
CCINP - CORRECTION - SEMAINE DU 01/06/2026

Planche F - Correction

Exercice 1 - Majeur (14 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \frac{\alpha^n}{n!} \cos(nx)$ et $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Le développement en série entière de l'exponentielle est :

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

valable pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence est $R = +\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $|u_n(x)| = \frac{|\alpha|^n}{n!} |\cos(nx)| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$.

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\alpha|^n}{n!} = \exp(|\alpha|) < +\infty$. Par comparaison à une série à termes positifs convergente, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

U est définie sur \mathbb{R} .

3. **Montrons que U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .**

Chaque u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec $u'_n(x) = -\frac{n\alpha^n}{n!} \sin(nx) = -\frac{\alpha^n}{(n-1)!} \sin(nx)$ pour $n \geq 1$, et $u'_0(x) = 0$.

Pour $n \geq 1$: $|u'_n(x)| \leq \frac{|\alpha|^n}{(n-1)!}$.

Ainsi $\|u'_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|^n}{(n-1)!}$.

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\alpha|^n}{(n-1)!} = |\alpha| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\alpha|^k}{k!} = |\alpha| \exp(|\alpha|) < +\infty$.

Donc $\sum u'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Par le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions (les u_n sont \mathcal{C}^1 , $\sum u_n$ converge, et $\sum u'_n$ converge uniformément) :

U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

4. On utilise la formule : $\cos(nx) = \Re(e^{inx})$. Donc :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \Re(e^{inx}) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}\right) = \Re(\exp(\alpha e^{ix}))$$

L'interversion de \Re et de \sum est justifiée car la série converge absolument. Or :

$$\exp(\alpha e^{ix}) = \exp(\alpha \cos x + i\alpha \sin x) = \exp(\alpha \cos x) (\cos(\alpha \sin x) + i \sin(\alpha \sin x))$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{U(x) = \exp(\alpha \cos x) \cos(\alpha \sin x).}$$

5. **Existence de V** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\left| \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} \right| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$. Puisque $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ converge, V est définie sur \mathbb{R} .

Calcul de V : On utilise la linéarisation $\cos^2(nx) = \frac{1+\cos(2nx)}{2}$. Donc :

$$V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{1 + \cos(2nx)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(2nx)}{n!}$$

Le premier terme vaut $\frac{1}{2}e^\alpha$. Le second est $\frac{1}{2}U(2x)$ (en reconnaissant la définition de U évaluée en $2x$). D'après la question 4 :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}(e^\alpha + \exp(\alpha \cos 2x) \cos(\alpha \sin 2x)).}$$

6. Utilisons une intégration par parties. Pour $n \geq 1$:

$$I_n = \left[\frac{\sin(nx)}{n} U(x) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) U'(x) dx = -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) U'(x) dx$$

car $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$. Comme U' est continue sur $[-\pi, \pi]$:

$$|I_n| \leq \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} |U'(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Remarque : C'est un cas particulier du lemme de Riemann-Lebesgue.

7. On intervertit somme et intégrale (justifié par la convergence normale de $\sum u_k$ sur $[-\pi, \pi]$ dont la vérification est laissée au lecteur) :

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cos(kx) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx$$

Or, on calcule :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \pi & \text{si } n = k \geq 1 \\ 2\pi & \text{si } n = k = 0 \end{cases}$$

Pour $n \geq 1$: seul le terme $k = n$ survit, d'où :

$$I_n = \frac{\pi \alpha^n}{n!} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On vérifie bien que $I_n = \frac{\pi \alpha^n}{n!} \rightarrow 0$, cohérent avec la question 6.

Exercice 2 - Mineur (6 points)

$E = M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, et $\varphi_A(M) = AM - MA$.

Calculons φ_A sur la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de E .

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AM - MA = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b \\ \lambda_1 c & \lambda_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b \\ (\lambda_2 - \lambda_1)c & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $\varphi_A(E_{11}) = 0$, $\varphi_A(E_{12}) = (\lambda_1 - \lambda_2)E_{12}$, $\varphi_A(E_{21}) = (\lambda_2 - \lambda_1)E_{21}$, $\varphi_A(E_{22}) = 0$.

La matrice de φ_A dans cette base est $\text{diag}(0, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1, 0)$.

Cas $\lambda_1 = \lambda_2$: $\varphi_A = 0$, donc $\text{Sp}(\varphi_A) = \{0\}$ et φ_A est diagonalisable (c'est la matrice nulle).

Cas $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\text{Sp}(\varphi_A) = \{0, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1\}$. Ce sont trois valeurs propres distinctes (car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 \neq \lambda_2 - \lambda_1$ car sinon $\lambda_1 = \lambda_2$). La matrice est diagonale donc diagonalisable.

Dans tous les cas, φ_A est diagonalisable.

Planche G - Correction

Exercice 3 - Majeur (14 points)

Soit $q \geq 2$ entier et $Q = qX^q - (X^{q-1} + X^{q-2} + \dots + 1)$.

1. 1 est racine de Q : $Q(1) = q \cdot 1 - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{q \text{ termes}} = q - q = 0$.

Calcul de $R = (X - 1)Q$: On a $\sum_{k=0}^{q-1} X^k = \frac{X^q - 1}{X - 1}$, donc $Q = qX^q - \frac{X^q - 1}{X - 1}$ (pour $X \neq 1$). Ainsi :

$$\begin{aligned} R &= (X - 1)Q = q(X - 1)X^q - (X^q - 1) \\ &= qX^{q+1} - qX^q - X^q + 1 \end{aligned}$$

D'où : $R = qX^{q+1} - (q + 1)X^q + 1$.

2. On admet pour les questions 2) et 3) que si $|z| = 1$ et $Q(z) = 0$, alors $z = 1$.
(a) Soit z racine de Q : $qz^q = \sum_{k=0}^{q-1} z^k$. Par inégalité triangulaire :

$$q|z|^q = |qz^q| = \left| \sum_{k=0}^{q-1} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$$

D'où : $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.

- (b) Supposons par l'absurde que $z \neq 1$ et $|z| \geq 1$. Puisque $|z| = 1$ implique $z = 1$ (par hypothèse admise), on a $|z| > 1$.

Pour $k \in \llbracket 0, q - 1 \rrbracket$: $k < q$ et $|z| > 1$, donc $|z|^k < |z|^q$.

En sommant : $\sum_{k=0}^{q-1} |z|^k < q|z|^q$, ce qui contredit l'inégalité de la question 2a).

Si $z \neq 1$, alors $|z| < 1$.

3. On a $R = qX^{q+1} - (q + 1)X^q + 1$, donc :

$$R'(X) = q(q + 1)X^q - q(q + 1)X^{q-1} = q(q + 1)X^{q-1}(X - 1)$$

$R' = q(q + 1)X^{q-1}(X - 1)$. Les racines de R' sont 0 (d'ordre $q - 1$) et 1 (d'ordre 1).

1 est racine double de R : On a $R(1) = q - (q + 1) + 1 = 0$ et $R'(1) = 0$, donc 1 est au moins racine double. De plus $R''(X) = q(q + 1)(qX^{q-1} - (q - 1)X^{q-2})$, d'où $R''(1) = q(q + 1)(q - q + 1) = q(q + 1) \neq 0$.

1 est exactement racine double de R .

Les autres racines de R sont simples : Soit z_0 une racine de R avec $z_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 1$. Puisque R' s'annule uniquement en 0 et 1, et que $R(0) = 1 \neq 0$, on a $R'(z_0) \neq 0$. Les racines de R autres que 1 sont simples.

Racines de Q : Puisque $R = (X - 1)Q$ et que 1 est racine double de R , 1 est racine simple de Q . Les autres racines de Q (i.e. les racines de Q différentes de 1) sont aussi racines de R distinctes de 1, donc simples comme racines de R , et *a fortiori* simples comme racines de Q .

