on a $\boxed{f(t^2, t^3) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.}$

   (b) Posons $\psi(t) = f(t^2, t^3)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et (t^2, t^3) est $\mathcal{C}^1$ en t, la composée ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$$\psi'(t) = 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2\,\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)$$
   Or $\psi(t) = 0$ pour tout t, donc $\psi'(t) = 0$ pour tout t. En évaluant en $t = 0$:
$$\psi'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + 3 \cdot 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$
   Cela donne $0 = 0$, ce qui ne suffit pas. En revanche, on peut d'abord diviser par t (pout $t \neq 0$) puis prendre la limite par continuité. On a :
$$2\,\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t\,\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) = 0$$
   En passant à la limite quand $t \to 0$, par continuité des dérivées partielles de f (car f est $\mathcal{C}^1$) :
$$2\,\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + 0 = 0$$
   D'où : $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.}$

3. La fonction $\varphi_t : u \mapsto f(t^2, u)$ est la composée de f (de classe $\mathcal{C}^1$) avec l'application $u \mapsto (t^2, u)$ (de classe $\mathcal{C}^1$), donc φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\varphi_t'(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, u)$$
On a $\varphi_t(t^3) = f(t^2, t^3) = 0$ et $\varphi_t(-t^3) = f(t^2, -t^3)$.
Or $h(t^2, -t^3) = (t^2)^3 - (-t^3)^2 = t^6 - t^6 = 0$, donc $(t^2, -t^3) \in C$ et $f(t^2, -t^3) = 0$.
Ainsi $\varphi_t(-t^3) = \varphi_t(t^3) = 0$.
Pour $t \neq 0$, $-t^3 \neq t^3$, et φ_t est continue et dérivable. Par le théorème de Rolle appliqué à φ_t sur l'intervalle $[-t^3, t^3]$ (ou $[t^3, -t^3]$ selon le signe de t), il existe $\gamma(t)$ strictement compris entre $-t^3$ et t^3 tel que :
$$\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$$
Soit $\boxed{\exists\, \gamma(t) \in]-t^3, t^3[\text{ tel que } \varphi_t'(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t)) = 0.}$

4. On a $|\gamma(t)| < |t|^3$, donc $\gamma(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Par la question 3 :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \neq 0$$
Quand $t \to 0$, on a $t^2 \to 0$ et $\gamma(t) \to 0$. Par continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ (car f est $\mathcal{C}^1$) :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t)) = 0$$
Avec la question 2b) qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, on conclut :
$\boxed{(0,0) \text{ est un point critique de } f.}$

5. La courbe C est l'ensemble $\{(x,y) \mid y^2 = x^3\}$, i.e. $y = \pm x^{3/2}$ pour $x \geqslant 0$. C'est une *parabole semicubique* (ou point de rebroussement en $(0,0)$).



La courbe C est paramétrée par $t \mapsto (t^2, t^3)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 - Mineur (6 points)

Factoriser $P(X) = X^4 + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

On cherche à écrire $X^4 + 4$ comme produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels. Remarquons que :

$$\begin{aligned} X^4 + 4 &= X^4 + 4X^2 + 4 - 4X^2 \\ &= (X^2 + 2)^2 - (2X)^2 \\ &= (X^2 + 2 - 2X)(X^2 + 2 + 2X) \end{aligned}$$

Vérifions que ces facteurs sont irréductibles sur $\mathbb{R}$. Le discriminant de $X^2 - 2X + 2$ est $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ et celui de $X^2 + 2X + 2$ est $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$.
Donc ces polynômes n'ont pas de racines réelles et sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.
D'où : $\boxed{X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).}$
Remarque : On peut aussi chercher les racines dans $\mathbb{C}$ (calcul de racines quartiques de l'unité) et ensuite rassembler les termes conjugués.

Planche G - Correction

Exercice 3 - Majeur (14 points)

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, à valeurs positives, de classe $\mathcal{C}^2$, convexe et de dérivée strictement négative.

1. Posons $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   - **Valeurs positives :** $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x. OK.
   - **Classe $\mathcal{C}^2$:** L'exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$. OK.
   - **Convexe :** $h''(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x, donc h est strictement convexe. OK.
   - **Dérivée strictement négative :** $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$ pour tout x. OK.

   $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \text{ vérifie toutes les hypothèses.}}$
2. Soit $g(x) = x + h'(x)$.
   (a) g est de classe $\mathcal{C}^1$ (car h est $\mathcal{C}^2$) et $g'(x) = 1 + h''(x)$. Or h est convexe, donc $h''(x) \geqslant 0$, d'où $g'(x) \geqslant 1 > 0$.
   $\boxed{g \text{ est strictement croissante.}}$

   De plus, $g(0) = 0 + h'(0)$. Or $h'(0) < 0$ (hypothèse dérivée strictement négative), donc $\boxed{g(0) = h'(0) < 0.}$
   (b) g est continue et strictement croissante. De plus :
   - $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ car $g(x) \geqslant x + h'(0)$ (puisque h' est croissante, h'' étant $\geqslant 0$), et $x + h'(0) \to +\infty$.
   - $g(0) < 0$ (question précédente).

   Par le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué sur $[0, +\infty[$), l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0, +\infty[$. Par stricte croissance de g, cette solution est unique.
   Montrons qu'il n'y a pas de solution pour $x \leqslant 0$. Si $x \leqslant 0$, alors $g(x) = x + h'(x) \leqslant 0 + h'(x) < 0$ car $h' < 0$ partout. En fait, pour $x < 0$: $g(x) < g(0) < 0$ par stricte croissance.
   Ainsi : $\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ a une unique solution } \alpha \in]0, +\infty[.}$
3. Soit $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + h(x)$.
   (a) Les dérivées partielles de f sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y + h'(x), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y$$

Un point critique vérifie les deux conditions :

$$\begin{cases} 2x - 2y + h'(x) = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

De la seconde équation : $y = \frac{x}{2}$. En substituant dans la première :

$$2x - 2 \cdot \frac{x}{2} + h'(x) = 0 \iff x + h'(x) = 0 \iff g(x) = 0$$

D'après la question 2b), la seule solution est $x = \alpha$, d'où $y = \frac{\alpha}{2}$.

