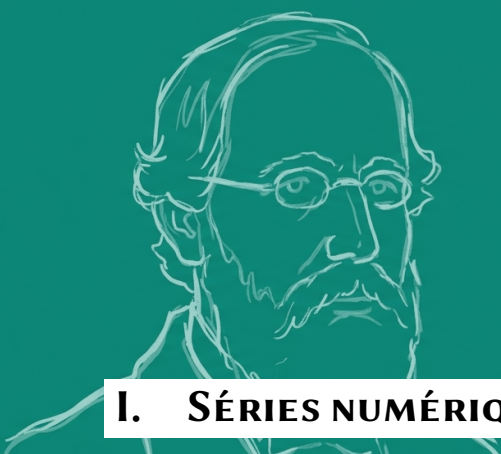




Le programme de première année est riche en ce qui concerne l'analyse. Nous ne pourrons pas tout revoir. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur trois thèmes, non pas parce qu'ils sont plus importants dans l'absolu, mais parce que sans eux, des pans entiers du programme de deuxième année seront incompréhensibles.

Il s'agit de l'étude de la convergence des séries numériques (notamment via l'utilisation des relations de comparaison), du calcul d'intégrales, et de la résolution d'équations différentielles. Sur ces trois thèmes, il convient de s'entraîner intensément. Assurez-vous de maîtriser ces notions. Elles seront indispensables cette année.

C'est un chapitre de révisions. En conséquence, nous ne nous étendrons pas sur la théorie. Le chapitre est divisé en trois sections. Dans chacune d'elles, nous rappelons quelques résultats principaux qu'il faudra appliquer dans les exercices.



I. SÉRIES NUMÉRIQUES

1. Résultats généraux

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle *série de terme général* u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ des *sommes partielles* définie par

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite (S_N) converge dans $\mathbb{K}$. Sa *somme* est alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N.$$

Si (S_N) diverge, on dit que la série *diverge*. Le *reste d'ordre* n est $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarque

La définition ainsi donnée est *formelle*. Elle permet de rendre rigoureuse la notion de série. Cela étant dit, l'intuition que l'on cherche à capturer est relativement simple : on cherche à définir ce qu'est une somme avec une infinité de termes.

Remarque

Autant la définition de série formelle sert assez peu en tant que telle, autant il est important de faire la distinction entre une *série* et sa *somme*. La série, c'est le « truc » qui formalise le fait qu'on essaie de faire une somme infinie. La somme, c'est le résultat obtenu si celui existe.

Confondre les deux c'est faire une erreur analogue à confondre une suite et son éventuelle limite. Une suite peut avoir une limite ou elle peut ne pas en avoir. Mais une suite ne se résume pas à sa limite. C'est pareil pour les séries.

Remarque

En revanche, la définition de convergence d'une série comme la convergence de la suite des sommes partielles est à *connaître*. D'ailleurs, faisons quelques exemples d'applications.

Exemple 1.2

La série $\sum_{n \geq 0} n$ diverge. En effet pour $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

En revanche, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge. En effet pour $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2.$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. On peut également calculer le reste de cette série pour tout $n \geq 0$.

Pour $N \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-n}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Ainsi } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

Proposition 1.3 (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. La réciproque est fausse.

Démonstration

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente. Montrons que $u_n \rightarrow 0$.

Notons (S_N) la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} u_n$. On a donc pour tout $N \geq 0$:

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

Puis :

$$S_{N+1} - S_N = \sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^N u_n = u_{N+1}.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, (S_N) admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ finie. Et (S_{N+1}) en tant que suite extraite, admet la même limite finie.

Ainsi :

$$S_{N+1} - S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0.$$

D'où $u_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ puis en rajoutant le premier terme :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

□

Définition 1.4

Si $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge **grossièrement**.

Remarque

La divergence grossière est une condition *suffisante* de divergence (si une série diverge grossièrement, alors elle diverge). Mais ce n'est pas une condition *nécessaire*. Ainsi, dire que $u_n \rightarrow 0$ ne suffit pas pour prouver que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Cela peut paraître évident mais d'expérience, l'erreur revient encore quelques semaines avant les concours.

Exemple 1.5

Avec les exemples précédents, on a :

$$n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et on a bien $\sum_{n \geq 0} n$ diverge.

En revanche, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge et en effet :

$$\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En revanche, la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge bien que :

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il existe aussi des séries divergentes pour lequel le terme général n'a pas de limite. Par exemple la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ est divergente, et on a bien $(-1)^n \not\rightarrow 0$ mais cette fois-ci parce que le terme général n'a pas de limite.

Divergence de la série harmonique

Montrons que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

L'idée de la démonstration est d'utiliser le fait que les sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ évoluent comme $\ln(n)$. Or $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$. Ainsi, on peut espérer qu'en regardant les sommes partielles en $2N$ et en N , on devrait récupérer une constante. Cette constante peut nous permettre de montrer que la série ne converge pas. En ce qui concerne la comparaison entre ces sommes partielles et $(\ln(n))$, nous rendrons cette analogie plus précise dans un chapitre ultérieur.

En attendant, procédons par l'absurde. On suppose que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ converge.

Maintenant, pour $N \geq 1$, posons $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$. On a :

$$S_{2N} - S_N = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}.$$

Dans cette somme, $n \leq 2N$ donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2N}$. Puis par croissance des sommes finies, on en déduit :

$$S_{2N} - S_N \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} \geq (2N - N) \times \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2}.$$

Puisqu'on a supposé que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ converge, (S_N) converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Et de même (S_{2N}) converge vers la même limite comme suite extraite. Ainsi :

$$S_{2N} - S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0.$$

Puis par passage à la limite des inégalités larges : $0 \geq \frac{1}{2}$. Ce résultat est **absurde**. Ainsi notre

hypothèse est fausse et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. □

Proposition 1.6 (Linéarité)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration

Pour $N \geq 0$, notons $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^N v_n$. Par linéarité des sommes finies, on a pour tout $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^N (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda S_N + \mu T_N.$$

Or (S_N) et (T_N) convergent par hypothèse vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ respectivement. Par opérations sur les limites, $(\lambda S_N + \mu T_N)$ converge vers $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

D'où le résultat. □

Remarque

En particulier, pour $\lambda \neq 0$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature. Cette remarque sera utile pour comparer une série à un multiple d'une série de référence.

Exemple 1.7

Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+3^n}{6^n}$.

On commence par décomposer le terme général :

$$\frac{2+3^n}{6^n} = 2 \times \frac{1}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les séries $\sum \left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes (de raisons respectives $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$, toutes deux dans $[0, 1[$). Par linéarité, $\sum_{n \geq 0} \frac{2+3^n}{6^n}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+3^n}{6^n} = 2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{6}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{6}{5} + 2 = \boxed{\frac{22}{5}}.$$

Remarque

Attention : la linéarité demande que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ *convergent* avant de pouvoir écrire $\sum (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$. On ne peut donc pas, en général, scinder une série en deux sans précaution.

Plus précisément, sur les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum (u_n + v_n)$, il faut qu'au moins *deux* d'entre elles convergent pour pouvoir conclure sur la troisième (et écrire l'égalité des sommes).

Par exemple, $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$ converge (c'est la série nulle), mais on n'a pas le droit d'écrire $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = 0$ puisque ces deux dernières séries divergent. Le symbole $+\infty - \infty$ n'a pas de sens.

2. Séries de référence**Proposition 1.8 (Séries géométriques)**

Pour $q \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Convergence des séries géométriques

Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = q^n$.

On distingue les deux cas :

- Si $|q| \geq 1$, alors $|q|^N \geq 1$ et donc $|q|^N \not\rightarrow 0$. Ainsi $q^N \not\rightarrow 0$.

Puis $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge grossièrement.

— Si $|q| < 1$, pour tout $N \geq 0$, on pose S_N la $N^{\text{ème}}$ somme partielle et on a :

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Maintenant, $\frac{1}{1-q}$ est constant et donc a toujours une limite. Ainsi (S_N) admet une limite finie si et seulement la suite (q^{N+1}) admet une limite finie.

Or $|q| < 1$, donc $q^{N+1} \rightarrow 0$ et ainsi $S_N \rightarrow \frac{1}{1-q}$.

D'où $\boxed{\sum_{n \geq 0} q^n \text{ converge}} \text{ et } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}.$

□

Remarque

Les séries de la forme $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ ou encore $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont appelées séries géométriques dérivées. Elles convergent à la même condition que $|q| < 1$. Cependant ce résultat est en bord de programme de première année et les sujets demandent régulièrement de le redémontrer. On les reverra dans le cadre du chapitre sur les séries entières.

Proposition 1.9 (Série exponentielle)

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Convergence de la série exponentielle

Il y a plusieurs façons de montrer ce résultat. Mais l'idée principale est de reconnaître le début du développement limité de $\exp$ en 0. Si on pouvait montrer que le reste de ce développement (le petit o) tend vers 0 à x fixé lorsqu'on augmente l'ordre du développement, on aurait notre résultat.

Nous allons le faire en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, vue en première année. Rappelons son énoncé. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est C^{n+1} (avec $n \geq 0$) sur $[a, b]$ et si M_{n+1} est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, b]$, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Autrement dit, l'inégalité de Taylor-Lagrange contrôle précisément le reste du développement, ce qui est exactement ce dont nous avons besoin.