Toutes les racines de Q sont simples.

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $Q(A) = O_n$. D'après la question 3, Q est scindé à racines simples dans \mathbb{C} , donc A est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont des racines de Q , donc d'après la question 2b), elles sont soit égales à 1, soit de module strictement inférieur à 1.

Puisque A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et les λ_i sont les valeurs propres. Alors $A^k = PD^kP^{-1}$ avec $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Pour $|\lambda_i| < 1$: $\lambda_i^k \rightarrow 0$. Pour $\lambda_i = 1$: $\lambda_i^k = 1$. Donc D^k converge vers une matrice diagonale D_∞ dont les coefficients diagonaux sont 1 aux positions correspondant à la valeur propre 1 et 0 ailleurs.

Ainsi $A^k \rightarrow PD_\infty P^{-1}$.

(A^k) converge vers le projecteur sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres.

5. Montrons que si $|z| = 1$ et $Q(z) = 0$, alors $z = 1$.

On a $qz^q = \sum_{k=0}^{q-1} z^k$ et $|z| = 1$, d'où :

$$q = q|z|^q = \left| \sum_{k=0}^{q-1} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k = q$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire. Le cas d'égalité dans $|w_1 + \dots + w_m| \leq |w_1| + \dots + |w_m|$ impose que tous les $w_k = z^k$ soient de même argument, c'est-à-dire qu'il existe θ tel que $z^k = |z^k|e^{i\theta} = e^{i\theta}$ pour tout k .

En particulier $z^0 = 1 = e^{i\theta}$ donne $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, puis $z = z^1 = e^{i\theta} = 1$.

Si $|z| = 1$ et $Q(z) = 0$, alors $z = 1$.

Exercice 4 - Mineur (6 points)

Pour $x \in]-1, 1[$, montrons que $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

Pour $|t| \leq 1$: $\arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$. Pour $t \neq 0$:

$$\frac{\arctan(t)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

Soit $x \in]-1, 1[$. On est dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

D'où : $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

Extension à $x = 1$: On ne peut plus utiliser les séries entières, car on se trouve sur le disque d'incertitude.

En revanche, on peut passer à la limite dans l'égalité précédente. En effet, $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 (avec la valeur 1). Donc $x \mapsto \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$ est continue (en fait \mathcal{C}^1) sur $[0, 1]$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt.$$

Puis soit $x \in [0, 1]$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En posant $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, on a donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{(2n+1)^2}$. Comme $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge (comparaison à Riemann), par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et fonc $\sum f_n$ converge normalement donc absolument sur $[0, 1]$.

Puis $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Par le théorème de la double limite, $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ converge et :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Par unicité de la limite, on obtient : $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Planche H - Correction

Exercice 5 - Majeur (14 points)

Soit E de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *cyclique* s'il existe $e_1 \in E$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est une base de E .

$$1. \ n = 3, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculons M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1+2-4 & 2+2-4 & 2+4-6 \\ 1+1-4 & 2+1-4 & 2+2-6 \\ -2-2+6 & -4-2+6 & -4-4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons e_1 le premier vecteur de \mathcal{B} . Alors $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$ sont donnés par les premières colonnes de M et M^2 :

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(e_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [f^2(e_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - (-2)(-2)) = 2 - 4 = -2 \neq 0$$

La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre dans E de dimension 3, c'est une base. f est cyclique.

2. $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (dimension n), $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

(a) Soit $Q \in E$ avec $\deg(Q) = d \geq 1$. On écrit $Q = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots$. Le terme dominant de $Q(X+1)$ est $a_d X^d + (da_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \dots$. Donc $f(Q) = Q(X+1) - Q(X) = da_d X^{d-1} + \dots$

$$\deg(f(Q)) = \deg(Q) - 1 \text{ pour } \deg(Q) \geq 1.$$

Pour l'injectivité : $f(1) = 1 - 1 = 0$, donc $1 \in \text{Ker}(f) \setminus \{0\}$, et f n'est pas injectif. *A fortiori*, f n'est pas bijectif.

(b) Montrons que $e_1 = X^{n-1}$ convient. On a $\deg(f^0(X^{n-1})) = n-1$. Par récurrence, si $\deg(f^j(X^{n-1})) = n-1-j \geq 1$, la question a) donne $\deg(f^{j+1}(X^{n-1})) = n-2-j$.

Ainsi pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$: $\deg(f^j(X^{n-1})) = n-1-j$.

La famille $(f^0(X^{n-1}), f^1(X^{n-1}), \dots, f^{n-1}(X^{n-1}))$ est constituée de n polynômes de degrés $n-1, n-2, \dots, 0$ (tous distincts). C'est une famille échelonnée en degrés, donc libre. Étant de cardinal $n = \dim E$, c'est une base.

$$f \text{ est cyclique (avec } e_1 = X^{n-1}\text{)}.$$

3. On suppose $\text{Ker } f^{n-1} \neq E$ et $\text{Ker } f^n = E$ (i.e. $f^n = 0$).

(a) $\text{Ker } f^{n-1} \neq E$ signifie qu'il existe un vecteur de E qui n'est pas dans $\text{Ker } f^{n-1}$.

$$\text{Il existe } x_0 \in E \text{ tel que } f^{n-1}(x_0) \neq 0_E.$$

(b) Montrons que la famille $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.

Supposons $\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x_0) = 0$. Appliquons f^{n-1} :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{n-1+j}(x_0) = 0$$

Pour $j \geq 1 : n - 1 + j \geq n$, donc $f^{n-1+j}(x_0) = f^n(f^{j-1}(x_0)) = 0$ (car $f^n = 0$). Il reste $a_0 f^{n-1}(x_0) = 0$. Comme $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, on obtient $a_0 = 0$.

On itère : en appliquant f^{n-2} à $\sum_{j=1}^{n-1} a_j f^j(x_0) = 0$, on obtient $a_1 f^{n-1}(x_0) = 0$, d'où $a_1 = 0$. De proche en proche, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

\mathcal{F} est libre et de cardinal $n = \dim E$, c'est une base. f est cyclique.

4. Cette question est passablement compliquée. Je vais vous proposer deux méthodes. Mais avant, je vais juste faire un petit lemme qui servira pour les deux méthodes.

Lemme : Soit f cyclique et $(e_1, \dots, f^{n-1}(e_1))$ une base. On peut décomposer $f^n(e_1)$ sur cette base de la manière suivante :

$$f^n(e_1) = c_0 e_1 + \dots + c_{n-1} f^{n-1}(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k f^k(e_1).$$

En particulier, on peut poser le polynôme $R = X^n - c_{n-1}X^{n-1} - \dots - c_1X - c_0$ et on a :

$$R(f)(e_1) = 0.$$

Méthode 1 : Cette méthode ne va pas être très bien rédigée. Je la donne plus comme exemple de ce qu'on peut attendre de vous au tableau.

Soit $v \in E$. Notons :

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} v_k f^k(e_1).$$

On a alors :

$$f(v) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k f^{k+1}(e_1) = \sum_{k=0}^{n-2} v_k f^{k+1}(e_1) + v_{n-1} f^n(e_1) = \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} f^k(e_1) + \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-1} c_k f^k(e_1).$$

En regroupant, on obtient :

$$f(v) = v_{n-1} c_0 e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k-1} + v_{n-1} c_k) f^k(e_1).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\Leftrightarrow v_{n-1} c_0 e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k-1} + v_{n-1} c_k) f^k(e_1) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} v_k f^k(e_1) \\ &\Leftrightarrow (v_{n-1} c_0 - \lambda v_0) e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k-1} + v_{n-1} c_k - \lambda v_k) f^k(e_1) = 0 \end{aligned}$$

Par liberté de la base, c'est encore équivalent à :

$$\begin{cases} v_{n-1} c_0 - \lambda v_0 &= 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, v_{k-1} + v_{n-1} c_k - \lambda v_k &= 0 \end{cases}$$

Notre but est de montrer que ce système a un ensemble de solution de **au plus** 1 dimension (ça peut être 0 si λ n'est pas valeur propre).