$\boxed{\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) \text{ est l'unique point critique de } f.}$

(b) Calculons la matrice hessienne de f en $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + h''(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

En $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 + h''(\alpha) & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $r = 2 + h''(\alpha) > 0$ (car $h'' \geqslant 0$) et le déterminant :

$$\det(H_f) = 4(2 + h''(\alpha)) - 4 = 4 + 4h''(\alpha) > 0$$

car $h''(\alpha) \geqslant 0$.

Puisque $r > 0$ et $\det(H_f) > 0$, $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } \left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right).}$

4. On nous dit que $\phi\big((x, y), (x', y')\big) = xx' - xy' - x'y + 2yy'$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
La norme associée est $\phi\big((x, y), (x, y)\big) = x^2 - 2xy + 2y^2$.
Puisque ϕ est un produit scalaire, la norme associée est une norme sur $\mathbb{R}^2$. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En particulier, la norme $\|\cdot\|_\phi = \sqrt{x^2 - 2xy + 2y^2}$ est équivalente à la norme euclidienne $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
L'équivalence des normes donne l'existence de constantes $c, C > 0$ telles que :

$$c\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{x^2 - 2xy + 2y^2} \leqslant C\sqrt{x^2 + y^2}$$

En élevant au carré l'inégalité de gauche avec $k = c^2 > 0$:

$\boxed{\exists\, k > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 - 2xy + 2y^2 \geqslant k(x^2 + y^2).}$

5. Montrons que le minimum local est global.
Posons $M = f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$ la valeur du minimum local. D'après la question 4, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \underbrace{x^2 - 2xy + 2y^2}_{\geqslant k(x^2+y^2)} + \underbrace{h(x)}_{\geqslant 0} \geqslant k(x^2 + y^2) = k\|(x, y)\|^2$$

Choisissons $R > 0$ tel que $kR^2 > M$, soit $R > \sqrt{M/k}$. Alors pour tout (x, y) avec $\|(x, y)\| \geqslant R$:

$$f(x, y) \geqslant kR^2 > M = f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$$

Autrement dit, en dehors de la boule fermée $\bar{B}(0, R)$, la fonction f dépasse strictement sa valeur au point critique. (On choisit R assez grand pour que $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) \in \bar{B}(0, R)$.)

Or $\bar{B}(0, R)$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ (dimension finie) et f est continue, donc par le **théorème des bornes atteintes**, f admet un minimum sur $\bar{B}(0, R)$, atteint en un certain point (a, b).

Ce minimum sur $\bar{B}(0, R)$ est aussi un minimum global sur $\mathbb{R}^2$: en effet, pour tout $(x, y) \notin \bar{B}(0, R)$, on a $f(x, y) > M \geqslant f(a, b)$.

Or (a, b) réalise un minimum global, donc en particulier un minimum local, ce qui impose que (a, b) est un point critique de f (condition nécessaire d'extremum). Comme $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$ est l'unique point critique de f (question 3a), on conclut :

$\boxed{f \text{ admet un minimum global en } \left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right).}$

Exercice 4 - Mineur (6 points)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle et $f : B \mapsto (\operatorname{Tr} A)\, B - (\operatorname{Tr} B)\, A$.

1. **Montrons que** $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)$**.**
   $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} f$: Soit $B = \lambda A$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$f(\lambda A) = (\operatorname{Tr} A)\, \lambda A - (\operatorname{Tr}(\lambda A))\, A = \lambda(\operatorname{Tr} A)\, A - \lambda(\operatorname{Tr} A)\, A = 0$$
   $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(A)$: Soit $B \in \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $(\operatorname{Tr} A)\, B = (\operatorname{Tr} B)\, A$. Puisque $\operatorname{Tr} A \neq 0$, on a :
   $$B = \frac{\operatorname{Tr} B}{\operatorname{Tr} A}\, A \in \operatorname{Vect}(A)$$
   D'où : $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A).}$
2. Cherchons les valeurs propres de f. Soit λ une valeur propre et B un vecteur propre associé : $f(B) = \lambda B$.
   $(\operatorname{Tr} A)\, B - (\operatorname{Tr} B)\, A = \lambda B$, soit $(\operatorname{Tr} A - \lambda)\, B = (\operatorname{Tr} B)\, A$.
   Cas 1 : $\operatorname{Tr} A - \lambda \neq 0$. Alors $B = \frac{\operatorname{Tr} B}{\operatorname{Tr} A - \lambda}\, A$, donc $B \in \operatorname{Vect}(A)$. Mais alors $B \in \operatorname{Ker} f$ et $\lambda B = f(B) = 0$. Comme $B \neq 0$ (vecteur propre), $\lambda = 0$.
   Vérifions : $\lambda = 0$ est bien valeur propre car $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A) \neq \{0\}$ (puisque $A \neq 0$ car $\operatorname{Tr} A \neq 0$).
   Cas 2 : $\operatorname{Tr} A - \lambda = 0$, soit $\lambda = \operatorname{Tr} A$. Alors $0 = (\operatorname{Tr} B)\, A$. Puisque $A \neq 0$, on a $\operatorname{Tr} B = 0$. Donc le sous-espace propre est $\{B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} B = 0\} = \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$, qui est un hyperplan de dimension $n^2 - 1$.
   Vérifions que $\lambda = \operatorname{Tr} A$ est bien valeur propre : si B est de trace nulle, $f(B) = (\operatorname{Tr} A)\, B - 0 = (\operatorname{Tr} A)\, B$. OK.

   Les valeurs propres sont 0 (de multiplicité 1) et $\operatorname{Tr} A$ (de multiplicité $n^2 - 1$). On a $1 + (n^2 - 1) = n^2 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$, car la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n^2.