On a envie d'appliquer ce résultat à $\exp$. Mais l'énoncé parle de $x \in \mathbb{C}$ et l'inégalité de Taylor-Lagrange s'applique pour une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour contourner ce problème, à $x \in \mathbb{C}$ fixé posons :

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \exp(xt) \end{cases}$$

g est C^∞ sur $[0, 1]$ par composition et une récurrence immédiate donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$g^{(k)}(t) = x^k e^{xt}, \quad \text{et en particulier} \quad g^{(k)}(0) = x^k.$$

Majorons la dérivée d'ordre $n + 1$ sur $[0, 1]$. La fonction $t \mapsto |e^{xt}|$ est continue sur le segment $[0, 1]$: par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et on peut noter M un de ses majorants. Remarquez que M dépend de x , mais pas de n : c'est le point crucial. On a alors, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$|g^{(n+1)}(t)| = |x|^{n+1} |e^{xt}| \leq M|x|^{n+1}.$$

L'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à g entre 0 et 1, à l'ordre n , donne donc pour tout $n \geq 0$:

$$\left| g(1) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq M|x|^{n+1} \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

qui se simplifie en :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or :

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissance comparée si $|x| > 1$ et par opérations sur les limites si $|x| \leq 1$. Et donc par encadrement :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(x).$$

Les sommes partielles de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ convergent : la série converge, et d'où pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

□

Remarque

Nous revisiterons ce résultat via d'autres techniques dans le chapitre sur les séries entières.

Méthode 1.10 (Séries télescopiques)

On considère la série $\sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n)$.

— Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^N a_{n+1} - \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=1}^{N+1} a_n - \sum_{n=0}^N a_n.$$

Ainsi par télescopage, on obtient :

$$\sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_0.$$

— La suite $\left(\sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n) \right)$ admet donc une limite finie si et seulement si (a_{N+1}) admet une limite finie.

- Ainsi la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge. De plus, d'après les calculs précédents, dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_0.$$

Remarque

Bien que ce résultat soit standard, il faut savoir le remonter à chaque fois en revenant aux sommes partielles.

Exemple 1.11

Étudions et calculons la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
Commençons par remarquer que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Cela peut se faire par décomposition en éléments simples si on ne le voit pas immédiatement.

Ainsi pour tout $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

où la dernière égalité s'obtient par télescopage.

Or $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Proposition 1.12 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelée série de Riemann d'exposant α , converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque

Nous ne donnons pas de démonstration ici : elle repose sur la comparaison série-intégrale, qui sera mise en place dans le chapitre sur les séries numériques. Ce résultat y sera donc réétudié et redémontré.

En attendant, il est indispensable de le connaître : avec les séries géométriques, les séries de Riemann sont les séries de référence les plus utilisées dans les critères de comparaison de la sous-section suivante.

3. Théorèmes de comparaison des séries

Proposition 1.13 (Critère de comparaison des séries à termes positifs)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Les deux assertions étant contraposées l'une de l'autre, elles sont équivalentes. Il suffit donc de démontrer (par exemple) la première.

Simplifions un peu : on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pas seulement à partir d'un certain rang), on a $0 \leq u_n \leq v_n$. Le cas général se traite en séparant les premiers termes (ce qui ne change pas les natures de série).

Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge.

Pour $N \geq 0$, notons $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^N v_n$. Comme $u_n \geq 0$, la suite (S_N) est croissante.

De plus, par croissance des sommes finies :

$$\forall N \geq 0, \quad S_N = \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n = T_N.$$

Or $\sum v_n$ converge, donc (T_N) converge vers $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Comme (T_N) est elle-même croissante (car $v_n \geq 0$), on a $T_N \leq \ell$ pour tout N , et donc $S_N \leq \ell$ pour tout N .

Ainsi (S_N) est une suite croissante majorée. D'après le théorème de la limite monotone, (S_N) converge.

D'où $\sum u_n$ converge. □

Exemple 1.14

Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n + n}$ converge.

Pour tout $n \geq 0$, on a $2^n + n \geq 2^n > 0$, donc :

$$0 \leq \frac{1}{2^n + n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Or on a vu précédemment que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0, 1[$). Par le critère de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n + n} \text{ converge.}$$

Exemple 1.15

Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq n$ et donc :

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par contraposée du critère de comparaison

des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Proposition 1.16 (Critère d'équivalence des séries à termes positifs)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

Puisque $u_n \sim v_n$, on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. En particulier, il existe un rang n_0 à partir duquel $v_n > 0$ et :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}.$$

En multipliant par $v_n > 0$, on obtient pour tout $n \geq n_0$:

$$0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

Les séries $\sum \frac{1}{2}v_n$ et $\sum \frac{3}{2}v_n$ ont la même nature que $\sum v_n$ par linéarité.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \frac{3}{2}v_n$ converge, et par le critère de comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum \frac{1}{2}v_n$ diverge, et comme $\frac{1}{2}v_n \leq u_n$, par contraposée du critère de comparaison, $\sum u_n$ diverge.

Dans les deux cas, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. □

Exemple 1.17

Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Les deux suites sont strictement positives pour $n \geq 1$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (par exemple par comparaison avec $\sum \frac{1}{n(n+1)}$).

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Exemple 1.18

Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. Les deux suites sont strictement positives pour $n \geq 1$. Or la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par le critère d'équivalence des

séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Définition 1.19 (Absolue convergence)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Proposition 1.20 (L'absolue convergence implique la convergence)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Traisons d'abord le cas réel, puis le cas complexe.

Cas réel. Supposons $u_n \in \mathbb{R}$ pour tout n , et que $\sum |u_n|$ converge. Posons pour tout $n \geq 0$:

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \quad \text{et} \quad u_n^- = \max(-u_n, 0).$$

Ce sont les *parties positive et négative* de u_n . Par construction, $u_n^+ \geq 0$, $u_n^- \geq 0$, et on vérifie que :

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \quad \text{et} \quad |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

En particulier, on a les majorations $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Or $\sum |u_n|$ converge, donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent toutes les deux.

Par linéarité, la série $\sum (u_n^+ - u_n^-) = \sum u_n$ converge.

Cas complexe. Supposons maintenant $u_n \in \mathbb{C}$, et notons $u_n = a_n + i b_n$ avec $a_n = \Re(u_n) \in \mathbb{R}$ et $b_n = \Im(u_n) \in \mathbb{R}$. On a pour tout n :

$$|a_n| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad |b_n| \leq |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent. Autrement dit, les séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. D'après le cas réel, elles convergent.

Enfin, par linéarité (avec $\lambda = 1$ et $\mu = i$), $\sum u_n = \sum (a_n + i b_n)$ converge. $\square$

Exemple 1.21

Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant

$2 > 1$). Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, et en particulier $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Remarque

La réciproque est fautive : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. On dit alors qu'elles sont *semi-convergentes*. Un exemple est la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, qui converge mais dont la série des valeurs absolues est la série harmonique, qui diverge.

Convergence de la série harmonique alternée

Montrons que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

L'idée est d'utiliser la représentation intégrale $\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1} dx$ pour transformer la somme en une intégrale, puis de majorer le « reste ».

Pour $N \geq 1$, posons $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$. On a :

$$S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n \int_0^1 x^{n-1} dx = - \int_0^1 \sum_{n=1}^N (-x)^{n-1} dx$$

où l'on a sorti le facteur $(-1) = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1}$ de la somme. Or pour tout $x \in [0, 1]$, on a $-x \neq 1$, et donc la somme géométrique vaut :

$$\sum_{n=1}^N (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^N}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-x)^N}{1 + x}.$$

Ainsi :

$$S_N = - \int_0^1 \frac{1 - (-x)^N}{1 + x} dx = - \int_0^1 \frac{dx}{1 + x} + \int_0^1 \frac{(-x)^N}{1 + x} dx.$$

L'idée de la séparation vient du fait que pour $x \neq 1$, $x^N \rightarrow 0$ et donc on s'attend à ce que le second terme devienne négligeable.

Pour le premier terme, on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x} = [\ln(1 + x)]_0^1 = \ln(2).$$

On obtient donc :

$$S_N = -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-x)^N}{1 + x} dx.$$

Majorons le reste. Pour tout $N \geq 1$, par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^1 \frac{(-x)^N}{1 + x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{x^N}{1 + x} dx \leq \int_0^1 x^N dx = \frac{1}{N + 1}$$

où l'on a utilisé que $\frac{1}{1+x} \leq 1$ pour $x \in [0, 1]$.

Ainsi $|S_N - (-\ln 2)| \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, donc $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln 2$. D'où $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

□

Proposition 1.22 (Critère de domination)

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série convergente à termes positifs, et (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $u_n = O(v_n)$. Alors $\sum u_n$ converge absolument, et en particulier $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Par définition de $u_n = O(v_n)$, il existe une constante $M \geq 0$ et un rang n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$:

$$|u_n| \leq Mv_n.$$

Comme $\sum v_n$ converge, $\sum Mv_n$ converge également par linéarité. Or à partir du rang n_0 , $0 \leq |u_n| \leq Mv_n$. Par le critère de comparaison appliqué aux séries à termes positifs $\sum |u_n|$ et $\sum Mv_n$, la série $\sum |u_n|$ converge.

Ainsi $\sum u_n$ converge absolument, et en particulier elle converge.

□

Corollaire 1.23

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série convergente à termes positifs, et (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $u_n = o(v_n)$. Alors $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration

Si $u_n = o(v_n)$, alors en particulier $u_n = O(v_n)$.
On applique directement le critère de domination.

□

Exemple 1.24

Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $|\cos n| \leq 1$, donc :

$$\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi $\frac{\cos n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par le critère de domination,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^2} \text{ converge absolument.}$$

Exemple 1.25

Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^{100}}{2^n}$.

Par croissance comparée :

$$\frac{n^{100}/2^n}{(3/4)^n} = n^{100} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi $\frac{n^{100}}{2^n} = o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$. Or $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{3}{4} \in [0, 1[$, donc

converge. Par le corollaire du critère de domination, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^{100}}{2^n}$ converge absolument.