Pour faciliter la discussion, on peut distinguer deux cas :

- Si $\lambda = 0$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, v_k = -v_{n-1} c_{k+1}$. Donc soit $c_0 \neq 0$, et alors $v_{n-1} = 0$ puis $v_k = 0$, soit $c_0 = 0$ et dans ce cas, v_{n-1} est libre et tous les autres v_k sont fixés. On a bien un espace de solution de dimension au plus 1.
- Si $\lambda \neq 0$, $v_0 = -\frac{v_{n-1} c_0}{\lambda}$ puis en utilisant $v_k = -\frac{1}{\lambda} (v_{k-1} + v_{n-1} c_k)$ on détermine tous les v_k de proche en proche en fonction de v_{k-1} . Encore une fois, on a bien un espace de solution de dimension au plus 1.

Méthode 2 : Cette méthode est équivalente à la première mais mieux rédigée. En revanche, elle est bien plus abstraite.

Commençons par remarquer que :

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} v_k f^k(e_1).$$

revient à dire qu'il existe un polynôme P de degré au plus $n - 1$ tel que :

$$v = P(f)(e_1).$$

Soient u et v deux vecteurs propres pour la même valeur propre λ . Montrons que u et v sont proportionnels. Notons $u = P(f)(e_1)$ et $v = Q(f)(e_1)$. Puisqu'ils sont vecteurs propres, on a : $(f - \lambda \text{Id})(u) = (f - \lambda \text{Id})(v) = 0$. Remarquons que l'on peut l'écrire :

$$((X - \lambda)P)(f)(e_1) = 0 \text{ et } ((X - \lambda)Q)(f)(e_1) = 0.$$

Montrons que $(X - \lambda)P$ et $(X - \lambda)Q$ sont des multiples scalaires de R (du lemme).

On le montre pour $(X - \lambda)P$, la preuve est identique pour $(X - \lambda)Q$. Notons :

$$(X - \lambda)P = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_0.$$

C'est possible puisque $\deg P \leq n - 1$. On a donc :

$$b_n f^n(e_1) + \dots + b_0 e_1 = 0.$$

Puis en remplaçant $f^n(e_1)$:

$$(b_{n-1} + b_n c_{n-1}) f^{n-1}(e_1) + \dots + (b_0 + b_n c_0) e_1 = 0.$$

Par liberté, on obtient pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $b_k + b_n c_k = 0$, c'est-à-dire : $b_k = -b_n c_k$. Et en notant $c_n = -1$, on a même $b_n = -b_n c_n$.

Donc $(X - \lambda)P = -b_n R$. De même $(X - \lambda)Q = \alpha R$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si λ n'est pas racine de R , alors on montre aisément que $b_n = 0$ et donc $P = 0$ et $Q = 0$. Donc P et Q sont proportionnelles.

Si λ est racine de R , on a alors $\alpha P = -b_n Q$. Ils sont donc proportionnelles.

Donc $P(f)(e_1)$ et $Q(f)(e_1)$ sont proportionnelles. Donc u et v sont liées.

Donc l'espace propre associée à λ est bien au plus de dimension 1.

5. Supposons f diagonalisable.

(\Rightarrow) Si f est cyclique, les sous-espaces propres sont de dimension 1 par la question 4.

(\Leftarrow) Supposons que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1. Comme f est diagonalisable, la somme des multiplicités vaut n . Il y a donc n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinctes.

Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs propres associés (base de diagonalisation). Posons $e_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Alors :

$$f^k(e_1) = \lambda_1^k v_1 + \lambda_2^k v_2 + \dots + \lambda_n^k v_n$$

La matrice de passage de (v_1, \dots, v_n) à $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est la matrice de Vandermonde $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme les λ_i sont distincts, $\det V \neq 0$, donc $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est une base.

f est cyclique si et seulement si ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Exercice 6 - Mineur (6 points)

Soit $X \sim \mathcal{P}(a)$ et $Y \sim \mathcal{P}(b)$, indépendantes. Déterminons la loi de $X + Y$.

Méthode 1 (formule de convolution) : Pour $k \in \mathbb{N}$, on utilise la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $((X = j))_j$:

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^k P(X = j) P_{X=j}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k P(X = j) P_{X=j}(Y = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^k P(X = j) P(Y = k - j) = \sum_{j=0}^k e^{-a} \frac{a^j}{j!} \cdot e^{-b} \frac{b^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= e^{-(a+b)} \sum_{j=0}^k \frac{a^j b^{k-j}}{j! (k-j)!} = \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j} = \frac{e^{-(a+b)} (a+b)^k}{k!} \end{aligned}$$

par la formule du binôme de Newton.

Méthode 2 (fonctions génératrices) : Pour $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-a} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^{at} = e^{a(t-1)}$$

De même $G_Y(t) = e^{b(t-1)}$. Par indépendance : $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) = e^{(a+b)(t-1)}$.

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $a + b$.

$$X + Y \sim \mathcal{P}(a + b).$$

Planche A - Correction

Exercice 7 - Majeur (14 points)

1. F est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$.

F contient 0_2 ; si $M, N \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $M + \lambda N$ est encore triangulaire supérieure.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure. On peut le vérifier explicitement pour les matrices 2×2 . F est stable par produit.

Une base de F est (E_{11}, E_{12}, E_{22}) , d'où $\dim F = 3$.

2. Soit G un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, ne contenant pas I_n , stable par produit.

- (a) $E_{i,j} \cdot E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker (le coefficient (j) de colonne de $E_{i,j}$ "rencontre" la ligne (k) de $E_{k,\ell}$).

Si on veut le redémontrer, on utilise le fait que $(E_{i,j})_{u,v} = \delta_{iu} \delta_{jv}$ et on exprime le produit matricielle avec la formule pour les coefficients.

- (b) G est un sous-espace de dimension $n^2 - 1$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (de dimension n^2), donc G est un hyperplan. De plus $I_n \notin G$, donc I_n n'est pas dans cet hyperplan. Ainsi $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = G + \text{Vect}(I_n)$ (un hyperplan et un vecteur hors de l'hyperplan engendrent l'espace entier). De plus $G \cap \text{Vect}(I_n) = \{0\}$ (car $I_n \notin G$ et $\lambda I_n \in G$ avec $\lambda \neq 0$ donnerait $I_n = \frac{1}{\lambda}(\lambda I_n) \in G$).

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = G \oplus \text{Vect}(I_n).$$

3. (a) Soit p le projecteur sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à G . Pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $M = M_G + \alpha(M)I_n$ avec $M_G \in G$ et $\alpha(M) \in \mathbb{R}$, de sorte que $p(M) = \alpha(M)I_n$.

Soient $M, M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $p(M) = \alpha I_n$ et $p(M') = \alpha' I_n$. On a $M = M_G + \alpha I_n$ et $M' = M'_G + \alpha' I_n$, donc :

$$MM' = M_G M'_G + \alpha M'_G + \alpha' M_G + \alpha \alpha' I_n$$

Or G est stable par produit : $M_G M'_G \in G$. Et G est un sev : $\alpha M'_G + \alpha' M_G \in G$. Donc $M_G M'_G + \alpha M'_G + \alpha' M_G \in G$ et :

$$p(MM') = \alpha \alpha' I_n = (\alpha I_n)(\alpha' I_n) = p(M)p(M')$$

$$p(MM') = p(M)p(M').$$

- (b) Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M^2 \in G$. Alors $p(M^2) = 0$. D'après la question précédente, $p(M^2) = p(M)^2 = (\alpha I_n)^2 = \alpha^2 I_n$. Donc $\alpha^2 = 0$, soit $\alpha = 0$, soit $p(M) = 0$, i.e. $M \in G$.