Planche H - Correction

Exercice 5 - Majeur (14 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Un endomorphisme f est dit **stabilisant** si $\langle f(x) \mid x \rangle = \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:
   $$Mx = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{aligned} \langle h(x) \mid x \rangle &= x_1(x_1 - x_2 + x_3) + x_2(x_1 + x_2 - x_3) + x_3(-x_1 + x_2 + x_3) \\ &= x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$
   $\boxed{h \text{ est stabilisant.}}$
2. Soit f stabilisant et $g = f - \operatorname{Id}$.

(a) Pour tout $x \in E$:

$$\langle g(x) \mid x\rangle = \langle f(x) - x \mid x\rangle = \langle f(x) \mid x\rangle - \langle x \mid x\rangle = \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$$

$\boxed{\forall x \in E, \quad \langle g(x) \mid x\rangle = 0.}$

(b) Soit λ une valeur propre de g et $x \neq 0$ un vecteur propre associé : $g(x) = \lambda x$. Alors :

$$0 = \langle g(x) \mid x\rangle = \langle \lambda x \mid x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

Puisque $x \neq 0$, $\|x\|^2 \neq 0$, donc $\lambda = 0$.

$\boxed{\text{0 est la seule valeur propre possible pour } g.}$

Le polynôme caractéristique χ_g est de degré 3 à coefficients réels, donc il admet au moins une racine réelle. Cette racine réelle est une valeur propre de g, donc elle vaut 0 (d'après ce qui précède). Ainsi 0 est valeur propre de g.

$\boxed{\text{0 est la seule valeur propre de } g.}$

3. (a) Soit $(x, y) \in E^2$. On a $\langle g(x+y) \mid x+y\rangle = 0$, d'où :

$$\langle g(x) \mid x\rangle + \langle g(x) \mid y\rangle + \langle g(y) \mid x\rangle + \langle g(y) \mid y\rangle = 0$$

Or $\langle g(x) \mid x\rangle = 0$ et $\langle g(y) \mid y\rangle = 0$, donc :

$\boxed{\langle g(x) \mid y\rangle + \langle g(y) \mid x\rangle = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in E^2.}$

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$ et $y \in \mathrm{Im}(g)$. Écrivons $y = g(z)$ pour un certain $z \in E$. On a :

$$\langle x \mid y\rangle = \langle x \mid g(z)\rangle = \langle g(z) \mid x\rangle = -\langle g(x) \mid z\rangle = -\langle 0 \mid z\rangle = 0$$

en utilisant la relation de la question 3a) et $g(x) = 0$.

$\boxed{\mathrm{Ker}(g) \text{ et } \mathrm{Im}(g) \text{ sont orthogonaux.}}$

4. On suppose $g \neq 0$. Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à 0 et $e_2 \in \mathrm{Im}(g)$ unitaire.

(a) Par l'absurde, si $g(e_2) = 0$, alors $e_2 \in \mathrm{Ker}(g)$. Mais $e_2 \in \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g) \perp \mathrm{Im}(g)$ (question 3b)), donc $\langle e_2 \mid e_2\rangle = 0$, soit $\|e_2\| = 0$, ce qui contredit $\|e_2\| = 1$.

$\boxed{g(e_2) \neq 0.}$

(b) Posons $e_3 = \frac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$. Par construction, $\|e_3\| = 1$.

Montrons que (e_1, e_2, e_3) est orthonormée.

- $\langle e_1 \mid e_2\rangle = 0$: $e_1 \in \mathrm{Ker}(g)$, $e_2 \in \mathrm{Im}(g)$, et ces espaces sont orthogonaux.
- $\langle e_1 \mid e_3\rangle = 0$: $e_3 = \frac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|} \in \mathrm{Im}(g)$ et $e_1 \in \mathrm{Ker}(g)$, donc $\langle e_1 \mid e_3\rangle = 0$.
- $\langle e_2 \mid e_3\rangle = \frac{1}{\|g(e_2)\|}\langle e_2 \mid g(e_2)\rangle = 0$ car $\langle g(e_2) \mid e_2\rangle = 0$ (question 2a).

La famille (e_1, e_2, e_3) est orthonormale et contient $3 = \dim E$ vecteurs.

$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } E.}$

(c) **Matrice de g :** On a $g(e_1) = 0$ (car $e_1 \in \mathrm{Ker}(g)$).

$g(e_2) = \|g(e_2)\|\, e_3$. Posons $a = \|g(e_2)\| > 0$.

Pour $g(e_3)$: on a $\langle g(e_3) \mid e_1\rangle = 0$ car $e_1 \in \mathrm{Ker}(g)$ et la relation de la question 3a) donne $\langle g(e_3) \mid e_1\rangle = -\langle g(e_1) \mid e_3\rangle = 0$.

$\langle g(e_3) \mid e_2\rangle = -\langle g(e_2) \mid e_3\rangle$ (question 3a). Or $\langle g(e_2) \mid e_3\rangle = \langle a\, e_3 \mid e_3\rangle = a$. Donc $\langle g(e_3) \mid e_2\rangle = -a$.

$\langle g(e_3) \mid e_3\rangle = 0$ (question 2a).

Donc $g(e_3) = -a\, e_2$.

La matrice de g dans (e_1, e_2, e_3) est :

$$\boxed{\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}}$$

Matrice de $f = g + \mathrm{Id}$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}}$$

avec $a = \|g(e_2)\| > 0$.