Remarque

D'où vient le trois quarts dans l'exemple précédent ?

D'abord il faut développer une intuition qui va souvent vous servir : les croissances comparées ne disent pas simplement que l'exponentielle gagne contre les puissances (ou les puissances contre le logarithme). Les croissances comparées disent que l'exponentielle bat les puissances *à plate couture*.

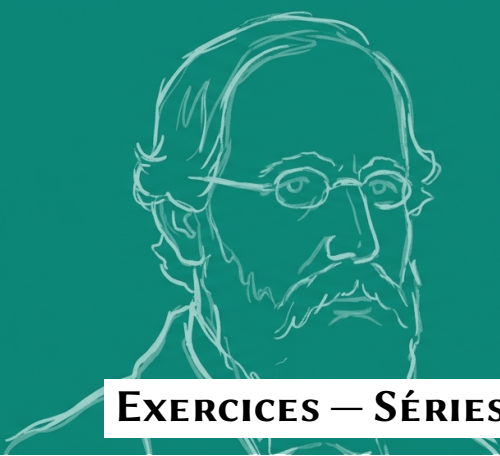
Par exemple : xe^{-x} tend vers 0 en $+\infty$. Mais peut-être qu'en prenant une plus petite exponentielle, le rapport de force va s'inverser ?

Non. Par exemple $xe^{-\frac{1}{2}x}$ tend encore vers 0 et $xe^{-\frac{1}{4}x}$ aussi et également $xe^{-\frac{1}{100}x}$ ou même $xe^{-\frac{1}{10^{10}10}x}$.

En quoi cela nous est-il utile ? Eh bien dans l'exemple précédent, on étudiait la série de terme général $\frac{n^{100}}{2^n}$ qui, par croissance comparée, tend vers 0.

A priori, cela signifie que la série ne diverge pas grossièrement, mais ça ne nous dit rien sur sa convergence. Mais il faut voir que la croissance comparée a un message caché : le $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ gagne *haut la main*.

Ainsi, en prenant une base d'exponentielle intermédiaire (par exemple $\frac{3}{4}$), on peut espérer garder la convergence vers 0 et en déduire une négligeabilité qui, elle, suffit pour conclure. Et c'est ce qu'on a fait.

**EXERCICES — SÉRIES NUMÉRIQUES****1. Échauffements****Exercice 1.1** ○ _____*Recherche de limites.* Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^3 - 3}{2n^2 + 1}$

2. $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

3. $u_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

5. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

6. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Exercice 1.2 ○ _____*Équivalents et limites.* Déterminer un équivalent et la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = -2n^2 + 7n + 3$

2. $u_n = n - \frac{3}{n^5}$

3. $u_n = \frac{3n^2 + 2n - 5}{-4n^2 + 3n - 8}$

4. $u_n = (1.1)^n - n^{92} + e^{-n}$

5. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$

6. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sqrt{n}$

7. $u_n = \frac{3n^2 + 2^n - 5^n}{\ln(n) - 4n^2 + 3^n - 8}$

8. $u_n = \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}$

9. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$

10. $u_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

Exercice 1.3 ○ _____

Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

1. $\frac{n^5}{2^n}$

2. $\frac{4^n - n}{5^n + 2n^3}$

3. $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

4. $\frac{\sin^3(n^2 + 1)}{n^2 + n + 1}$

5. $\frac{\ln(n)}{n}$

6. $\frac{\text{sh}(n)}{\text{ch}(2n)}$

7. $\ln\left(\frac{n^4 + 3n^2 + n}{n^4 + 2n^2 - n + 1}\right)$

8. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$

9. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

10. $\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$

2. Calculs d'équivalents et de limites

Exercice 1.4 •

Recherche de limites. Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n^3 - \ln(n)}{e^{2n} + 1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$
3. $u_n = \frac{e^n - 3^n}{e^n + n!}$
4. $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn}$ avec $(a, b) \in]0, +\infty[^2$
5. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
6. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Exercice 1.5 •

Recherche d'équivalents. Donner un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \ln\left(2 - e^{-1/n^2}\right)$
4. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

Exercice 1.6 ••

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
2. $v_n = \frac{n \sin n}{1 + n^2}$
3. $w_n = \sqrt[n]{n}$
4. $x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
5. $y_n = n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}\right)$
6. $z_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
7. $t_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2} + \ln(n)}$

Exercice 1.7 ••

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \exp\left(\frac{1 - \sqrt{n}}{1 + n}\right) - 1$
2. $v_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^3 - n}$
3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$

Exercice 1.8 •••

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant $u_n = o(\sqrt{n})$. On pose

$$v_n = \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n e^{-u_n}.$$

Déterminer un équivalent de $\ln(v_n)$ puis en déduire la limite de (v_n) .

3. Convergence et calcul de sommes

Exercice 1.9 •

Convergence et calculs. Prouver la convergence de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants et calculer sa somme (pour $n \geq 0$, sauf mention contraire).

$$1. u_n = \frac{n+1}{2^n}$$

$$2. u_n = \frac{n^2 + 2^n}{4^n}$$

$$3. u_n = (-1)^n e^{-n}$$

$$4. u_n = (-1)^n n e^{-2n}$$

$$5. u_n = \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$$

$$6. u_n = \frac{n+3^n}{n!}$$

$$7. u_n = \frac{n(n-1)}{2^n n!}$$

$$8. u_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$$

$$9. u_n = \frac{1}{4n^2 - 1} \text{ pour } n \geq 1$$

$$10. u_n = \frac{2}{n(n-2)} \text{ pour } n \geq 3$$

Exercice 1.10 •

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3. Montrer que la série de terme général $(n^2 - 1)u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1.11 ••

CCP 2013. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 1.12 ••

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme. On pourra utiliser au besoin que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$1. \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k}$$

$$2. \sum_{k \geq 2} \ln \left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \right)$$

$$3. \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n}$$

$$4. \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!}$$

$$5. \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$6. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ (utiliser la question précédente)}$$

Exercice 1.13 •••

Montrer que $\sum_{k=1}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$.

4. Nature d'une série

Exercice 1.14 •

Nature de séries. Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{n^2 - 3}{n^\alpha + \ln(n)}$ avec $\alpha > 0$

3. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

2. $u_n = \frac{\sqrt{n}(\ln n)^2}{e^n}$

4. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$

Exercice 1.15 ●●

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + 2n}{n^4 + n^3 + 1}$

4. $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3 + 1}$

5. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

3. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$

6. $\sum_{n \geq 1} \ln(2 - e^{1/n})$

Exercice 1.16 ●●

Déterminer α et β tels que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}$ soit convergente. Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

Exercice 1.17 ●●

Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{\ln(1 + a^{3n})}{a^n}$, en fonction du réel $a > 0$.

5. Séries et suites associées

Exercice 1.18 ●

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(1) \leq u_n \leq 1$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leq (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1)$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 1.19 ●

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série absolument convergente, et $(a_{\phi(n)})$ une suite extraite de (a_n) (où $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante). Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_{\phi(n)}$ est absolument convergente.

Exercice 1.20 ●●

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge. Étudier la nature des séries de terme général :

1. a_n^2

3. $\sin(a_n)$

2. $\frac{a_n}{1 + a_n}$

4. $\sqrt{a_n}$

5. $\sqrt{a_n a_{n+1}}$

Exercice 1.21 ●●

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

1. Étudier la convergence de (u_n) .
2. Étudier la convergence de $\sum u_n^2$. On pourra montrer que $u_n^2 \sim u_n - u_{n+1}$.
3. Étudier la convergence de $\sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

Exercice 1.22 ● ● ●

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. On pose $u_n = \prod_{k=0}^n \frac{x_k}{1+x_k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que (u_n) est monotone convergente, de limite $\ell \in [0, 1[$.
2. Que vaut ℓ lorsque $x_n = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
3. Démontrer, en étudiant $\ln(u_n)$, que $\ell \neq 0 \iff \sum \frac{1}{x_k}$ converge.
4. Étudier le cas où (x_n) est définie par $x_0 > 1$ et $x_{n+1} = x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déterminer ℓ .

6. Résultats et théorèmes classiques

Exercice 1.23 ● ●

Constante d'Euler. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge, puis déterminer ses sommes partielles.
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ (dite *constante d'Euler*) telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 1.24 ● ● ●

Représenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $a > 0, b > 0$ et la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$ soit convergente.

Exercice 1.25 ● ● ●

Règle de Raabe-Duhamel. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs et $\alpha > 0$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. On pose $v_n = n^\alpha u_n$ et $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge absolument.
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$, puis conclure sur la nature de $\sum u_n$.

7. Sujets de concours

Exercice 1.26 ● ● ●

CCP 2014. Soit $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$. On pourra utiliser, sans le démontrer, la relation $a_{n+2} = a_n \cdot \frac{n+1}{n+4}$.

1. Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1 .
2. Montrer que la suite $(n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante.
3. Montrer que $a_n \sim a_{n+1}$, et en déduire un équivalent de a_n .
4. Donner la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Exercice 1.27 ★

EDHEC 2008. On se propose de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$ (pour $n \geq 1$) converge, et de calculer sa somme.