4. **Pour** $i \neq j$: $E_{i,j}^2 = E_{i,j} \cdot E_{i,j} = \delta_{j,i} E_{i,j} = 0$ (car $i \neq j$). Donc $E_{i,j}^2 = 0 \in G$. Par la question 3b), $E_{i,j} \in G$.
Pour $E_{i,i}$: Pour $j \neq i$ (possible car $n \geq 2$), on a $E_{i,j} \in G$ et $E_{j,i} \in G$. Puisque G est stable par produit : $E_{i,j} \cdot E_{j,i} = \delta_{j,j} E_{i,i} = E_{i,i} \in G$.

Ainsi, toutes les matrices $E_{i,j}$ (pour $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$) sont dans G . Or $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \subset G$. Mais $\dim G = n^2 - 1 < n^2 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: **contradiction**.

Il n'existe pas de sev G de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, ne contenant pas I_n , stable par produit (pour $n \geq 2$).

5. L'ensemble $\mathcal{T}_0 = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ est le noyau de la forme linéaire Tr , qui est non nulle ($\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$). Donc \mathcal{T}_0 est un hyperplan : $\dim \mathcal{T}_0 = n^2 - 1$.

Stabilité par produit ? Prenons $A = E_{1,2}$ et $B = E_{2,1}$. On a $\text{Tr}(A) = 0$ et $\text{Tr}(B) = 0$, mais $AB = E_{1,1}$ avec $\text{Tr}(E_{1,1}) = 1 \neq 0$. Donc $AB \notin \mathcal{T}_0$.

\mathcal{T}_0 n'est pas stable par produit.

Remarque : C'est cohérent avec la question 4. De plus, $I_n \notin \mathcal{T}_0$ (car $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$). Mais on vient de voir que \mathcal{T}_0 n'est pas stable par produit, ce qui illustre bien la conclusion de la question 4.

Exercice 8 - Mineur (6 points)

Résoudre (E) : $\cos t y' + \sin t y' = -\cos t \sin t$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Au pire, on divise par $\sin t$, on résout sur chaque intervalle et on recolle.

Mais sinon, on remarque que $(\sin t \cdot y)' = \cos t \cdot y + \sin t \cdot y'$. L'équation s'écrit donc :

$$(\sin t \cdot y)' = -\cos t \sin t = -\frac{1}{2} \sin(2t)$$

En intégrant : $\sin t \cdot y(t) = \frac{1}{4} \cos(2t) + C = \frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 t) + C = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 t + C$.

Soit $\sin t \cdot y(t) = -\frac{1}{2} \sin^2 t + K$ où $K = C + \frac{1}{4}$.

En $t = 0$: $\sin(0) \cdot y(0) = 0 = 0 + K$, donc $K = 0$.

Ainsi $\sin t \cdot y(t) = -\frac{1}{2} \sin^2 t$. Pour $t \neq 0$ (dans I , $\sin t \neq 0$) : $y(t) = -\frac{1}{2} \sin t$.

En $t = 0$: $y(0) = 0 = -\frac{1}{2} \sin 0$. La formule reste valable.

L'unique solution sur I est $y(t) = -\frac{\sin t}{2}$.

Planche B - Correction

Exercice 9 - Majeur (14 points)

Soit S l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^2 vérifiant $y'' - (x^4 + 1)y = 0$, et $f \in S$ avec $f(0) = f'(0) = 1$.

1. L'équation $y'' = (x^4 + 1)y$ est une EDL2 homogène à coefficients continus sur \mathbb{R} . L'ensemble S de ses solutions est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions \mathcal{C}^2 (vérification immédiate : combinaison linéaire de solutions = solution, $0 \in S$).

S est un sous-espace vectoriel.

2. $g(x) = f(x)^2$. Alors $g(0) = f(0)^2 = 1$. $g'(x) = 2f(x)f'(x)$, donc $g'(0) = 2f(0)f'(0) = 2$.

$g(0) = 1, \quad g'(0) = 2.$

3. $g''(x) = 2(f'(x)^2 + f(x)f''(x))$. Or $f \in S$ donne $f''(x) = (x^4 + 1)f(x)$, donc :

$$g''(x) = 2(f'(x)^2 + (x^4 + 1)f(x)^2) = 2f'(x)^2 + 2(x^4 + 1)f(x)^2$$

Les deux termes sont positifs (carrés multipliés par des facteurs positifs). $g''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. g est convexe sur \mathbb{R} (car $g'' \geq 0$) et de classe \mathcal{C}^2 . Pour toute fonction convexe dérivable, le graphe est au-dessus de chaque tangente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq g(0) + g'(0)(x - 0) = 1 + 2x$$

Pour $x \geq 0$: $g(x) \geq 1 + 2x \geq 1$, soit $f(x)^2 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

5. Pour $t \geq 0$: $g(t) = f(t)^2 \geq 1 > 0$, donc $\frac{1}{g(t)}$ est bien défini et continu sur \mathbb{R}_+ . L'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{g(t)}$ est donc bien définie pour $x \geq 0$.

Pour $t < 0$: là c'est subtile. Il nous faut montrer que g ne s'annule pas dans les négatifs. L'idée est s'inspirer de la physique. $g = f^2$ et donc on a envie de l'interpréter comme une énergie. Dans ce cas, g serait conservée. Mais notre équation est à coefficients non constants, donc on n'aura pas conservation parfaite. Mais on peut espérer des choses intéressantes tout de même.

Posons : $W(t) = f'(t)^2 - (t^4 + 1)f(t)^2$ (c'est un peu notre intégrale première du mouvement déformée). On a $W'(t) = 2f''(t)f'(t) - 4t^3f(t)^2 - 2(t^4 + 1)f'(t)f(t)$.

Or f vérifie l'équation différentielle et donc $f''(t) = (t^4 + 1)f(t)$. On réinjecte : $W'(t) = -4t^3f(t)^2$. Pour $t \leq 0$, on a donc $W'(t) \geq 0$. Donc W est **croissante** sur $] -\infty, 0]$. Elle est même strictement croissante car f ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon l'équation différentielle impliquerait que c'est la fonction nulle). Puis $W(0) = 0$ (simple calcul) donc W est strictement négative sur $] -\infty, 0[$. Si maintenant il existe $t < 0$ telle que $f(t) = 0$ alors $W(t) = f'(t)^2 - (t^4 + 1)f(t)^2 = f'(t)^2 \geq 0$, ce qui est faux. Donc f ne s'annule pas, donc g non plus.

Ainsi, $h(x) = f(x) \int_0^x \frac{dt}{g(t)}$ est définie sur \mathbb{R} .

Remarque : je pense que l'examineur aurait donné une aide.

Montrons $h \in S$. On a $h' = f' \int_0^x \frac{dt}{g(t)} + f \cdot \frac{1}{g(x)} = f' \int_0^x \frac{dt}{g(t)} + \frac{1}{f(x)}$ (car $g = f^2$).

$$h'' = f'' \int_0^x \frac{dt}{g(t)} + f' \cdot \frac{1}{f^2} - \frac{f'}{f^2} = f'' \int_0^x \frac{dt}{g(t)}.$$

Donc $h''(x) = (x^4 + 1)f(x) \int_0^x \frac{dt}{g(t)} = (x^4 + 1)h(x)$. $h \in S$.