Exercice 6 - Mineur (6 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $(E_n) : x\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{1/2} = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Posons $\psi_n(x) = x\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{1/2}$ pour $x > 0$.
   ψ_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (produit de fonctions positives croissantes).
   $\psi_n(0^+) = 0$ et $\psi_n(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
   Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, l'équation $\psi_n(x) = 1$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$.
   $\boxed{(E_n) \text{ admet une unique solution } x_n \in \mathbb{R}^{+*} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$
2. On a $\psi_n(x_n) = 1$ pour tout n. Or :

$$\psi_{n+1}(x_n) = x_n\left(1 + \frac{x_n}{n+1}\right)^{1/2} \leqslant x_n\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{1/2} = \psi_n(x_n) = 1$$

   car $\frac{x_n}{n+1} \leqslant \frac{x_n}{n}$.
   Ainsi $\psi_{n+1}(x_n) \leqslant 1 = \psi_{n+1}(x_{n+1})$. Comme ψ_{n+1} est strictement croissante, on obtient $x_n \leqslant x_{n+1}$.
   $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$

Planche A - Correction

Exercice 7 - Majeur (14 points)

On pose $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \exp(-\alpha_n)$.
On admet le lemme de Stolz-Cesàro : si (b_n) est strictement croissante, divergente, et $\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \to L$, alors $\frac{a_n}{b_n} \to L$.

1. On a $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \exp(-\alpha_n) > 0$ pour tout n, donc $\boxed{(\alpha_n) \text{ est strictement croissante.}}$

   Montrons que (α_n) diverge vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que (α_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors en passant à la limite dans $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \exp(-\alpha_n)$:

$$\ell = \ell + \exp(-\ell) \implies \exp(-\ell) = 0$$

   Ce qui est impossible car l'exponentielle est toujours strictement positive.
   Puisque (α_n) est croissante et ne converge pas, $\boxed{\alpha_n \to +\infty.}$
2. (a) On a $\exp(-\alpha_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ (car $\alpha_n \to +\infty$).
   Par développement limité de l'exponentielle en 0 : pour $u = \exp(-\alpha_n) \to 0$:

$$\exp(u) - 1 = u + \mathrm{o}(u) \sim u$$

   Donc :

$$\boxed{\exp(\exp(-\alpha_n)) - 1 \sim \exp(-\alpha_n) \text{ quand } n \to +\infty.}$$

Calculons $\Delta \exp(\alpha_n) = \exp(\alpha_{n+1}) - \exp(\alpha_n)$. On a $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \exp(-\alpha_n)$, donc :

$$\exp(\alpha_{n+1}) = \exp\big(\alpha_n + \exp(-\alpha_n)\big) = \exp(\alpha_n) \cdot \exp\big(\exp(-\alpha_n)\big)$$

Ainsi :

$$\Delta \exp(\alpha_n) = \exp(\alpha_n)\big(\exp(\exp(-\alpha_n)) - 1\big) \sim \exp(\alpha_n) \cdot \exp(-\alpha_n) = 1$$

D'où : $\boxed{\Delta \exp(\alpha_n) \to 1.}$

(b) Appliquons le lemme de Stolz-Cesàro avec $a_n = \exp(\alpha_n)$ et $b_n = n$.
On a $\Delta b_n = 1$ et $\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \Delta \exp(\alpha_n) \to 1$.
La suite $(b_n) = (n)$ est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.
Par Stolz-Cesàro : $\frac{\exp(\alpha_n)}{n} \to 1$, soit $\boxed{\exp(\alpha_n) \sim n.}$

3. De $\exp(\alpha_n) \sim n$, on conjecture $\alpha_n \sim \ln n$ (Attention composition interdite *a priori*). On a :

$$\frac{\alpha_n}{\ln n} = \frac{\ln(\exp(\alpha_n))}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{\exp(\alpha_n)}{n} n\right)}{\ln n} = \frac{\ln \overbrace{\left(\frac{\exp(\alpha_n)}{n}\right)}^{\to 1}}{\ln n} + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Donc $\alpha_n \sim \ln n$.
Ainsi $\frac{1}{\alpha_n} \sim \frac{1}{\ln n}$. Or $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$. La série harmonique diverge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{ln(n)}$ diverge aussi. Par critère d'équivalence sur des séries à termes positifs $\boxed{\sum \frac{1}{\alpha_n} \text{ diverge.}}$

Exercice 8 - Mineur (6 points)

Soit $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$ et $Q = (n+1)X^n - nX^{n+1} - 1$.

1. Calculons $P(X)(X-1)$. On a :

$$P(X)(X-1) = nX^n(X-1) - (X^n - 1) = nX^{n+1} - nX^n - X^n + 1 = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = -Q(X)$$

Donc $P(X)(X-1) = -Q(X)$, soit $Q(X) = -P(X)(X-1)$.
Si ζ est une racine de P avec $\zeta \neq 1$: $Q(\zeta) = -P(\zeta)(\zeta - 1) = 0$, donc ζ est racine de Q.
Si ζ est une racine de Q avec $\zeta \neq 1$: $Q(\zeta) = 0 = -P(\zeta)(\zeta - 1)$, et $\zeta \neq 1$ donne $P(\zeta) = 0$.
Vérifions pour $\zeta = 1$: $P(1) = n - \underbrace{1 - 1 - \ldots - 1}_{n \text{ fois}} = n - n = 0$. Et $Q(1) = (n+1) - n - 1 = 0$.
Donc P et Q ont les mêmes racines.

2. Montrons que toutes les racines de P sont simples. Pour cela montrons que les racines de Q sont simples sauf 1 qui est racine double. On a $Q'(X) = n(n+1)X^{n-1} - n(n+1)X^n = n(n+1)X^{n-1}(1-X)$.
Les racines de Q' sont 0 (d'ordre $n-1$) et 1 (d'ordre 1). Or 0 n'est pas racine de Q ($Q(0) = -1$). Donc toutes les racines de Q sont simples sauf 1.
Ensuite, 1 est racine de Q et racine simple de Q' donc racine double de Q.
Puisque $Q = (1-X)P$, 1 est racine simple de P.
$\boxed{\text{Toutes les racines de } P \text{ sont simples.}}$

Planche B - Correction

Exercice 9 - Majeur (14 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = -4 + \sum_{k=1}^n x^k$.