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , et $\lambda > 0$. Montrer par une intégration par parties que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right)$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos(t/2)} dt - \frac{1}{2}$.
5. Conclure que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

CORRECTIONS DES EXERCICES — SÉRIES NUMÉRIQUES

Correction de l'exercice 1.1

1. $u_n = \frac{n^3 - 3}{2n^2 + 1} \sim \frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$

2. On factorise par le terme dominant 3^n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{3^n ((2/3)^n - 1)}{3^n ((2/3)^n + 1)} = \frac{(2/3)^n - 1}{(2/3)^n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1} = -1.$$

3. $u_n = -\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

4. C'est une forme indéterminée « $\infty - \infty$ » : on lève l'indétermination en multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, qui ne s'annule pas :

$$\begin{aligned} u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

5. Par décomposition en éléments simples, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, d'où par télescopage

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

6. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, donc

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Les deux encadrants tendent vers 1, donc par le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 1.2

1. $u_n \sim -2n^2 \rightarrow -\infty.$

2. $u_n \sim n \rightarrow +\infty$ (car $\frac{3}{n^5} \rightarrow 0$).

3. $u_n \sim \frac{3n^2}{-4n^2} = -\frac{3}{4} \rightarrow -\frac{3}{4}.$

4. Par croissance comparée, $(1.1)^n$ domine n^{92} (car $1.1 > 1$), et $e^{-n} \rightarrow 0$. Donc $u_n \sim (1.1)^n \rightarrow +\infty$.

5. $(3/4)^n \rightarrow 0$ et $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, donc $u_n \sim -\sqrt{n} \rightarrow -\infty$.
6. Par croissance comparée, $(3/4)^n \sqrt{n} \rightarrow 0$. Un équivalent simple est u_n lui-même (ou on peut écrire $u_n = \sqrt{n} \cdot (3/4)^n$ sans simplifier davantage).
7. Au numérateur, -5^n domine (car $5 > 3 > 2$), donc numérateur $\sim -5^n$. Au dénominateur, 3^n domine, donc dénominateur $\sim 3^n$. Ainsi $u_n \sim \frac{-5^n}{3^n} = -\left(\frac{5}{3}\right)^n \rightarrow -\infty$.
8. $\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{2n}$ donc $u_n \sim 2\sqrt{2n} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{n} \rightarrow +\infty$.
9. Par la quantité conjuguée, $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{n}} \rightarrow 0$.
10. $\ln(1 + 2/n) \sim 2/n$ donc $u_n \sim n \cdot \frac{2}{n} = 2 \rightarrow 2$.

Correction de l'exercice 1.3

1. Par croissance comparée (car $2 > 1$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{n^5}{2^n} = 0$, donc $\frac{n^5}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs, le critère de domination donne que $\sum \frac{n^5}{2^n}$ **converge absolument**, donc converge.
2. Par croissance comparée, $n = o(4^n)$ et $2n^3 = o(5^n)$, donc

$$\frac{4^n - n}{5^n + 2n^3} \sim \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Or $\sum (4/5)^n$ est une série géométrique de raison $4/5 \in [0, 1[$, donc convergente, et à termes positifs. Par le critère d'équivalence, la série $\sum \frac{4^n - n}{5^n + 2n^3}$ **converge**.

3. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(1 + u) \sim u$ en 0,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Les deux suites sont positives, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (harmonique). Par le critère d'équivalence, la série **diverge**.

4. Pour tout $n \geq 1$, $|\sin^3(n^2 + 1)| \leq 1$, donc

$$0 \leq \left| \frac{\sin^3(n^2 + 1)}{n^2 + n + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, le critère de comparaison donne que la série **converge absolument**, donc converge.

5. Pour tout $n \geq 3$, on a $\ln(n) \geq 1$, donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$. Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par le critère de comparaison (contraposée), la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ **diverge**.
6. On a

$$\frac{\text{sh}(n)}{\text{ch}(2n)} = \frac{e^n - e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \sim e^{-n}.$$

Or $\sum e^{-n}$ est une série géométrique de raison $e^{-1} \in [0, 1[$, donc convergente, et à termes positifs. Par le critère d'équivalence, la série **converge absolument**, donc converge.

7. On écrit

$$\ln \left(\frac{n^4 + 3n^2 + n}{n^4 + 2n^2 - n + 1} \right) = \ln \left(1 + \frac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1} \right).$$

Comme $\frac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(1 + u) \sim u$ en 0,

$$\ln \left(1 + \frac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1} \right) \sim \frac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Les deux suites sont positives à partir d'un certain rang, et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par le critère d'équivalence, la série **converge**.

8. On fait un développement asymptotique : $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$, donc

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right).$$

Puis

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e = e \left(\exp \left(-\frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) - 1 \right) \sim -\frac{e}{2n}.$$

Posons $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e$, alors $-u_n \sim \frac{e}{2n} > 0$. Comme $\sum \frac{e}{2n}$ diverge et est à termes positifs, le critère d'équivalence donne que $\sum -u_n$ diverge, donc $\sum u_n$ **diverge**.

9. Par la quantité conjuguée, pour tout $n \geq 0$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Les deux suites sont positives, et $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge (Riemann, $1/2 \leq 1$). Par le critère d'équivalence, la série **diverge**.

Alternative. Les sommes partielles sont télescopiques : $\sum_{n=0}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1} \rightarrow +\infty$.

10. Comme $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, on obtient par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin \left(n\pi + \frac{1}{n} \right) = (-1)^n \sin \left(\frac{1}{n} \right)$.

Faisons un développement : $\sin \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^3} \right)$, donc

$$\sin \left(n\pi + \frac{1}{n} \right) = \frac{(-1)^n}{n} + O \left(\frac{1}{n^3} \right).$$

Or la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (démontré dans les rappels via l'astuce intégrale), et la série $\sum O \left(\frac{1}{n^3} \right)$ converge absolument par critère de domination (car $\sum \frac{1}{n^3}$ converge). Par somme de séries convergentes, la série **converge**.

Correction de l'exercice 1.4

1. Par croissance comparée, $n^3 = o(e^{2n})$, donc numérateur $\sim n^3$ et dénominateur $\sim e^{2n}$. Puis $u_n \sim \frac{n^3}{e^{2n}} \rightarrow 0$.
2. Par la quantité conjuguée, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Par croissance comparée, $3^n = o(n!)$ et $e^n = o(n!)$. Donc numérateur $= e^n - 3^n = o(n!)$ et dénominateur $\sim n!$. Ainsi $u_n \rightarrow 0$.
4. Écrivons $u_n = \exp(bn \ln(1 + a/n))$. Comme $a/n \rightarrow 0$, $\ln(1 + a/n) \sim a/n$, donc $bn \ln(1 + a/n) \sim bn \cdot a/n = ab \rightarrow ab$. Par continuité de $\exp$, $u_n \rightarrow e^{ab}$.
5. $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$, d'où par télescopage

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$
6. Même encadrement qu'à l'exercice précédent : $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, donc $u_n \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 1.5

1. Mise au même dénominateur : $u_n = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$.
2. Par la quantité conjuguée, $u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. $e^{-1/n^2} \rightarrow 1$, donc $2 - e^{-1/n^2} = 1 + (1 - e^{-1/n^2})$. Comme $1/n^2 \rightarrow 0$, on a $1 - e^{-1/n^2} \sim \frac{1}{n^2}$. Puis $\ln(1+x) \sim x$ pour $x \rightarrow 0$, donc $u_n = \ln(1 + (1 - e^{-1/n^2})) \sim \frac{1}{n^2}$.
4. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 1.6

1. 2^n domine (par croissance comparée), donc numérateur $\sim 2^n$ et dénominateur $\sim 3n$. D'où $u_n \sim \frac{2^n}{3n} \rightarrow +\infty$.
2. $|v_n| \leq \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $v_n \rightarrow 0$.
3. $w_n = n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Comme $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$, $w_n \rightarrow e^0 = 1$.
4. $\ln x_n = (n+2) \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = (n+2) \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$. Comme $\frac{2}{n+1} \rightarrow 0$, $\ln(1 - 2/(n+1)) \sim -2/(n+1)$. Donc $\ln x_n \sim -(n+2) \cdot \frac{2}{n+1} \rightarrow -2$. Par continuité de $\exp$, $x_n \rightarrow e^{-2}$.
5. Avec la formule $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$:

$$\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} = -2 \sin \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right) \sin \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right).$$

La première $\sin \sim \frac{1}{n}$ (car son argument $\sim \frac{1}{n}$), et la seconde $\sin \sim \frac{1}{2n(n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$. D'où

$$\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \sim -2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{n^3}.$$

Donc $y_n \sim n^2 \cdot \left(-\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

6. $\ln z_n = n^2 \ln(\cos(1/n))$. Comme $\cos(1/n) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$ et $\ln(1+x) \sim x$, on a $\ln(\cos(1/n)) \sim -\frac{1}{2n^2}$. Donc $\ln z_n \sim -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$, d'où $z_n \rightarrow e^{-1/2}$.

7. $t_n \sim \frac{3n^2}{\sqrt{n^2}} = \frac{3n^2}{n} = 3n \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 1.7

1. Comme $\frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \rightarrow 0$ et $e^x - 1 \sim x$ pour $x \rightarrow 0$,

$$u_n \sim \frac{1-\sqrt{n}}{1+n}.$$

Or $\frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \sim \frac{-\sqrt{n}}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc $u_n \sim -\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. $\sqrt{n^3-n}$ domine nettement $\sqrt{n^2+1}$ (car $n^3 \gg n^2$), donc

$$v_n \sim -\sqrt{n^3-n} \sim -n^{3/2}.$$

3. On utilise $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$:

$$w_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right).$$

Par croissance comparée, $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$. Donc $\sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \sim \frac{n}{2^n}$, puis $w_n \sim \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \sim \frac{n}{2^n}$.