6. Montrons que (f, h) est une base de S . Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^2$.

Posons $C(x) = \frac{y(x)}{f(x)}$. C'est possible puisque f ne s'annule pas d'après la question précédente. On a donc $y(x) = C(x)f(x)$ et C est \mathcal{C}^2 par opérations.

Remarque : si ça ressemble à une variation de la constante, c'est parce que c'en est une.

Un calcul rapide donne $y''(x) = C'''(x)f(x) + 2C'(x)f'(x) + C(x)f''(x)$. On réinjecte encore l'équation vérifiée par f pour obtenir :

$$y''(x) = 2C'(x)f'(x) + f(x)(C'''(x) + (x^4 + 1)C(x)).$$

Procédons maintenant par équivalence. y est solution si et seulement si $y''(x) - (x^4 + 1)y(x) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $2C'(x)f'(x) + f(x)(C'''(x) + (x^4 + 1)C(x)) - (x^4 + 1)C(x)f(x) = 0$ que l'on peut encore réécrire $2C'(x)f'(x) + f(x)C'''(x) = 0$. Comme f ne s'annule pas, c'est encore équivalent à :

$$C'''(x) + 2\frac{f'(x)}{f(x)}C'(x) = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle homogène du premier ordre est l'ensemble des fonctions s'écrivant $C'(x) = \mu \exp(-2 \ln(f(x))) = \mu \frac{1}{f(x)^2}$.

En intégrant encore une fois, on trouve $C(x) = \lambda + \mu \int_0^x \frac{1}{g(t)} dt$. Et donc :

$$y(x) = \lambda f(x) + \mu h(x).$$

Ainsi (f, h) est une famille génératrice de S .

Il reste à vérifier que f et h sont linéairement indépendantes. On vérifie aisément que $h(0) = 0$ et que $h'(0) = 1$ et donc h clairement n'est pas un multiple de f .

Exercice 10 - Mineur (6 points)

$$M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C}.$$

Polynôme caractéristique : $\chi(\lambda) = \det(M(z) - \lambda I_3)$.

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & z & z \\ 1 & -\lambda & z \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - z) - z(-\lambda - z) + z(1 + \lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda z + z\lambda + z^2 + z + z\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3z\lambda + z^2 + z \end{aligned}$$

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 3z\lambda + z^2 + z.$$

Idée : $M(z)$ est diagonalisable si χ est scindé à racines simples (la réciproque n'est pas *a priori* vraie). On va étudier χ' . Ses racines sont les candidats pour des racines doubles (ou plus) de χ . On devrait pouvoir dégager les cas où les racines sont toutes manifestement simples et traiter les cas restants à la main.

On a :

$$\chi'(\lambda) = -3\lambda^2 + 3z.$$

Les racines de χ' sont les racines carrées (complexes) de z . Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^2 = z$.

Vérifions si ω est racine de χ . $\chi(\omega) = -\omega^3 + 3z\omega + z^2 + z$. Or $z = \omega^2$. Donc :

$$\chi(\omega) = -\omega^3 + 3\omega^3 + \omega^4 + \omega^2 = \omega^4 + 2\omega^3 + \omega^2.$$

Clairement, on peut factoriser par ω^2 . Et donc :

$$\chi(\omega) = \omega^2(\omega^2 + 2\omega + 1) = \omega^2(\omega + 1)^2.$$

Donc si $\omega \neq 0$ et $\omega \neq -1$ (c'est-à-dire $z \neq 0$ et $z \neq 1$) alors $\chi(\omega) \neq 0$. Et donc dans ce cas toutes les racines χ sont simples. Et χ est toujours scindé dans les complexes.

Donc Si $z \notin \{0, 1\}$, alors $M(z)$ est diagonalisable.

Si $z = 0$, $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable (sinon elle serait semblable à 0 et donc égale à 0).

Si $z = 1$, $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est symétrique réelle donc diagonalisable.

$$M(z) \text{ est diagonalisable si et seulement si } z \neq 0.$$

Planche C - Correction

Exercice 11 - Majeur (14 points)

1. $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2 \geq 0$ sur \mathbb{R} . $P' = 2X - 2$, $P'' = 2$.
 $Q = P + P' + P'' = (X^2 - 2X + 1) + (2X - 2) + 2 = X^2 + 1 > 0$ sur \mathbb{R} . $P \geq 0$ et $Q > 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$, positive sur \mathbb{R} , et $Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}$.
 - (a) $Q = P + P' + P'' + \dots + P^{(2n)}$. On a $P^{(k)} = 0$ pour $k > 2n$, donc $Q' = P' + P'' + \dots + P^{(2n)} = Q - P$.
 $Q' = Q - P$.
 - (b) Posons $g(t) = e^{-t}Q(t)$. Alors $g'(t) = e^{-t}(Q'(t) - Q(t)) = e^{-t}(Q(t) - P(t) - Q(t)) = -e^{-t}P(t)$.
 Puisque $P \geq 0$ et $P \neq 0$: $g'(t) = -e^{-t}P(t) \leq 0$ et $g' \neq 0$. Donc g est décroissante (au sens large).
 Quand $t \rightarrow +\infty$: $e^{-t}Q(t) \rightarrow 0$ (car Q est polynômial). Comme g est décroissante avec $\lim_{+\infty} g = 0$:
 $g(t) \geq 0$ pour tout t , soit $Q(t) \geq 0$ pour tout t .

Si $Q(t_0) = 0$, alors $g(t_0) = 0$, donc $g \equiv 0$ sur $[t_0, +\infty[$, d'où $P \equiv 0$ sur cet intervalle, et $P = 0$ (polynôme), contradiction.

Q est strictement positive sur \mathbb{R} .

3. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 : (P | Q) = \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0)$.

(a) Vérifions les axiomes du produit scalaire.

Bilinéarité : $(PQ)^{(k)}(0)$ est linéaire en P et en Q (par la formule de Leibniz et la linéarité de la dérivation).

Symétrie : $(P | Q) = \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0) = (Q | P)$ car $PQ = QP$.

Définie positive : $(P | P) = \sum_{k=0}^{2n} (P^2)^{(k)}(0)$. D'après la question 2 (avec P^2 qui est de degré $\leq 2n$ et positive sur \mathbb{R}) : si $P \neq 0$, la fonction $\sum_{k=0}^{2n} (P^2)^{(k)}$ est strictement positive, en particulier en 0. Donc $(P | P) > 0$ pour $P \neq 0$, et $(0 | 0) = 0$.

$(P | Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) **Base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$** : Calculons d'abord les produits. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_1[X]$, $PQ \in \mathbb{R}_2[X]$, donc $(PQ)^{(k)} = 0$ pour $k > 2$ et $(P | Q) = PQ(0) + (PQ)'(0) + (PQ)''(0)$.

$$(1 | 1) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

$$(X | X) = 0 + (2X)'(0) + 0 = 0 + (X^2)''(0)/1. \text{ Calculons : } X^2, (X^2)' = 2X, (X^2)'' = 2. \text{ Donc } (X | X) = 0 + 0 + 2 = 2.$$

$$(1 | X) = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Appliquons Gram-Schmidt. $e_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1$. Puis $v_2 = X - (X | 1) \cdot 1 = X - 1$. $\|v_2\|^2 = (X - 1 | X - 1) = (X | X) - 2(X | 1) + (1 | 1) = 2 - 2 + 1 = 1$.

$(1, X - 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

(c) La distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ est $u_n = \|X^n - p(X^n)\|$ où p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.

$$p(X^n) = (X^n | 1) \cdot 1 + (X^n | X - 1)(X - 1).$$

Calculons $(X^n | 1) : (X^n \cdot 1)^{(k)}(0) = (X^n)^{(k)}(0)$. Seul le terme $k = n$ donne $(X^n)^{(n)}(0) = n!$. Donc $(X^n | 1) = n!$.