1. Pour $x > 0$, $P_n(x) = -4 + x + x^2 + \cdots + x^n$. On a :
   - $P_n(0) = -4 < 0$.
   - P_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (car $P_n'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} > 0$ pour $x > 0$).
   - $P_n(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

   Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, $\boxed{\text{il existe un unique } x_n > 0 \text{ tel que } P_n(x_n) = 0.}$

2. (a) $P_1(x) = -4 + x = 0 \iff x = 4$. Donc $\boxed{x_1 = 4.}$

   $P_2(x) = -4 + x + x^2 = 0 \iff x^2 + x - 4 = 0 \iff x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (unique racine positive). Donc $\boxed{x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \approx 1{,}56.}$

   Pour $x_5 < 1$: $P_5(1) = -4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 > 0$. Et $P_5(0) = -4 < 0$. Donc par stricte croissance de P_5, $x_5 \in]0, 1[$, i.e. $\boxed{x_5 < 1.}$

   (b) On a $P_{n+1}(x_n) = P_n(x_n) + x_n^{n+1} = 0 + x_n^{n+1} = x_n^{n+1} > 0$.

   Donc $P_{n+1}(x_n) > 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$. Puisque P_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $x_n > x_{n+1}$.

   Ainsi $\boxed{(x_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

   Elle est minorée par 0, donc $\boxed{(x_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant 0.}$

3. (a) Pour $x_n \neq 1$ (ce qui est vrai pour $n \geqslant 5$ car $x_n < 1$, et aussi pour $n < 4$ mais pas pour x_4 - on peut vérifier explicitement $x_4 = 1$ car $P_4(1) = 0$) :

   $$P_n(x_n) = -4 + \sum_{k=1}^n x_n^k = -4 + x_n \cdot \frac{x_n^n - 1}{x_n - 1} = 0$$

   Donc $4(x_n - 1) = x_n(x_n^n - 1) = x_n^{n+1} - x_n$, soit :

   $$4x_n - 4 = x_n^{n+1} - x_n \iff x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$$

   De plus, l'équation est trivialement vérifiée par 1. Donc elle est valide aussi pour $n = 4$.
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0.}$

   (b) On a $0 < x_n \leqslant x_5 < 1$ pour $n \geqslant 5$. Notons $c = x_5 < 1$. Pour $n \geqslant 5$:

   $$0 \leqslant x_n^{n+1} \leqslant c^{n+1} \to 0$$

   D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n^{n+1} = 0.}$

   De $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$, on tire $5x_n = x_n^{n+1} + 4 \to 0 + 4 = 4$, donc $x_n \to \frac{4}{5}$.

   D'où : $\boxed{\ell = \frac{4}{5}.}$

4. On a $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$, soit $x_n^{n+1} = 5x_n - 4 = 5(x_n - \ell) + 5\ell - 4 = 5\delta_n + 0 = 5\delta_n$ (car $5 \cdot \frac{4}{5} - 4 = 0$).

   Donc $\boxed{\delta_n = \frac{1}{5}x_n^{n+1}.}$

   Ainsi $n\delta_n = \frac{n}{5}x_n^{n+1}$. On a $x_n \to \frac{4}{5} < 1$. Pour n assez grand, $x_n \leqslant r$ pour un certain $r < 1$ fixé. Alors $n\, x_n^{n+1} \leqslant n\, r^{n+1} \to 0$ (par croissances comparées).

   D'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\delta_n = 0.}$

5. On a $\delta_n = \frac{1}{5} x_n^{n+1} = \frac{1}{5}(\ell + \delta_n)^{n+1}$. Or $\delta_n \to 0$, donc $x_n = \ell + \delta_n \sim \ell$. Plus précisément :

$$x_n^{n+1} = \ell^{n+1} \left(1 + \frac{\delta_n}{\ell}\right)^{n+1}$$

   Or $(n+1)\frac{\delta_n}{\ell} \to 0$ (car $n\delta_n \to 0$), donc $\left(1 + \frac{\delta_n}{\ell}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\ln\left(1 + \frac{\delta_n}{\ell}\right)\right) \to \mathrm{e}^0 = 1$.
   Ainsi $x_n^{n+1} \sim \ell^{n+1}$ et $\delta_n = \frac{1}{5} x_n^{n+1} \sim \frac{1}{5}\ell^{n+1}$.
   $\boxed{x_n - \ell \sim \frac{1}{5}\ell^{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}, \text{ avec } k = \frac{1}{5}.}$

Exercice 10 - Mineur (6 points)

Soit $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice en forme de croix : $M_{ij} = 1$ si $i = n+1$ ou $j = n+1$, et $M_{ij} = 0$ sinon.

1. On obtient après calcul $\boxed{M^2 = J + 2n\, E_{n+1,n+1}^{\top}, \text{ c'est-à-dire } (M^2)_{ij} = 1 \text{ sauf } (M^2)_{n+1,n+1} = 2n+1.}$
2. M est symétrique réel donc diagonalisable.
3. $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } M}$ (de multiplicité $2n-1$).
   Les autres valeurs propres sont $\frac{1 \pm \sqrt{1+8n}}{2}$. On peut les trouver via le polynôme annulateur : $X^3 - X^2 - 2nX$.

Planche C - Correction

Exercice 11 - Majeur (14 points)

1. Pour $|x|<1$: $\boxed{\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n}$, développement en série entière de rayon de convergence 1.

2. On pose $s(r)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

   (a) $x\mapsto\frac{x^{r-1}}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.
   En 0^+ : $\frac{x^{r-1}}{1+x}\sim x^{r-1}$. Intégrable en 0^+ ssi $r-1>-1$, i.e. $r>0$.
   En $+\infty$: $\frac{x^{r-1}}{1+x}\sim x^{r-2}$. Intégrable en $+\infty$ ssi $r-2<-1$, i.e. $r<1$.
   D'où : $\boxed{\mathcal{D}=]0,1[}$.