Correction de l'exercice 1.8

Comme $u_n = o(\sqrt{n})$, on a $\frac{u_n}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$. Utilisons le développement $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ avec $x = \frac{u_n}{n}$:

$$n \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) = n \left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{u_n^2}{n^2}\right)\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2n} + o\left(\frac{u_n^2}{n}\right).$$

Donc

$$\ln v_n = n \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) - u_n = -\frac{u_n^2}{2n} + o\left(\frac{u_n^2}{n}\right) \sim -\frac{u_n^2}{2n}.$$

Comme $u_n = o(\sqrt{n})$, on a $u_n^2 = o(n)$, donc $\frac{u_n^2}{n} \rightarrow 0$. Ainsi $\ln v_n \rightarrow 0$, puis par continuité de $\exp$, $v_n \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 1.9

On utilise les formules des séries géométriques et leurs dérivées : pour $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3},$$

ainsi que la série exponentielle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

1. $\sum \frac{n+1}{2^n} = \sum \frac{n}{2^n} + \sum \frac{1}{2^n}$. Convergence assurée par croissance comparée.

Valeurs : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$. Total = $\boxed{4}$.

2. $\sum \frac{n^2 + 2^n}{4^n} = \sum \frac{n^2}{4^n} + \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n} = \frac{(1/4)(5/4)}{(3/4)^3} = \frac{5/16}{27/64} = \frac{20}{27}$. Total = $\boxed{\frac{20}{27} + 2 = \frac{74}{27}}$.

3. $\sum (-1)^n e^{-n} = \sum (-1/e)^n$, série géométrique de raison $-1/e \in]-1, 1[$. Somme $= \frac{1}{1 + 1/e} = \boxed{\frac{e}{e+1}}$.

4. $\sum (-1)^n n e^{-2n} = \sum n (-e^{-2})^n$. Avec $q = -e^{-2}$, $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{-e^{-2}}{(1+e^{-2})^2} = \boxed{-\frac{e^2}{(e^2+1)^2}}.$$

5. $\sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \sum \frac{n^2 + 3n}{3^n} = \frac{1}{9} \left(\sum \frac{n^2}{3^n} + 3 \sum \frac{n}{3^n} \right)$. Avec $q = 1/3$:

$$\sum \frac{n}{3^n} = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}, \quad \sum \frac{n^2}{3^n} = \frac{(1/3)(4/3)}{(2/3)^3} = \frac{3}{2}.$$

Total : $\frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{15}{4} = \boxed{\frac{5}{12}}$.

6. $\sum \frac{n+3^n}{n!} = \sum \frac{n}{n!} + \sum \frac{3^n}{n!}$. Pour la première, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ pour $n \geq 1$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$. Pour la seconde, $\sum \frac{3^n}{n!} = e^3$. Total = $\boxed{e + e^3}$.

7. Pour $n \geq 2$, $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^n n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n (n-2)!} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k!} = \boxed{\frac{e^{1/2}}{4}}.$$

8. Changement d'indice $k = n + 2$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{k-2}}{k!} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = \frac{1}{4} (e^2 - 1 - 2) = \boxed{\frac{e^2 - 3}{4}}.$$

$$9. \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right). \text{ Par télescopage,}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N + 1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$10. \frac{2}{n(n - 2)} = \frac{1}{n - 2} - \frac{1}{n}. \text{ Par télescopage pour } n \geq 3,$$

$$\sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n - 2} - \frac{1}{n} \right) = \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{N - 1} + \frac{1}{N} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Correction de l'exercice 1.10

1. Par croissance comparée, $u_n = o(1/n^2)$, donc la série converge absolument par critère de domination (car $\sum 1/n^2$ converge).
2. On cherche a, b tels que $\frac{a}{n!} + \frac{b}{(n + 1)!} = \frac{a(n + 1) + b}{(n + 1)!} = \frac{an + a + b}{(n + 1)!}$. Pour que cela vaille $\frac{n}{(n + 1)!}$, il faut $a = 1$ et $a + b = 0$, soit $\boxed{a = 1, b = -1}$. Donc

$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n + 1)!}.$$

Par télescopage,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N + 1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \boxed{1}.$$

3. Pour $n \geq 2$,

$$(n^2 - 1)u_n = \frac{(n - 1)(n + 1)n}{(n + 1)!} = \frac{(n - 1)n}{n!} = \frac{n - 1}{(n - 1)!} = \frac{1}{(n - 2)!}$$

(la dernière égalité valable pour $n \geq 2$). Pour $n = 0$ et $n = 1$, on vérifie que $(n^2 - 1)u_n = 0$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 1)u_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n - 2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \boxed{e}.$$

Correction de l'exercice 1.11

Convergence. $\ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \sim -\frac{1}{n^2}$, donc $-\ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2} > 0$. Par équivalent sur séries positives, la série converge.

Calcul. Pour $N \geq 2$,

$$S_N = \sum_{n=2}^N \ln \left(\frac{(n - 1)(n + 1)}{n^2} \right) = \sum_{n=2}^N (\ln(n - 1) + \ln(n + 1) - 2 \ln(n)).$$

Par changements d'indices $p = n + 1$ dans la première somme et $q = n - 1$ dans la

deuxième :

$$S_N = \sum_{p=3}^{N+1} \ln(p) + \sum_{q=1}^{N-1} \ln(q) - 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) = \ln(N+1) - \ln(2) - \ln(N) + \ln(1) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N}\right).$$

$$\text{Donc } S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(2), \text{ et } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \boxed{-\ln(2)}.$$

Correction de l'exercice 1.12

1. On a $\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Par télescopage, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - k} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Donc la série converge et } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - k} = \boxed{1}.$$

2. On écrit

$$\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = \ln(k) + \ln(k+2) - 2\ln(k+1) = (\ln(k+2) - \ln(k+1)) - (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

En posant $a_k = \ln(k+1) - \ln(k)$, on reconnaît $a_{k+1} - a_k$. Par télescopage, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = a_{n+1} - a_2 = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(2) - \ln(3).$$

$$\text{Donc la série converge et } \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = \boxed{\ln(2) - \ln(3)}.$$

3. *Convergence* : par croissance comparée,

$$n^2 \left| (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} \right| \leq \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $(-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série converge absolument par critère de domination.

Calcul : remarquons que $\cos(n) = \Re(e^{in})$, donc

$$(-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = \Re\left(\left(-\frac{e^i}{2}\right)^n\right).$$

La série géométrique $\sum \left(-\frac{e^i}{2}\right)^n$ converge absolument (raison de module $1/2 < 1$), et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{e^i}{2}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{e^i}{2}} = \frac{2}{2 + e^i} = \frac{2(2 + e^{-i})}{(2 + e^i)(2 + e^{-i})} = \frac{4 + 2\cos(1) - 2i\sin(1)}{5 + 4\cos(1)}.$$

En prenant la partie réelle,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = \boxed{\frac{4 + 2\cos(1)}{5 + 4\cos(1)}}.$$

4. *Convergence* : $\frac{n^2}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée, donc la série converge absolument.

Calcul : pour $n \geq 1$, $\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{(n-1)+1}{(n-1)!}$. Donc, par linéarité sur les séries convergentes,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e + e = \boxed{2e}$$

en utilisant $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ (série exponentielle en 1).

5. *Convergence* : $\frac{1}{(2p+1)^2} \sim \frac{1}{4p^2}$, et $\sum \frac{1}{p^2}$ converge. Les deux suites sont positives, donc par critère d'équivalence, $\sum \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge.

Calcul : pour $N \geq 1$, on sépare termes pairs et impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

En passant à la limite ($N \rightarrow +\infty$),

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

6. *Convergence* : $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série converge absolument.

Calcul : on sépare à nouveau termes pairs et impairs. Pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Comme la série converge, cette limite donne la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \boxed{-\frac{\pi^2}{12}}.$$

Correction de l'exercice 1.13

Posons $S_n = \sum_{k=1}^n k!$ pour $n \geq 1$. On a $S_n = n! + S_{n-1}$, donc

$$\frac{S_n}{n!} = 1 + \frac{S_{n-1}}{n!}.$$

Il suffit de montrer que $\frac{S_{n-1}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour tout $n \geq 3$, décomposons en séparant le dernier terme de S_{n-1} :

$$S_{n-1} = (n-1)! + S_{n-2}.$$

De plus, pour tout $k \leq n-2$, on a $k! \leq (n-2)!$, donc $S_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} k! \leq (n-2) \cdot (n-2)!$.

On en déduit :

$$0 \leq \frac{S_{n-1}}{n!} = \frac{(n-1)! + S_{n-2}}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

Les deux termes tendent vers 0, donc par encadrement $\frac{S_{n-1}}{n!} \rightarrow 0$. Ainsi $\frac{S_n}{n!} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $S_n \sim n!$.

Correction de l'exercice 1.14

- Comme $\alpha > 0$, $\ln n = o(n^\alpha)$, donc $n^\alpha + \ln n \sim n^\alpha$. De plus $n^2 - 3 \sim n^2$. D'où $u_n \sim \frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$. Par équivalent sur suites positives (pour n assez grand), la série a même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-2}}$, qui converge (Riemann) si et seulement si $\alpha - 2 > 1$, soit $\boxed{\alpha > 3}$.
- Par croissance comparée, $u_n = o(1/n^2)$, donc la série converge (absolument) par critère de domination.
- Montrons que $n^2 e^{-\sqrt{n}} \rightarrow 0$. On a $n^2 e^{-\sqrt{n}} = e^{2 \ln n - \sqrt{n}}$. Or $2 \ln n - \sqrt{n} \rightarrow -\infty$ (car $\sqrt{n}$ domine $\ln n$), donc $n^2 e^{-\sqrt{n}} \rightarrow 0$, soit $e^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$. Par domination, la série converge.
- $|u_n| = \frac{1}{n^3}$, et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $3 > 1$). Donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ converge absolument.