Calculons $(X^n | X - 1) : (X^n(X - 1))^{(k)}(0) = (X^{n+1} - X^n)^{(k)}(0)$. Le terme $k = n$ donne $0 - n! = -n!$ et le terme $k = n + 1$ donne $(n + 1)! - 0 = (n + 1)!$. Donc $(X^n | X - 1) = -n! + (n + 1)! = -n! + (n + 1)n! = n \cdot n!$.

$$p(X^n) = n! + n \cdot n! \cdot (X - 1) = n!(1 + nX - n) = n!(nX + 1 - n).$$

En réinjectant dans la définition de u_n et après calcul, on trouve : $u_n^2 = (X^n | X^n) - (n!)^2 - (n \cdot n!)^2 = (2n)! - (n!)^2(1 + n^2)$.

Et puisque u_n est positif, on conclut : $u_n = \sqrt{(2n)! - (n!)^2(1 + n^2)}$.

4. On passe à la forme exponentielle. On a $u_n^{-1/n} = \exp(-\frac{1}{n} \ln u_n)$. Cela nous pousse à étudier $\ln u_n$. On a :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{2} \ln((2n)! - (n!)^2(1 + n^2)) = \frac{1}{2} \ln \left((2n)! \left(1 - \frac{(n!)^2(1 + n^2)}{(2n)!} \right) \right).$$

Montrons que $\frac{(n!)^2(1+n^2)}{(2n)!}$ tend vers 0. En utilisant Stirling et après calcul, on trouve :

$$\frac{(n!)^2(1 + n^2)}{(2n)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi}n^{5/2}}{2^{2n}} \rightarrow 0.$$

Donc $\ln \left(1 - \frac{(n!)^2(1+n^2)}{(2n)!} \right) \rightarrow 0$. On peut donc écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{2} \ln((2n)!) + o(1) = \frac{1}{2} ((2n) \ln(2n) - 2n) + o(n) + o(1) = n \ln(2n) - n + o(n).$$

En réinjectant dans le paramètre de l'exponentielle :

$$-\frac{1}{n} \ln u_n = -\ln(n) + 1 - \ln(2) + o(1).$$

On a donc :

$$u_n^{-1/n} = \exp(-\ln(n) + 1 - \ln(2) + o(1)) = \exp(-\ln(n)) \exp(1 - \ln(2) + o(1)) = \frac{\exp(1 - \ln(2) + o(1))}{n}.$$

Dans l'exponentielle du dessus, on ne fait que composer une limite et donc :

$$u_n^{-1/n} \sim \frac{\alpha}{n}$$

où α est une constante.

La série $\sum (u_n)^{-1/n}$ diverge.

Exercice 12 - Mineur (6 points)

$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ pour $n \geq 1, x \in \mathbb{R}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé. $|\arctan(u)| \leq |u|$ pour tout u , donc :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{n}} = \frac{|x|}{n^{3/2}}$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann $3/2 > 1$), pour tout x fixé, $\sum f_n(x)$ converge absolument.

$\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

2. Montrons la convergence uniforme sur tout segment $[-A, A]$. Pour $|x| \leq A$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{A}{n^{3/2}}$$

Puisque $\sum \frac{A}{n^{3/2}}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-A, A]$. Les f_n étant continues, la limite uniforme f est continue sur $[-A, A]$.

Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, f est continue sur \mathbb{R} .

Planche D - Correction

Exercice 13 - Majeur (14 points)

1. Pour $x > 0$. La fonction $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Donc φ est constante sur $]0, +\infty[$. En $x = 1$: $\varphi(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} \arctan(x \tan \theta) d\theta$.

- (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \arctan(x \tan \theta)$ est continue sur $[0, \pi/2[$. En $\theta \rightarrow \pi/2^-$: $\tan \theta \rightarrow +\infty$ si $x > 0$, donc $\arctan(x \tan \theta) \rightarrow \pi/2$ (borné). Si $x = 0$: l'intégrande vaut 0. Si $x < 0$: $\arctan(x \tan \theta) \rightarrow -\pi/2$.

L'intégrande est bornée par $\pi/2$, donc f est définie par une intégrale convergente. f est définie sur \mathbb{R} .

Imparité : $f(-x) = \int_0^{\pi/2} \arctan(-x \tan \theta) d\theta = -\int_0^{\pi/2} \arctan(x \tan \theta) d\theta = -f(x)$ (car \arctan est impaire). f est impaire.

- (b) Pour la continuité sur $]0, +\infty[$: la fonction $x \mapsto \arctan(x \tan \theta)$ est continue pour tout θ , et dominée par $\pi/2$ (intégrable sur $[0, \pi/2]$). Par le théorème de continuité sous le signe intégral (domination par une fonction intégrable indépendante de x) : f est continue sur $]0, +\infty[$.

- (c) Pour $0 \leq x_1 \leq x_2$ et $\theta \in]0, \pi/2[$: $x_1 \tan \theta \leq x_2 \tan \theta$ et \arctan est croissante, donc $\arctan(x_1 \tan \theta) \leq \arctan(x_2 \tan \theta)$. En intégrant : $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f est croissante sur \mathbb{R}_+ .

3. (a) Soit $a > 0$. Posons $g(x, \theta) = \arctan(x \tan \theta)$. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \theta) = \frac{\tan \theta}{1 + x^2 \tan^2 \theta}$$

Pour $x \geq a$, $\left| \frac{\tan \theta}{1 + x^2 \tan^2 \theta} \right| \leq \frac{1}{a^2 \tan \theta}$ pour θ proche de $\pi/2$, qui est intégrable.

Le reste des hypothèses se vérifie aisément.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral : f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan \theta}{1 + x^2 \tan^2 \theta} d\theta$$

Calculons cette intégrale. Posons $u = \tan \theta$, $d\theta = \frac{du}{1+u^2}$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1 + x^2 u^2)(1 + u^2)} du$$

Pour $x \neq 1$: $\frac{u}{(1+x^2 u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{u}{1+u^2} - \frac{u}{1+x^2 u^2} \right)$.

Les deux primitives sont logarithmiques ; chacune diverge en $+\infty$, mais leur différence converge :

$$f'(x) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(x^2-1)} [\ln(1+x^2 u^2) - \ln(1+u^2)]_0^M = \frac{1}{2(x^2-1)} \ln(x^2) = \frac{\ln x}{x^2-1}$$

Par continuité en $x = 1$: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} \text{ pour } x > 0, x \neq 1, \text{ et } f'(1) = \frac{1}{2}.$$

- (b) Posons $u = x \tan \theta$, d'où $d\theta = \frac{x du}{x^2+u^2}$ et $\arctan(x \tan \theta) = \arctan(u)$. On obtient :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan(u)}{x^2+u^2} du, \quad \text{soit} \quad \frac{f(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{x^2+u^2} du$$

En ne gardant que $u \in [0, 1]$: $\frac{f(x)}{x} \geq \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{x^2+u^2} du$.

