CCINP - Semaine du 01/06/2026

Planche F

Exercice 1 - Majeur (14 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n!}\cos(nx)$ et $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Donner le DSE de exp et son rayon de convergence.
2. Montrer que U existe.
3. Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (sans calculer U).
4. Montrer que $U(x) = \exp(\alpha\cos(x))\cos(\alpha\sin(x))$.
5. On pose $V(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
   Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer V.
6. On pose $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, U(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
7. Calculer I_n.

Exercice 2 - Mineur (6 points)

$E = M_2(\mathbb{R})$, $A \in E$ avec $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On pose $\varphi_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$.

Déterminer $\mathrm{Sp}(\varphi_A)$ et étudier la diagonalisabilité de φ_A.

Planche G

Exercice 3 - Majeur (14 points)

Soit un entier $q \geq 2$ et $Q = qX^q - (X^{q-1} + X^{q-2} + \ldots + 1)$.

1. Montrer que 1 est racine de Q. Notons $R = (X-1) \times Q$.
   Montrer que $R = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
2. Soit z racine complexe de Q. On admet pour les questions 2) et 3) que si $|z| = 1$, alors $z = 1$.
   (a) Montrer que $q|z|^q \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.
   (b) Montrer que si $z \neq 1$, alors $|z| < 1$. (Indication : raisonnement par l'absurde et comparaison de $|z|^k$ avec $|z|^q$ pour $k \in [\![0, q-1]\!]$).

3. Factoriser R' en produit de polynômes. Montrer que 1 est racine double de R.
   Montrer que les autres racines de R sont simples.
   Conclure quant à la multiplicité des racines de Q.
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $Q(A) = O_n$. Montrer que A est diagonalisable. Déterminer, après en avoir montré l'existence, la nature géométrique de la limite de $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
5. Soit z racine complexe de Q. Montrer que si $|z| = 1$, alors $z = 1$.

Exercice 4 - Mineur (6 points)

Pour $x \in]-1, 1[$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Planche H

Exercice 5 - Majeur (14 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.
On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e_1 \in E$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est une base de E.

1. On suppose ici $n = 3$. On note $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$. En déduire que f est cyclique.
2. On considère dans cette question $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
   (a) Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geqslant 1$. Montrer que $\deg(f(Q)) = \deg(Q) - 1$. En déduire que f n'est pas bijectif.
   (b) f est-il cyclique ? (Indication : calculer $\deg f^j(X^n)$.)
3. On suppose ici que $\mathrm{Ker} f^{n-1} \neq E$ et $\mathrm{Ker} f^n = E$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
   (b) Montrer que f est cyclique.
4. On suppose ici f cyclique. Montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
5. On suppose ici f diagonalisable. Montrer que f est cyclique si, et seulement si, ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Exercice 6 - Mineur (6 points)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(a)$ et $Y \sim \mathcal{P}(b)$.

Déterminer la loi de $X + Y$ de deux manières différentes.

Planche A

Exercice 7 - Majeur (14 points)

1. On note F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, stable par produit. Donner la dimension de F.
2. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 ne contenant pas I_n et stable par produit.
   (a) Rappeler la valeur de $E_{i,j} \cdot E_{k,\ell}$ avec $i,j,k,\ell \in [\![1,n]\!]$.

   ► *$E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i,j) qui vaut* 1.

   (b) Montrer que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = G \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
3. (a) Soit $M, M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $p : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à G. Montrer que $p(MM') = p(M)p(M')$.
   (b) Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $M^2 \in G$, alors $M \in G$.
4. Déduire des questions précédentes que $E_{i,j} \in G$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, puis conclure.
5. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1. Est-il stable par produit ?

Exercice 8 - Mineur (6 points)

Soit $(E) : \cos t\, y + \sin t\, y' = -\cos t \sin t$.

Donner l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Planche B

Exercice 9 - Majeur (14 points)

Soit S l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x) - (x^4+1)\, y(x) = 0.$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f'(0) = f(0) = 1$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)^2$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) \geq 0$.
4. Montrer que $f(x)^2 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
5. Posons $h(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}$. Montrer que h est définie et $h \in S$.
6. Montrer que (f,h) est une base de S.

Exercice 10 - Mineur (6 points)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner le polynôme caractéristique de $M(z)$.

Pour quelles valeurs de z la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable ?

Planche C

Exercice 11 - Majeur (14 points)

1. On pose $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$. Vérifier que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et que Q est strictement positive.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et on pose $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}$.
   2.1. Exprimer Q'.
   2.2. À l'aide de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P \mid Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0)$.
   3.1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.
   3.2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
   3.3. Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire. Ce nombre est noté u_n.
4. Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-1/n}$.
   Pour cela, on donne le développement asymptotique $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o(n)$.

Exercice 12 - Mineur (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée f.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Planche D

Exercice 13 - Majeur (14 points)

1. Montrer que $\forall x \in \left]0, +\infty\right[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \arctan(x \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
   2.1. Montrer que f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$.
   2.2. Montrer que f est $\mathcal{C}^0$ sur $\left[0, +\infty\right[$.
   2.3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3.
   3.1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner la dérivée de f.
   3.2. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \geqslant \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{u}{u^2 + x}\,\mathrm{d}u$ en posant $u = x\tan\theta$.
4. Montrer que $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 14 - Mineur (6 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \leqslant n$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = n$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$.

Planche E

Exercice 15 - Majeur (14 points)

Soit $\varphi_U : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]\,;\, P \mapsto P + P(a)U$, avec $a \in \mathbb{C}$ et U un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que φ_U est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2.
   a) Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi_U \subset \mathrm{Vect}(U)$.
   b)
      - Montrer que $U(a) = -1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi_U = \mathrm{Vect}(U)$.
      - Montrer que $U(a) \neq -1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi_U = \{0\}$.
3.
   a) Montrer que $\varphi_U^2 - (2 + U(a))\varphi_U + (1 + U(a))\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]} = 0$.
   b) En déduire une CNS pour que φ_U soit un automorphisme. Préciser φ_U^{-1}.
4. On suppose $U(a) = -1$. Quelle est la nature de φ_U ? En déduire $\mathrm{Im}\varphi_U$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $V = P + P(a)U$ d'inconnue P.

Exercice 16 - Mineur (6 points)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I et J existent.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer I et J.

Planche Mines-Télécom

Modalités : Pas de préparation, 30 minutes de passage (environ 15 minutes par exercice)

Exercice 17 - Premier exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour tout $u > -1$, justifier la majoration $\ln(1 + u) \leqslant u$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 18 - Second exercice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n = \mathbb{P}(X = n), \quad r_n = \mathbb{P}(X > n).$$

On note G la fonction génératrice de X.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} r_n t^n$ vaut au moins 1. Sa somme est notée H.
2. Pour tout $t \in]-1, 1[$, justifier l'égalité $H(t) = \dfrac{1 - G(t)}{1 - t}$.

Planche Mines-Ponts

Modalités : 15 minutes de préparation sur le premier exercice, 50-60 minutes de passage (environ 25-30 minutes par exercice)

Exercice 19 - Premier exercice

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
3. Étudier l'intégrabilité de f sur $]-1, 0]$.
4. La fonction f est-elle développable en série entière ?

Exercice 20 - Second exercice

Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $AB = \alpha A + \beta B$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

▶ ***Indication*** *: raisonner par récurrence sur la taille des matrices.*