Correction de l'exercice 1.15

- $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + n^3 + 1} \sim \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$. Par équivalent sur suites positives, la série a même nature que la série harmonique, qui diverge. **Divergente.**
- $|u_n| = \frac{n+2}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$. La série des valeurs absolues converge (équivalent à la série de Riemann $\sum 1/n^2$), donc la série converge absolument.
- $(\ln n/n)^2 = (\ln n)^2/n^2$. Par croissance comparée, $(\ln n)^2 = o(\sqrt{n})$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme $\sum 1/n^{3/2}$ converge (Riemann, $3/2 > 1$), par critère de domination, la série converge.
- Posons $a_n = u_n = \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$. Alors

$$\ln a_n = n\sqrt{n} \ln \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim n\sqrt{n} \cdot \left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -1.$$

Donc $a_n \rightarrow e^{-1} \neq 0$, et la série diverge grossièrement.

5. $n^{1+1/n} = n \cdot n^{1/n} = n \cdot e^{\ln n/n}$. Comme $\ln n/n \rightarrow 0$, $n^{1/n} \rightarrow 1$. Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$, et par équivalent sur suites positives, la série diverge.

6. Comme $1/n \rightarrow 0$, on a $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$, donc

$$2 - e^{1/n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) = 1 + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Par $\ln(1+x) \sim x$, on obtient $\ln(2 - e^{1/n}) \sim -\frac{1}{n}$. Donc $-u_n \sim \frac{1}{n} > 0$ (éventuellement), et par équivalent sur séries positives, $\sum -u_n$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

Correction de l'exercice 1.16

Par développement asymptotique, en utilisant $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$:

$$u_n = (1 + \alpha + \beta)\sqrt{n} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

– Si $1 + \alpha + \beta \neq 0$, $u_n \sim (1 + \alpha + \beta)\sqrt{n} \not\rightarrow 0$, donc la série diverge grossièrement.

– Si $1 + \alpha + \beta = 0$ et $\frac{\alpha}{2} + \beta \neq 0$, alors $u_n \sim \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \frac{1}{\sqrt{n}}$, et la série diverge par équivalent (car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge).

– Si $1 + \alpha + \beta = 0$ et $\frac{\alpha}{2} + \beta = 0$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, et la série converge absolument par critère de domination (car $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge).

Le système $1 + \alpha + \beta = 0$ et $\frac{\alpha}{2} + \beta = 0$ donne $\boxed{\alpha = -2}$ et $\boxed{\beta = 1}$.

Calcul de la somme. Avec ces valeurs, $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})$. Posons $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$u_n = a_n - a_{n+1}$ et par télescopage,

$$\sum_{n=0}^N u_n = a_0 - a_{N+1} = -1 - a_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -1.$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = \boxed{-1}$.

Correction de l'exercice 1.17

– Si $0 < a < 1$, alors $a^n \rightarrow 0$, donc $\ln(1 + a^{3n}) \sim a^{3n}$, puis $u_n \sim a^{2n} > 0$. Comme $\sum a^{2n}$ est une série géométrique de raison $a^2 \in [0, 1[$ convergente, par critère d'équivalence, $\sum u_n$ **converge**.

– Si $a > 1$, alors $a^n \rightarrow +\infty$, et

$$\ln(1 + a^{3n}) = 3n \ln(a) + \ln(1 + a^{-3n}) \sim 3n \ln(a),$$

donc $u_n \sim \frac{3n \ln(a)}{a^n} > 0$. Posons $v_n = \frac{n}{a^n}$. Alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{an} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \in [0, 1[$. Par critère de d'Alembert, $\sum v_n$ converge, puis par équivalent $\sum u_n$ **converge**.

— Si $a = 1$, $u_n = \ln(2)$ est constant, donc la série diverge grossièrement.

Correction de l'exercice 1.18

1. Récurrence. Initialisation : $u_1 = \cos(0) = 1$. Hérédité : si $\cos(1) \leq u_n \leq 1$, alors $u_n \in [0, 1]$, donc $\cos(1) \leq \cos(u_n) = u_{n+1} \leq \cos(0) = 1$ car $\cos$ est décroissante sur $[0, \pi/2]$.
2. Sur $[0, 1]$, $|\cos'| = |-\sin| \leq \sin(1)$ (car $\sin$ est croissante sur $[0, 1]$). Par inégalité des accroissements finis, pour $x, y \in [0, 1]$, $|\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1) |x - y|$. Récurrence sur n :
 - $n = 1$: $|u_2 - u_1| = 1 - \cos(1) = (1 - \cos(1)) \sin^0(1)$. OK.
 - Hérédité : $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\cos(u_{n+1}) - \cos(u_n)| \leq \sin(1) |u_{n+1} - u_n| \leq \sin(1) \cdot (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1) = (1 - \cos(1)) \sin^n(1)$.
3. Comme $0 \leq \sin(1) < 1$, la série géométrique $\sum (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1)$ converge. Par critère de comparaison, $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge, donc la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument. Donc la suite (u_n) **converge**.

Correction de l'exercice 1.19

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\phi(0), \dots, \phi(N)\}$ est inclus dans $\{0, 1, \dots, \phi(N)\}$. Donc, par positivité des $|a_n|$:

$$\sum_{n=0}^N |a_{\phi(n)}| \leq \sum_{k=0}^{\phi(N)} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| =: K.$$

La suite des sommes partielles de $\sum |a_{\phi(n)}|$ est donc croissante (car les termes sont positifs) et majorée par K . Donc elle converge, c'est-à-dire $\sum a_{\phi(n)}$ **converge absolument**.

Correction de l'exercice 1.20

Comme $\sum a_n$ converge, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel $0 \leq a_n \leq 1$.

1. Pour $n \geq n_0$, $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ (car $a_n \leq 1$). Par critère de comparaison, $\sum a_n^2$ **converge**.
2. Pour tout n , $1 + a_n \geq 1$, donc $0 \leq \frac{a_n}{1 + a_n} \leq a_n$. Par critère de comparaison, la série **converge**.
3. $\sin(a_n) \sim a_n$ car $a_n \rightarrow 0$. Les deux suites étant positives, par critère d'équivalence, $\sum \sin(a_n)$ **converge**.
4. On ne peut pas conclure en général. Par exemple, si $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum a_n$ converge mais $\sum \sqrt{a_n} = \sum \frac{1}{n}$ diverge. En revanche, si $a_n = \frac{1}{n^4}$, $\sum \sqrt{a_n} = \sum \frac{1}{n^2}$ converge.

5. Par l'inégalité $2\sqrt{xy} \leq x + y$ (qui vient de $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$),

$$0 \leq \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Par linéarité, $\sum \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ converge. Par critère de comparaison, $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ **converge**.

Correction de l'exercice 1.21

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-x} \leq x$ (car $e^{-x} \geq 1 - x$), donc $u_{n+1} \leq u_n$: (u_n) est décroissante. Une récurrence immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout n . Donc (u_n) est décroissante minorée, donc converge vers un $\ell \geq 0$. Par continuité, $\ell = 1 - e^{-\ell}$. L'étude de $g(x) = 1 - e^{-x} - x$ montre que $g < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc $\ell = 0$.
2. Par développement, comme $u_n \rightarrow 0$:

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \left(1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2),$$

donc $u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \sim \frac{u_n^2}{2}$, soit $u_n^2 \sim 2(u_n - u_{n+1})$.

La série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est télescopique et converge (car (u_n) converge vers 0). Comme $u_n^2 \geq 0$, par critère d'équivalence, $\sum u_n^2$ **converge**.

3. Série télescopique :

$$\sum_{n=0}^N \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0).$$

Or $u_n \rightarrow 0^+$ donc $\ln(u_n) \rightarrow -\infty$. Donc la série **diverge**.

Correction de l'exercice 1.22

1. Pour tout k , $0 < \frac{x_k}{1+x_k} < 1$, donc $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_{n+1}}{1+x_{n+1}} < 1$, soit (u_n) strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers $\ell \geq 0$. De plus $\ell \leq u_0 = \frac{x_0}{1+x_0} < 1$.
2. Avec $x_n = n + 1$, le produit est télescopique :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\ell = 0$.

3. $\ln(u_n) = -\sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{x_k} \right)$. On a : $\ell > 0 \iff (\ln u_n)$ converge (vers $\ln \ell$) $\iff \sum \ln(1 + 1/x_k)$ converge. Or $x_k \rightarrow +\infty$, donc $\ln(1 + 1/x_k) \sim \frac{1}{x_k}$, et les deux séries (à termes positifs) sont de même nature. D'où l'équivalence annoncée.

4. Avec $x_{n+1} = x_n^2$ et $x_0 > 1$, une récurrence immédiate donne $x_n = x_0^{2^n}$. Donc $\frac{1}{x_n} = \left(\frac{1}{x_0} \right)^{2^n} \leq \left(\frac{1}{x_0} \right)^n$ pour $n \geq 0$ (car $2^n \geq n$ et $1/x_0 < 1$). Comme $1/x_0 \in$

$[0, 1[$, la série géométrique $\sum (1/x_0)^n$ converge, et par comparaison $\sum \frac{1}{x_k}$ converge. Par la question 3, $\ell > 0$.

Calcul de ℓ . Par une récurrence exploitant $(1 - x_0^{2^n})(1 + x_0^{2^n}) = 1 - x_0^{2^{n+1}}$, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{1 - x_0} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1 - x_0^{2^{n+1}}}.$$

Comme $x_0 > 1$, $x_0^{2^{n+1}} \rightarrow +\infty$, donc $1 - x_0^{2^{n+1}} \sim -x_0^{2^{n+1}}$, puis

$$\frac{u_n}{1 - x_0} \sim \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{-x_0^{2^{n+1}}} = -\frac{1}{x_0}.$$

Donc $u_n \rightarrow \frac{x_0 - 1}{x_0}$, soit $\ell = \boxed{\frac{x_0 - 1}{x_0}}$.