   (b) Pour $r\in\mathcal{D}$, effectuons le changement de variable $x=\frac{1}{t}$ ($\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$) dans $\int_1^{+\infty}\frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Ce changement est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Les deux intégrales ont donc même nature (ici convergent). Quand $x=1$, $t=1$; quand $x\to+\infty$, $t\to0^+$. Donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{t^{1-r}}{1+\frac{1}{t}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)=\int_0^1\frac{t^{1-r}}{\frac{t+1}{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_0^1\frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$$

3. (a) Soit $\alpha>-1$ et $n\in\mathbb{N}$. Pour $t\in[0,1[$ et $k\geqslant n+1$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k t^{k+\alpha}\right|\leqslant t^{n+1+\alpha}$$

   par le critère des séries alternées (domination du reste). Comme $\alpha>-1$ et $t\in[0,1[$, on a $t^{n+1+\alpha}\leqslant t^n$.
   Ainsi $\boxed{\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k t^{k+\alpha}\right|\leqslant t^n \text{ pour tout } t\in[0,1[.}$

   Donc par inégalité triangulaire, $|u_n|\leqslant\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\to0$. Par le théorème des gendarmes, $\boxed{u_n\to0.}$

   (b) On a $\frac{t^\alpha}{1+t}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{k+\alpha}$ pour $t\in[0,1[$. Donc :

$$\frac{t^\alpha}{1+t}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+\alpha}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k t^{k+\alpha}$$

   En intégrant sur $[0,1]$ et en utilisant $u_n\to0$:

$$\int_0^1\frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+\alpha+1}$$

$$\boxed{\int_0^1\frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+\alpha+1}.}$$

   Pour $s(r)$ avec $r\in]0,1[$: d'après la question 2b), $s(r)=\int_0^1\frac{t^{r-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
   Avec $\alpha=r-1>-1$: $\int_0^1\frac{t^{r-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+r}$.
   Avec $\alpha=-r>-1$: $\int_0^1\frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1-r}$.

Donc :

$$\boxed{s(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+r} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-r}.}$$

Que l'on peut réécrire avec un changement d'indice :

$$\boxed{s(r) = \tfrac{1}{r} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{r+k} + \frac{1}{r-k} \right).}$$

Remarque : On reconnaît en fait une formule connue, appelée l'expansion de la cosécante de Mittag-Leffler.

Exercice 12 - Mineur (6 points)

Soit E un espace euclidien, $g \in \mathcal{O}(E)$ et $f = g - \mathrm{Id}_E$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.

Puisque $g \in \mathcal{O}(E)$, g est une isométrie : $\langle g(x) \mid g(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$ pour tout $x, y \in E$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Écrivons $y = f(z) = g(z) - z$ pour un certain $z \in E$. On a $f(x) = 0$, i.e. $g(x) = x$. Alors :

$$\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid g(z) - z \rangle = \langle x \mid g(z) \rangle - \langle x \mid z \rangle$$

Or g est une isométrie et $g(x) = x$, donc $\langle x \mid g(z) \rangle = \langle g(x) \mid g(z) \rangle = \langle x \mid z \rangle$.
Donc $\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid z \rangle - \langle x \mid z \rangle = 0$.
Tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ est orthogonal à tout élément de $\mathrm{Ker}(f)$, donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)^{\perp}.}$

Planche D - Correction

Exercice 13 - Majeur (14 points)

On pose $\varphi(x) = -x \ln x$ pour $x \in]0, 1]$.

1. On a $\varphi'(x) = -\ln x - 1$ pour $x \in]0, 1]$. $\varphi'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$.
   Pour $x \in]0, \mathrm{e}^{-1}[$, $\ln x < -1$ donc $\varphi'(x) > 0$. Pour $x \in]\mathrm{e}^{-1}, 1]$, $\ln x > -1$ donc $\varphi'(x) < 0$.
   $\varphi(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-1} \cdot (-1) = \mathrm{e}^{-1}$. $\varphi(1) = 0$. Ainsi :

x	0		e^{-1}		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	-	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

   Prolongement en 0 : $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} -x \ln x = 0$ (par croissances comparées).
   $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } \varphi(0) = 0.}$

2. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$. On a $p_n = P(X = n) = pq^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

$$\varphi(p_n) = -p_n \ln p_n = -pq^{n-1}\big(\ln p + (n-1)\ln q\big)$$

   Donc :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(p_n) = -\ln p \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} - \ln q \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)\, pq^{n-1}$$

   On peut séparer les sommes car elles convergent (géométrique et géométrique dérivée de raison < 1).
   $\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)pq^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} m\, pq^m = p \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$.
   Donc :

$$\boxed{H(X) = -\ln p - \frac{q}{p} \ln q = \frac{-p\ln p - q \ln q}{p}.}$$

3. (a) Puisque X est d'espérance finie, $\sum_{n=1}^{+\infty} np_n = E(X) < +\infty$. Le terme général d'une série convergente tend vers 0, donc $\boxed{np_n \to 0.}$
   (b) Pour $p_n \in]0, 1]$, posons $u = p_n$ et étudions $\sqrt{u}\, \ln^2(u)$.
   La fonction $t \mapsto \sqrt{t}\, \ln^2 t$ prolongée par continuité sur $[0, 1]$ atteint son maximum. On a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\sqrt{t}\, \ln^2 t\big) = \frac{\ln t (4 + \ln t)}{2\sqrt{t}}$. Les points critiques sont $t = 1$ ($\ln t = 0$) et $t = \mathrm{e}^{-4}$ ($\ln t = -4$).
   En $t = \mathrm{e}^{-4}$: $\sqrt{\mathrm{e}^{-4}} \cdot (-4)^2 = \mathrm{e}^{-2} \cdot 16 = (4\mathrm{e}^{-1})^2 = \left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)^2$.
   Comme $\mathrm{e} > 2$, $\frac{4}{\mathrm{e}} < 2$, on a pour tout $t \in]0, 1]$: $\sqrt{t}\, \ln^2 t \leqslant 4$.
   $\boxed{\sqrt{p_n}\, \ln^2(p_n) \leqslant 4.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par remarquer que si $-\ln p_n \leqslant n$ alors $-p_n \ln p_n \leqslant np_n$ et on obtient immédiatement le résultat de l'énoncé puisque le second terme est positif.
   Supposons maintenant que $-\ln p_n > n$. On a $-\frac{\ln p_n}{n} > 1$. L'astuce consiste à utiliser cette inégalité pour faire appaître un $\ln^2$:

$$-p_n \ln p_n < p_n \frac{\ln^2 p_n}{n} = \frac{\sqrt{p_n}}{n} \sqrt{p_n} \ln^2 p_n \leqslant \frac{\sqrt{p_n}}{n} \times 4 = \frac{4}{n^{3/2}} \sqrt{np_n}.$$