La fonction \arctan est concave sur \mathbb{R}_+ . Par concavité, pour $u \in [0, 1]$:

$$\arctan(u) \geq u \arctan(1) = \frac{\pi}{4} u$$

(la corde entre $(0, 0)$ et $(1, \frac{\pi}{4})$ est en-dessous du graphe). Donc :

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{u}{u^2+x^2} du$$

Pour $0 < x \leq 1$: $x^2 \leq x$, donc $u^2 + x^2 \leq u^2 + x$ et $\frac{u}{u^2+x^2} \geq \frac{u}{u^2+x}$. On en déduit :

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{u}{u^2+x} du.$$

4. Pour $x > 0$, posons $\theta \in]0, \pi/2[$. On utilise la question 1 : pour $x \tan \theta > 0$,

$$\arctan(x \tan \theta) + \arctan\left(\frac{1}{x \tan \theta}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On effectue le changement de variable $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ dans $f(1/x)$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi/2} \arctan\left(\frac{\tan \theta}{x}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \arctan\left(\frac{1}{x \tan \psi}\right) \cdot \frac{d\psi}{1} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x \tan \psi)\right) d\psi$$

(en utilisant $\tan(\pi/2 - \psi) = 1/\tan \psi$ et la question 1). Donc :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4} - f(x)$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty : 1/x \rightarrow 0^+$, donc $f(1/x) \rightarrow f(0) = 0$ (par continuité). Ainsi $f(x) \rightarrow \frac{\pi^2}{4} - 0 = \frac{\pi^2}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 14 - Mineur (6 points)

Soit $\dim E = n$, $f + g = \text{Id}$, $\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$.

1. On a $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Donc $\underbrace{\text{rg}(f + g)}_{=n} \leq \dim(\text{Im}f + \text{Im}g) \leq \dim \text{Im}f + \dim \text{Im}g$. Par double

inégalité, $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$.

2. $\text{Ker } f \subset \text{Im}g$: Soit $x \in \text{Ker } f$. Alors $x = f(x) + g(x) = g(x) \in \text{Im}g$.

Ensuite par les dimensions et le théorème du rang $\dim \text{Im}g = \text{rg } g = n - \text{rg } f = \dim \text{Ker } f$, et $\text{Ker } f \subset \text{Im}g$, donc $\text{Ker } f = \text{Im}g$.

Par symétrie (en échangeant les rôles de f et g) : $\text{Im}f = \text{Ker } g$.

Planche E - Correction

Exercice 15 - Majeur (14 points)

$\varphi_U : P \mapsto P + P(a)U$, avec $a \in \mathbb{C}$, $U \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$.

1. Pour $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_U(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q) + (P + \lambda Q)(a) \cdot U = P + P(a)U + \lambda(Q + Q(a)U) = \varphi_U(P) + \lambda \varphi_U(Q)$$

De plus, si $\deg P \leq d$, alors $\deg(\varphi_U(P)) \leq \max(d, \deg U)$, donc φ_U envoie bien $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$.

φ_U est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

2. (a) Soit $P \in \text{Ker } \varphi_U : P + P(a)U = 0$, soit $P = -P(a)U$. Donc $P \in \text{Vect}(U)$. $\text{Ker } \varphi_U \subset \text{Vect}(U)$.

(b) Si $U(a) = -1$: pour $P = U$, $\varphi_U(U) = U + U(a)U = U - U = 0$. Donc $U \in \text{Ker } \varphi_U$ et $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker } \varphi_U$.

Avec l'inclusion inverse : $U(a) = -1 \Rightarrow \text{Ker } \varphi_U = \text{Vect}(U)$.

Si $U(a) \neq -1$: soit $P \in \text{Ker } \varphi_U$. On a $P = -P(a)U$, donc $P(a) = -P(a)U(a)$, soit $P(a)(1 + U(a)) = 0$.

Comme $1 + U(a) \neq 0 : P(a) = 0$, puis $P = 0$. $U(a) \neq -1 \Rightarrow \text{Ker } \varphi_U = \{0\}$.

3. (a) Calculons $\varphi_U^2(P) = \varphi_U(P + P(a)U) = (P + P(a)U) + (P + P(a)U)(a) \cdot U = P + P(a)U + (P(a) + P(a)U(a))U = P + P(a)U(2 + U(a))$.

D'autre part, $(2 + U(a))\varphi_U(P) = (2 + U(a))(P + P(a)U)$ et $(1 + U(a))P$.

$$\varphi_U^2(P) - (2 + U(a))\varphi_U(P) + (1 + U(a))P$$

$$= P + P(a)U(2 + U(a)) - (2 + U(a))P - (2 + U(a))P(a)U + (1 + U(a))P$$

$$= P(1 - 2 - U(a) + 1 + U(a)) + P(a)U(2 + U(a) - 2 - U(a)) = 0$$

$$\varphi_U^2 - (2 + U(a))\varphi_U + (1 + U(a))\text{Id} = 0.$$

(b) φ_U est un automorphisme ssi φ_U est bijectif, ssi $\text{Ker}\varphi_U = \{0\}$, ssi $U(a) \neq -1$ (question 2b).

Quand $U(a) \neq -1$: la relation $\varphi_U^2 - (2 + U(a))\varphi_U + (1 + U(a))\text{Id} = 0$ donne $\varphi_U(\varphi_U - (2 + U(a))\text{Id}) = -(1 + U(a))\text{Id}$. Donc : $\varphi_U^{-1} = \frac{1}{1+U(a)}((2 + U(a))\text{Id} - \varphi_U)$, soit pour $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$\varphi_U^{-1}(P) = \frac{1}{1+U(a)}((2 + U(a))P - P - P(a)U) = \frac{(1 + U(a))P - P(a)U}{1 + U(a)} = P - \frac{P(a)}{1 + U(a)}U$$

CNS pour automorphisme : $U(a) \neq -1$. Alors $\varphi_U^{-1}(P) = P - \frac{P(a)}{1 + U(a)}U$.

4. Si $U(a) = -1$: l'équation annulatrice donne $\varphi_U^2 - \varphi_U = 0$, soit $\varphi_U(\varphi_U - \text{Id}) = 0$. Le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ est scindé à racines simples et annule φ_U .

φ_U est un projecteur.

$\text{Im}\varphi_U = \text{Ker}(\varphi_U - \text{Id}) = \{P \mid P(a)U = 0\} = \{P \mid P(a) = 0\}$ (car $U \neq 0$), i.e. l'ensemble des polynômes s'annulant en a .

$\text{Im}\varphi_U = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(a) = 0\} = (X - a)\mathbb{C}[X]$.

5. On cherche $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P + P(a)U = V$ (donnée).

Si $U(a) \neq -1$: φ_U est un automorphisme, et $P = \varphi_U^{-1}(V) = V - \frac{V(a)}{1+U(a)}U$.

Si $U(a) \neq -1$: solution unique $P = V - \frac{V(a)}{1 + U(a)}U$.

Si $U(a) = -1$: φ_U est un projecteur sur $(X - a)\mathbb{C}[X]$. L'équation a des solutions ssi $V \in \text{Im}\varphi_U$, i.e. $V(a) = 0$. Dans ce cas, les solutions sont $P = V + \lambda U$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ (car $\text{Ker}\varphi_U = \text{Vect}(U)$).

Si $U(a) = -1$: solutions ssi $V(a) = 0$, et alors $\{P = V + \lambda U \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 16 - Mineur (6 points)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^2} dx \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^2} dx.$$

1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$. Sur $]0, \pi/2[: x + \pi/4 \in]\pi/4, 3\pi/4[$, donc $\sin(x + \pi/4) > 0$ et le dénominateur ne s'annule pas. Les intégrandes sont continues sur $[0, \pi/2]$. I et J existent.

2. Effectuons le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ dans J :

$$J = \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin(\pi/2 - u)}{(\sin(\pi/2 - u) + \cos(\pi/2 - u))^2} (-du) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{(\cos u + \sin u)^2} du = I$$

$I = J$.

3. Calculons $I + J$:

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

On utilise $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$. Calculons :

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{du}{\sin u}$$

Or $\sin(u) = \frac{2t}{1+t^2}$ avec $t = \tan(u/2)$. Donc $\frac{1}{\sin(u)} = \frac{1+t^2}{t}$ est de la forme $\frac{v'}{v}$. Ainsi $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| + C$.
Donc :

$$I + J = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \tan \frac{u}{2} \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \tan \frac{3\pi}{8} - \ln \tan \frac{\pi}{8} \right)$$

Or $\tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\tan(\pi/8)}$, donc $\ln \tan \frac{3\pi}{8} - \ln \tan \frac{\pi}{8} = -2 \ln \tan \frac{\pi}{8}$.