Correction de l'exercice 1.23

1. Faisons un développement asymptotique. Comme $1/n \rightarrow 0$,

$$\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ainsi $u_n = O(1/n^2)$, et comme $\sum 1/n^2$ converge, par critère de domination, $\sum u_n$ converge.

Sommes partielles. Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Pour $N \geq 2$,

$$S_N = \sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^N (\ln(n-1) - \ln(n)) = (H_N - 1) + (\ln(1) - \ln(N)) = H_N - 1 - \ln(N).$$

2. La série $\sum u_n$ converge, donc la suite $(S_N) = (H_N - 1 - \ln N)$ admet une limite finie L . Posons $\gamma = L + 1$. Alors

$$H_N - \ln N = S_N + 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} L + 1 = \gamma,$$

c'est-à-dire $H_N = \ln N + \gamma + o(1)$.

En particulier, $H_N \sim \ln N$ quand $N \rightarrow +\infty$, car $\frac{H_N}{\ln N} = 1 + \frac{\gamma + o(1)}{\ln N} \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 1.24

Distinguons trois cas selon la position de b par rapport à 1.

Cas 1 : $b < 1$. Alors $b^n \rightarrow 0$, donc $1 + b^n \rightarrow 1$ et $u_n \sim a^n$. La série $\sum a^n$ est géométrique de raison $a > 0$: elle converge si et seulement si $a < 1$.

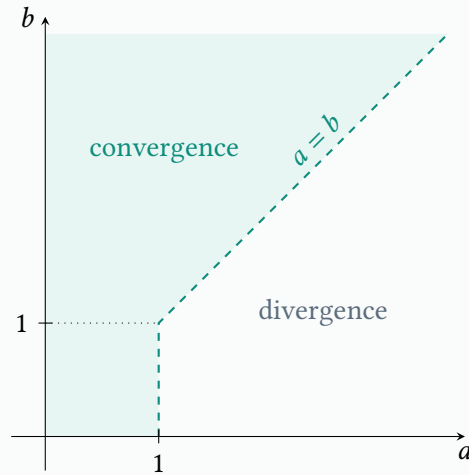
Cas 2 : $b = 1$. Alors $u_n = \frac{a^n}{2}$. La série $\sum a^n/2$ converge si et seulement si $a < 1$.

Cas 3 : $b > 1$. Alors $b^n \rightarrow +\infty$, donc $1 + b^n \sim b^n$ et $u_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n$. La série géométrique $\sum (a/b)^n$ converge si et seulement si $a/b < 1$, c'est-à-dire $a < b$.

Synthèse. La série converge si et seulement si $a < \max(1, b)$. Dans le plan (a, b) restreint au premier quadrant, la région de convergence est délimitée par :

- la bande verticale $0 < a < 1$ pour $0 < b \leq 1$;
- le triangle $0 < a < b$ pour $b > 1$.

La frontière de la région est la ligne brisée constituée du segment $\{a = 1, 0 < b \leq 1\}$ et de la demi-droite $\{a = b, b \geq 1\}$ (exclues).



Correction de l'exercice 1.25

1. Développement asymptotique :

$$w_n = \ln \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Avec $\ln(1+u) = u + O(u^2)$,

$$w_n = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de domination, $\sum w_n$ **converge absolument**.

2. La série $\sum w_n$ est télescopique de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$, donc la suite $(\ln v_n)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par continuité de $\exp$, $v_n \rightarrow A := e^\ell > 0$.
Donc $n^\alpha u_n \rightarrow A$, c'est-à-dire $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.

Comme $A > 0$ et que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est à termes positifs, par critère d'équivalence :

$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$

Correction de l'exercice 1.26

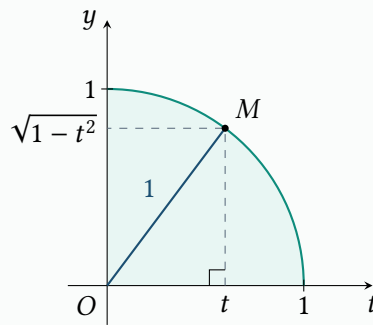
1. Pour $n \geq 0$, $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n(t-1)\sqrt{1-t^2} dt \leq 0$ (l'intégrande est négatif sur $[0, 1]$). Donc (a_n) est décroissante.

Calcul de a_0 $= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$. Plutôt que de calculer cette intégrale, identifions la région dont elle mesure l'aire. Soit $t \in [0, 1]$ et $M = (t, \sqrt{1-t^2})$ le point correspondant du graphe. Le triangle de sommets O , $(t, 0)$ et M est rectangle en $(t, 0)$, et ses côtés de l'angle droit mesurent t et $\sqrt{1-t^2}$; le théorème de Pythagore donne donc :

$$OM^2 = t^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 = t^2 + 1 - t^2 = 1,$$

c'est-à-dire $OM = 1$. Tous les points du graphe sont donc à distance 1 de l'origine : le graphe de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ sur $[0, 1]$ est exactement le quart de cercle unité du premier quadrant (la racine carrée étant positive, on n'obtient bien que la moitié haute du cercle). L'intégrale a_0 est l'aire du domaine compris entre ce graphe et l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'aire du quart de disque unité :

$$a_0 = \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$



On peut aussi calculer a_0 par le changement de variable $t = \cos(\theta)$; ce calcul est mené en exemple dans la section « Intégrales sur un segment », au paragraphe consacré au changement de variable.

Calcul de a_1 . On reconnaît ici la dérivée de $t \mapsto 1-t^2$ au facteur -2 près :

$$a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2} dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

2. Posons $b_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$. En utilisant la relation admise appliquée à $n-1$ ($a_{n+1} = \frac{n}{n+3}a_{n-1}$), on calcule

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)(n+2)a_n((n+3)a_{n+1} - na_{n-1}) = 0.$$

Donc (b_n) est constante, égale à $b_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_1 a_0 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

3. Notons d'abord que $a_n > 0$ pour tout n : l'intégrande $t \mapsto t^n \sqrt{1-t^2}$ est continu, positif et non identiquement nul sur $[0, 1]$. On pourra donc diviser par les a_n sans scrupule.

Montrons que $a_n \sim a_{n+1}$. Par décroissance, $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$. En divisant par $a_n > 0$:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1.$$

Or la relation admise donne $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n+1}{n+4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Par le théorème des gendarmes, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $a_{n+1} \sim a_n$.

Équivalent de a_n . Multiplions cette fois l'encadrement $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$ par $a_{n+1} > 0$:

$$a_{n+2}a_{n+1} \leq a_{n+1}^2 \leq a_{n+1}a_n,$$

et la question 2 donne les deux bornes explicitement : $a_{n+2}a_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$ et $a_{n+1}a_n = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Attention : il n'existe pas de « théorème des gendarmes pour les équivalents ». Constaté que les deux bornes sont équivalentes à $\frac{\pi}{2n^3}$ ne permet donc pas de conclure directement. On revient à la définition d'un équivalent, c'est-à-dire à une limite de quotient : divisons l'encadrement par $\frac{\pi}{2n^3} > 0$,

$$\frac{n^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} \leq \frac{a_{n+1}^2}{\pi/(2n^3)} \leq \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Les deux bornes sont des quotients de polynômes de même degré 3 et de même coefficient dominant : elles tendent toutes les deux vers 1. Le théorème des gendarmes, appliqué cette fois à un quotient (ce qui est parfaitement licite), donne

$$\frac{a_{n+1}^2}{\pi/(2n^3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_{n+1}^2 \sim \frac{\pi}{2n^3}.$$

Toutes les quantités étant strictement positives, on peut passer à la racine carrée : $\sqrt{\frac{a_{n+1}^2}{\pi/(2n^3)}} \rightarrow \sqrt{1} = 1$ par continuité de la racine en 1, donc $a_{n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n^3}}$. Enfin $a_n \sim a_{n+1}$ d'après la première partie de la question, d'où

$$a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n^3}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

4. Comme $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$ et que $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann, $3/2 > 1$), par critère d'équivalence sur séries positives, $\sum a_n$ **converge**.