   Et encore une fois, le terme manquant est positif donc on peut l'ajouter.
   De plus comme $p_n \in [0, 1]$, $-p_n \ln p_n \geqslant 0$ (en prolongeant en 0 comme dans la question 1).
   Ainsi :

$$\boxed{0 \leqslant -p_n \ln p_n \leqslant np_n + \frac{4}{n^{3/2}} \sqrt{np_n}.}$$

5. Il suffit de montrer que $\sum \varphi(p_n)$ converge. D'après la question 4 :
$$0 \leqslant \varphi(p_n) \leqslant np_n + \frac{4}{n^{3/2}}\sqrt{np_n}$$
Or $\sum np_n = E(X) < +\infty$ (par hypothèse).
Pour le second terme : $\frac{4}{n^{3/2}}\sqrt{np_n} = \frac{4\sqrt{np_n}}{n^{3/2}}$. On utilise
$$\sqrt{np_n} \leqslant \frac{np_n+1}{2}$$
(cas particulier de $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$)
Donc $\frac{4\sqrt{np_n}}{n^{3/2}} \leqslant \frac{2(np_n+1)}{n^{3/2}} = \frac{2p_n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n^{3/2}}$.
Le premier terme est dominé par p_n dont la somme converge. Le second est une série de Riemann convergente.
Par comparaison à termes positifs, $\sum \varphi(p_n)$ converge.
$\boxed{X \text{ admet une entropie.}}$

Exercice 14 - Mineur (6 points)

Soit $\varphi : P \mapsto \frac{1}{2}\big(P(X) - P(1-X)\big)$ sur $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Calculons $\varphi^2(P) = \varphi\big(\frac{1}{2}(P(X) - P(1-X))\big)$.
Posons $Q(X) = \frac{1}{2}(P(X) - P(1-X))$. Alors :
$$\begin{aligned}\varphi(Q) &= \frac{1}{2}\big(Q(X) - Q(1-X)\big)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{P(X)-P(1-X)}{2} - \frac{P(1-X)-P(X)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(P(X) - P(1-X)\big) = \varphi(P)\end{aligned}$$
Donc $\boxed{\varphi^2 = \varphi.}$
On peut aussi remarquer que φ est linéaire, ce sera utile pour la suite.
2. On peut se douter en lisant l'énoncé que la base $((X-1/2)^k)_{k\in[\![0,3]\!]}$ est particulière. C'est bien une base car c'est une famille libre (degrés échelonnés) du bon cardinal. Utilisons-là pour déterminer l'image.
On a :
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\varphi(1), \varphi(X-1/2), \varphi((X-1/2)^2), \varphi((X-1/2)^3)\right).$$
car l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Or, on trouve rapidement que :
   - $\varphi(1) = 0$;
   - $\varphi(X-1/2) = X - 1/2$;
   - $\varphi((X-1/2)^2) = 0$;
   - $\varphi((X-1/2)^3) = (X-1/2)^3$.

   Donc : $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\Big(X - \tfrac{1}{2},\ \big(X-\tfrac{1}{2}\big)^3\Big).}$

   Le calcul précédent montre que $1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\big(X - \frac{1}{2}\big)^2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Donc :
$$\mathrm{Vect}\left(1,\ \left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) \subset \mathrm{Ker}(\varphi).$$
De plus, par théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 2$.
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\Big(1,\ \big(X-\tfrac{1}{2}\big)^2\Big).}$
3. On a montré $\varphi^2 = \varphi$, donc comme φ est un endormophisme, $\boxed{\varphi \text{ est un projecteur.}}$
C'est la projection sur $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\Big(X - \frac{1}{2},\ \big(X-\frac{1}{2}\big)^3\Big)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\Big(1,\ \big(X-\frac{1}{2}\big)^2\Big)$.
Géométriquement, φ extrait la "partie impaire" d'un polynôme vu comme fonction de la variable $\big(X - \frac{1}{2}\big)$: l'image est le sous-espace des polynômes impairs en $X - \frac{1}{2}$, et le noyau est celui des polynômes pairs en $X - \frac{1}{2}$.

Planche E - Correction

Exercice 15 - Majeur (14 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}\,(1+nx^2)}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Pour $x = 0$: $u_n(0) = 0$, la série converge trivialement. Pour $x > 0$ fixé :

$$u_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}\,(1+nx^2)} \sim \frac{x}{\sqrt{n}\cdot nx^2} = \frac{1}{n^{3/2}\,x}$$

quand $n \to +\infty$. Puisque $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann $3/2 > 1$), par comparaison $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x > 0$.
$\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+.}$

2. (a) Cherchons $\|u_n\|_\infty = \sup_{x\geqslant 0} u_n(x)$. On a $u_n'(x) = \frac{\sqrt{n}(1-nx^2)}{n(1+nx^2)^2}$. Le maximum est atteint en $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et vaut :

$$u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\cdot 2} = \frac{1}{2n}$$

Puisque $\sum \frac{1}{2n}$ diverge (série harmonique), $\boxed{\text{la convergence n'est pas normale sur } \mathbb{R}_+.}$

(b) Soit $a > 0$. Pour $x \geqslant a$ et $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)} \leqslant \frac{x}{\sqrt{n}\cdot nx^2} = \frac{1}{n^{3/2}\,x} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}\,a}$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^{3/2}a}$ converge, $\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[.}$