On sait que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, donc $\ln \tan \frac{\pi}{8} = \ln(\sqrt{2} - 1) = -\ln(\sqrt{2} + 1)$.

$$I + J = \frac{-2 \ln(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = \frac{2 \ln(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Puisque $I = J : 2I = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})$.

$$I = J = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Planche Mines-Télécom - Correction

Exercice 17 - Premier exercice

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

- Pour $u > -1$: posons $h(u) = \ln(1 + u) - u$. On a $h(0) = 0$ et $h'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{-u}{1+u}$.
 Pour $u > 0$: $h'(u) < 0$, donc h est décroissante sur $]0, +\infty[$, d'où $h(u) < h(0) = 0$.
 Pour $u \in]-1, 0[$: $h'(u) > 0$, donc h est croissante sur $] -1, 0[$, d'où $h(u) < h(0) = 0$.
 En $u = 0$: $h(0) = 0$.

$$\forall u > -1, \quad \ln(1 + u) \leq u.$$

- Posons $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$. On a $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 + \frac{x}{n}))$.
 D'après la question 1, $\ln(1 + x/n) \leq x/n$, donc $n \ln(1 + x/n) \leq x$, et :

$$0 \leq f_n(x) \leq e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x}$$

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ($\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$).

De plus, pour tout $x \geq 0$ fixé : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x$, donc $f_n(x) \rightarrow e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x}$.

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1.$$

Exercice 18 - Second exercice

X v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , $p_n = P(X = n)$, $r_n = P(X > n)$, G la fonction génératrice de X .

- Pour $|t| < 1$: $r_n = P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k \leq 1$. Donc $|r_n t^n| \leq |t|^n$ et $\sum |t|^n$ converge.

Le rayon de convergence de $\sum r_n t^n$ est au moins 1.

- Pour $|t| < 1$: $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k$ et $1 - G(t) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k (1 - t^k)$.

D'autre part, $(1 - t)H(t) = (1 - t) \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$.

Calculons $(1 - t)H(t)$ en utilisant $r_n - r_{n-1} = -p_n$ (pour $n \geq 1$) :

$$(1 - t) \sum_{n=0}^N r_n t^n = r_0 + \sum_{n=1}^N (r_n - r_{n-1}) t^n - r_N t^{N+1} = r_0 - \sum_{n=1}^N p_n t^n - r_N t^{N+1}$$

Or $r_0 = 1 - p_0$ et $\sum_{n=1}^N p_n t^n = G_N(t) - p_0$ (somme partielle). Quand $N \rightarrow +\infty$: $r_N t^{N+1} \rightarrow 0$ (car $|t| < 1$ et $r_N \leq 1$).

$(1 - t)H(t) = (1 - p_0) - (G(t) - p_0) = 1 - G(t)$.

$$H(t) = \frac{1 - G(t)}{1 - t} \text{ pour } t \in] -1, 1[.$$

Planche Mines-Ponts - Correction

Exercice 19 - Premier exercice

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. $\frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée pour $x > -1$ (le terme général décroît vers 0 en module).

Attention, il ne faut pas que le dénominateur s'annule.

On obtient donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^{-*} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$.

2. On montre la convergence uniforme des dérivées via la convergence normale. La dérivée k -ième (formelle) est :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} k!}{(x+n)^{k+1}}$$

Pour $x \in [a, b] \subset]-1, 1[$ et $n \geq 2 : |x+n| \geq n-1$, donc $\frac{k!}{|x+n|^{k+1}} \leq \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}$. Puisque $\sum \frac{1}{(n-1)^{k+1}}$ converge pour $k \geq 1$, la série des dérivées converge normalement sur $[a, b]$ (à savoir rédiger).

Par le théorème de dérivation terme à terme (itéré pour tout k) :

f est de classe \mathcal{C}^k sur $] -1, 1[$ pour tout k et donc \mathcal{C}^∞ .

3. **Intégrabilité de f sur $] -1, 0]$:**

En $x = -1^+ : f(x) = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3} + \dots$. Le premier terme $\frac{-1}{x+1} \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -1^+$. Plus précisément, $f(x) \sim \frac{-1}{x+1}$ en -1^+ (on sépare la somme, le reste est fini donc négligeable).

Puisque $\frac{1}{x+1}$ n'est pas intégrable sur $] -1, 0]$, f n'est pas intégrable sur $] -1, 0]$.

4. **DSE de f :** Pour $|x| < 1$, on développe chaque terme :

$$\frac{(-1)^n}{x+n} = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1+x/n} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} x^k$$

En sommant sur n (interversion justifiée par convergence absolue pour $|x| < 1$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \eta(k+1) x^k$$

où $\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ est la fonction êta de Dirichlet.

Le rayon de convergence est au moins 1. f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Exercice 20 - Second exercice

Idée : On montre que A et B ont un vecteur propre commun v . Cela nous donne la première colonne de P . En prenant un supplémentaire de $\text{Vect}(v)$, on peut réitérer avec une matrice d'une taille inférieure.

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ avec $AB = \alpha A + \beta B$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Lemme : Montrons que A et B possède un vecteur propre commun.

Commençons par remarquer que $(A - \beta I_n)(B - \alpha I_n) = AB - \alpha A - \beta B + \alpha\beta I_n = \alpha\beta I_n$. Distinguons deux cas :

- Si $\alpha\beta \neq 0$, alors $A - \beta I_n$ et $B - \alpha I_n$ sont inversibles et commutent. De plus, I_n commute avec toute matrice, donc A commute avec $B - \alpha I_n$ puis A commute avec B .

Comme A et B commutent, $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est stable par B . La restriction de l'endomorphisme associé à B à ce noyau est un endomorphisme qui admet au moins un vecteur propre puisqu'on travaille dans \mathbb{C} . Donc A et B ont un vecteur propre commun.

- Si $\alpha\beta = 0$, alors $(A - \beta I_n)(B - \alpha I_n) = 0$. Ainsi $\text{Im}(B - \alpha I_n) \subset \text{Ker}(A - \beta I_n)$. Si $B = \alpha I_n$, l'exercice est immédiat. Sinon, $\text{Im}(B - \alpha I_n)$ est non trivial et donc $F = \text{Ker}(A - \beta I_n)$ non plus. Or F est stable pour B . En effet si $v \in F$, $(A - \beta I_n)Bv = ABv - \beta Bv = \alpha Av + \beta Bv - \beta Bv = \alpha Av = \alpha\beta v = 0$. Encore une fois, on prend la restriction de l'endomorphisme associé à B à ce noyau qui nous donne un vecteur propre commun.

Raisonnement par récurrence sur n .

Initialisation ($n = 1$) : Toute matrice 1×1 est triangulaire. OK.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat pour les matrices de taille $n - 1$. Montrons-le pour n .

A et B ont un vecteur propre commun d'après le lemme. Notons $Av = \lambda v$ et $Bv = \mu v$.

Complétons v en une base. Par changement de base, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} \mu & \star \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

Il reste à montrer que A' et B' sont cotrigonalisables. Or par calcul par blocs :

$$A'B' = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \star \\ 0 & A_1B_1 \end{pmatrix}$$

et :

$$\alpha A' + \beta B' = \begin{pmatrix} \alpha\lambda\beta\mu & \star \\ 0 & \alpha A_1 + \beta B_1 \end{pmatrix}.$$

En particulier $A_1B_1 = \alpha A_1 + \beta B_1$ et donc l'hypothèse de récurrence s'applique.

Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.