Les u_n sont continues sur $[a, +\infty[$, et la convergence normale implique la convergence uniforme, qui préserve la continuité. $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$

3. (a) Le reste d'ordre n est $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. On a :

$$R_n(x) - R_{2n}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{k}\,(1+kx^2)}$$

Pour $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$: $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{2n}$ et $1 + kx^2 \leqslant 1 + 2nx^2$. Donc :

$$u_k(x) \geqslant \frac{x}{\sqrt{2n}\,(1+2nx^2)}$$

Il y a n termes dans la somme, donc :

$$R_n(x) - R_{2n}(x) \geqslant \frac{nx}{\sqrt{2n}\,(1+2nx^2)} = \frac{\sqrt{n}\,x}{\sqrt{2}\,(1+2nx^2)}$$

$\boxed{R_n(x) - R_{2n}(x) \geqslant \frac{\sqrt{n}\,x}{\sqrt{2}\,(1+2nx^2)}.}$

(b) Si la série convergeait uniformément sur $\mathbb{R}_+$, alors $\|R_n\|_\infty \to 0$. Or, en prenant $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$:

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geqslant R_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - R_{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geqslant \frac{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{2}\,(1+1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

Donc $\|R_n\|_\infty \geqslant R_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geqslant \frac{1}{4}$ ne tend pas vers 0.

$\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$

4. On admet (ε) : $\forall x>0,\ 2\arctan\frac{1}{x}\leqslant S(x)\leqslant 2\arctan\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}$.
Quand $x\to 0^+$: $\arctan\frac{1}{x}\to\frac{\pi}{2}$, donc $S(x)\geqslant 2\arctan\frac{1}{x}\to\pi$.
De plus $\frac{x}{1+x^2}\to 0$, donc $S(x)\to\pi$.
Or $S(0)=\sum u_n(0)=0\neq\pi$.
$\boxed{S \text{ n'est pas continue en } 0 \text{ (car } \lim_{x\to 0^+} S(x)=\pi\neq 0=S(0)).}$
5. **Démonstration de (ε) :**
Minoration : On effectue une comparaison série-intégrale. Pour $x>0$ fixé, la fonction $t\mapsto\frac{x}{\sqrt{t}\,(1+tx^2)}$ est décroissante en $t>0$. Donc :

$$u_n(x)=\frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t$$

En sommant : $S(x)\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t$.
Changement de variable $u=x\sqrt{t}$ ($\mathrm{d}t=\frac{2u\,\mathrm{d}u}{x^2}$, $\sqrt{t}=u/x$) :

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t=\int_x^{+\infty}\frac{x}{\frac{u}{x}(1+u^2)}\cdot\frac{2u\,\mathrm{d}u}{x^2}=2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=2\left[\arctan u\right]_x^{+\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=2\arctan\frac{1}{x}$$

Donc $S(x)\geqslant 2\arctan\frac{1}{x}$.
Majoration : De même, $u_n(x)\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t$ pour $n\geqslant 2$. En sommant :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t=2\arctan\frac{1}{x}$$

Donc $S(x)=u_1(x)+\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}+2\arctan\frac{1}{x}$.
$\boxed{\forall x>0,\quad 2\arctan\frac{1}{x}\leqslant S(x)\leqslant 2\arctan\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}.}$

Exercice 16 - Mineur (6 points)

Soit E euclidien, (a,b) famille libre de vecteurs unitaires, et $\varphi(x)=(x\mid a)\,b+(x\mid b)\,a$.

1. La linéarité du produit scalaire en la première variable donne, pour $x,y\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(x+\lambda y)&=(x+\lambda y\mid a)\,b+(x+\lambda y\mid b)\,a\\&=(x\mid a)\,b+\lambda(y\mid a)\,b+(x\mid b)\,a+\lambda(y\mid b)\,a\\&=\varphi(x)+\lambda\,\varphi(y)\end{aligned}$$

φ est bien de E dans E. Donc $\boxed{\varphi\in\mathcal{L}(E).}$
2. Soit $x\in\mathrm{Ker}(\varphi)$: $(x\mid a)\,b+(x\mid b)\,a=0$. Puisque (a,b) est libre, on a $(x\mid a)=0$ et $(x\mid b)=0$, donc $x\in\mathrm{Vect}(a,b)^\perp$.
Réciproquement, si $x\in\mathrm{Vect}(a,b)^\perp$, alors $(x\mid a)=(x\mid b)=0$, donc $\varphi(x)=0$.
$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}(a,b)^\perp.}$
3. Par le théorème du rang : $\dim\mathrm{Im}(\varphi)=\dim E-\dim\mathrm{Ker}(\varphi)=\dim E-(\dim E-2)=2$.
De plus, $\mathrm{Im}(\varphi)\subset\mathrm{Vect}(a,b)$ (par définition de φ) et $\dim\mathrm{Vect}(a,b)=2$ (car (a,b) est libre).
$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Vect}(a,b).}$
4. $\varphi(a+b)=(a+b\mid a)\,b+(a+b\mid b)\,a=(1+(a\mid b))\,b+((a\mid b)+1)\,a=(1+(a\mid b))(a+b)$.
$\varphi(a-b)=(a-b\mid a)\,b+(a-b\mid b)\,a=(1-(a\mid b))\,b+((a\mid b)-1)\,a=(1-(a\mid b))(b-a)=-(1-(a\mid b))(a-b)$.
Posons $c=(a\mid b)$. Comme (a,b) est libre, a et b ne sont pas colinéaires, donc $|c|<1$ (Cauchy-Schwarz strict).
$a+b$ est vecteur propre pour la valeur propre $1+c$ et $a-b$ est vecteur propre pour la valeur propre $-(1-c)=c-1$.
Les valeurs propres sont $1+c$ et $c-1$ (non nulles car $|c|<1$), plus 0 (pour $\mathrm{Ker}(\varphi)$).
$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$, avec valeurs propres 0 (multiplicité $\dim E-2$), $1+(a\mid b)$, et $(a\mid b)-1$.