Correction de l'exercice 1.27

1. Posons $u = f$ et notons v la fonction définie sur $[a, b]$ par $v(t) = \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$ (c'est licite car $\lambda > 0$). La fonction u est de classe C^1 sur $[a, b]$ par hypothèse, et v l'est également comme composée de fonctions de classe C^1 , avec $v'(t) = \frac{\lambda \cos(\lambda t)}{\lambda} = \cos(\lambda t)$. La formule d'intégration par parties s'applique donc et donne :

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt.$$

Majorons maintenant chacun des deux termes du membre de droite. Comme $|\sin| \leq 1$, le terme tout intégré vérifie

$$\left| \frac{f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{\lambda}.$$

Pour le second terme, la fonction f' est continue sur le segment $[a, b]$ (car f est de classe C^1), donc $M = \int_a^b |f'(t)| dt$ est un réel bien défini, *indépendant de λ* . L'inégalité triangulaire pour les intégrales et la majoration $|\sin| \leq 1$ donnent alors

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)| |\sin(\lambda t)| dt \leq \frac{M}{\lambda}.$$

En posant $C = |f(a)| + |f(b)| + M$, qui ne dépend pas de λ , on obtient par inégalité triangulaire :

$$0 \leq \left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Or $\frac{C}{\lambda} \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Par encadrement, $\left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \right| \rightarrow 0$, et donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

2. Commençons par établir la formule de linéarisation utilisée (on note ici les variables x et y , pour ne pas les confondre avec les bornes a et b de la question 1). Pour tous réels x et y , les formules d'addition donnent

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad \text{et} \quad \cos(x-y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y).$$

En additionnant ces deux égalités, les termes en $\sin(x) \sin(y)$ se simplifient et il reste

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos(x) \cos(y).$$

Appliquons cette identité avec $x = kt$ et $y = \frac{t}{2}$. On a alors $x+y = \frac{(2k+1)t}{2}$ et $x-y = \frac{(2k-1)t}{2}$, d'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right) \right).$$

3. L'idée est de reconnaître une somme télescopique. Posons, pour $k \geq 1$,

$$c_k = (-1)^{k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right).$$

Multiplions l'identité de la question 2 par $(-1)^k$:

$$(-1)^k \cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \left((-1)^k \cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + (-1)^k \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right) \right).$$

Or le premier terme entre parenthèses vaut exactement c_{k+1} (remplacer k par $k+1$ dans la définition de c_k), et le second vaut $-c_k$ puisque $(-1)^k = -(-1)^{k-1}$. Autrement dit, pour tout $k \geq 1$:

$$(-1)^k \cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} (c_{k+1} - c_k).$$

En sommant pour k allant de 1 à n , la somme du membre de droite est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (c_{k+1} - c_k) = \frac{1}{2} (c_{n+1} - c_1).$$

Il ne reste qu'à expliciter les deux termes restants : $c_{n+1} = (-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$ et $c_1 = (-1)^0 \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$. On obtient bien

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

4. L'idée est de faire apparaître $\frac{\sin(k)}{k}$ comme une intégrale, afin de pouvoir utiliser la question précédente. Pour $k \geq 1$, une primitive de $t \mapsto \cos(kt)$ est $t \mapsto \frac{\sin(kt)}{k}$, donc

$$\int_0^1 \cos(kt) \, dt = \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^1 = \frac{\sin(k)}{k}.$$

Par ailleurs, pour $t \in [0, 1]$ on a $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{t}{2}\right) > 0$: on peut diviser l'égalité de la question 3 par $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, ce qui donne, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} = (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

Toutes les fonctions en présence étant continues sur $[0, 1]$, on peut intégrer cette égalité entre 0 et 1. Le membre de gauche donne, par linéarité de l'intégrale et d'après le calcul ci-dessus,

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) \, dt = \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 \cos(kt) \, dt = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin(k)}{k},$$

tandis que le membre de droite donne $(-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \, dt - \frac{1}{2}$. D'où, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \, dt - \frac{1}{2}.$$

5. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin(k)}{k}$ la somme partielle d'ordre n de la série étudiée, et posons $g(t) = \frac{1}{2 \cos(\frac{t}{2})}$ pour $t \in [0, 1]$. Comme $\cos(\frac{t}{2})$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$, la fonction g est de classe C^1 sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. La question 4 se réécrit alors

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 g(t) \cos(\lambda_n t) dt - \frac{1}{2}, \quad \text{où} \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2}.$$

Comme $\lambda_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, la question 1 appliquée à g sur le segment $[0, 1]$ donne (par composition de limites)

$$\int_0^1 g(t) \cos(\lambda_n t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le facteur $(-1)^n$ étant borné, le produit $(-1)^n \int_0^1 g(t) \cos(\lambda_n t) dt$ tend lui aussi vers 0 (produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle). Ainsi la suite (S_n) des sommes partielles converge vers $-\frac{1}{2}$: par définition, la série $\sum u_n$ **converge** et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n} = -\frac{1}{2}.}$$

II. INTÉGRALES SUR UN SEGMENT

1. Généralités

Proposition 1.26 (Relation de Chasles)

Pour toute fonction $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur un intervalle I et tous $a, b, c \in I$:

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$$

Remarque

Cet énoncé ne suppose rien sur l'ordre de a, b et c . Il est en effet adossé à la *convention d'orientation* :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

On la retrouve d'ailleurs en faisant $c = a$ dans la relation de Chasles, puisque $\int_a^a f(t) dt = 0$.

Proposition 1.27 (Positivité, croissance et inégalité triangulaire)

Soient $a \leq b$ deux réels.

1. **Positivité.** Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
2. **Croissance.** Si $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et vérifient $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
3. **Inégalité triangulaire.** Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

En particulier, si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et s'il existe $M \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$, alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M(b - a).$$

Remarque

Les deux premiers points sont réservés aux fonctions à valeurs réelles : écrire « $f \geq 0$ » ou « $f \leq g$ » n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$, faute de relation d'ordre. Le troisième, lui, ne compare que des modules : il vaut donc aussi bien pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Remarque

Attention à l'ordre des bornes. Ces trois énoncés supposent *tous* que $a \leq b$: avec la convention d'orientation, l'intégrale d'une fonction positive prise « à l'envers » est négative. C'est l'erreur classique ; il faut toujours vérifier le sens des bornes avant d'écrire une inégalité entre intégrales.

Il est donc commode de disposer d'une version de la dernière majoration qui, elle, ne suppose rien sur l'ordre des bornes. Si $g: I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, si $u, v \in I$ et s'il existe $M \geq 0$ tel que $|g(t)| \leq M$ pour tout t situé entre u et v , alors :

$$\left| \int_u^v g(t) dt \right| \leq M |v - u|.$$

En effet, si $u \leq v$ c'est la proposition précédente, et si $v \leq u$ on applique celle-ci à $\int_v^u g$, qui ne diffère que par le signe. La valeur absolue $|v - u|$ rend ainsi la majoration valable quel que soit le signe de $v - u$: changer l'orientation ne change que le signe de l'intégrale. C'est sous cette forme que nous nous en servons dans la démonstration du théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 1.28 (Théorème fondamental de l'analyse – première forme)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. La fonction

$$F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est de classe C^1 sur $[a, b]$ et vérifie $F' = f$.

Théorème 1.29 (Théorème fondamental de l'analyse – seconde forme)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b.$$

Équivalence des deux formes

Montrons que chacune des deux formes se déduit de l'autre.

La première forme entraîne la seconde. Soit f continue sur $[a, b]$ et soit G une primitive de f sur $[a, b]$. D'après la première forme, la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f . Ainsi $(F - G)' = f - f = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$, donc $F - G$ y est constante :

$$F(b) - G(b) = F(a) - G(a).$$

Or $F(a) = 0$ et $F(b) = \int_a^b f(t) dt$, d'où $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$.

La seconde forme entraîne la première. Supposons la seconde forme acquise, ainsi que l'existence d'une primitive G de f sur $[a, b]$. Pour $x \in [a, b]$, la fonction f est continue sur $[a, x]$ et G y est une primitive de f ; la seconde forme donne donc :

$$\forall x \in [a, b], \int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a),$$

c'est-à-dire $F = G - G(a)$. Ainsi F est dérivable sur $[a, b]$, $F' = G' = f$, et comme f est continue, F est bien C^1 . $\square$

Remarque

Il faut connaître les deux formes du théorème, car elles ne servent pas du tout à la même chose.

La *seconde* forme est l'outil de *calcul* : on cherche une primitive, on l'évalue aux bornes, c'est terminé. C'est elle que l'on utilise dans presque tous les calculs d'intégrales.

La *première* forme est l'outil d'*existence et de régularité* : à partir d'une simple fonction continue f , elle fabrique une fonction dérivable, sans qu'aucune expression close ne soit nécessaire.

Première forme du théorème fondamental

Il reste donc à démontrer la première forme, c'est-à-dire à fabriquer effectivement une primitive. Revenons pour cela à la définition de la dérivée, par les taux de variation.

Soit $x_0 \in [a, b]$ et soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$. La relation de Chasles donne :

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Par ailleurs, l'intégrale de la fonction constante égale à $f(x_0)$ vaut $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = hf(x_0)$. En divisant par h et en retranchant $f(x_0)$, il vient donc :

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a, b], |t - x_0| \leq \delta \implies |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Supposons $0 < |h| \leq \delta$. Tout t situé entre x_0 et $x_0 + h$ vérifie alors $|t - x_0| \leq |h| \leq \delta$, donc $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. La majoration orientée rappelée plus haut, appliquée à $g: t \mapsto f(t) - f(x_0)$ avec $M = \varepsilon$, donne :

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \varepsilon |h|$$

et par conséquent :

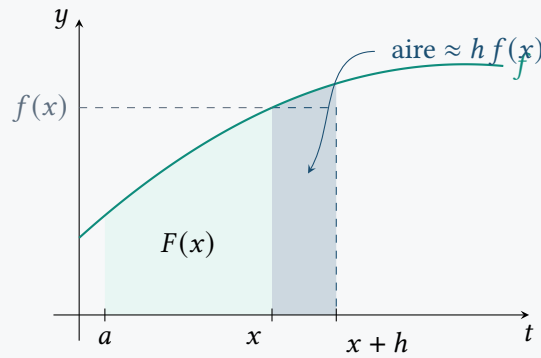
$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le taux de variation de F en x_0 tend vers $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0. Autrement dit, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ — aux extrémités a et b , il s'agit respectivement de la dérivabilité à droite et à gauche.

Enfin $F' = f$ est continue sur $[a, b]$, donc F est bien C^1 . $\square$

Remarque

Interprétation graphique. Supposons f positive. Alors $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'aire du domaine situé sous le graphe de f , entre les abscisses a et x . Faire varier x de h revient à ajouter à ce domaine la tranche verticale comprise entre x et $x + h$.



Si h est petit, f varie peu sur $[x, x+h]$: cette tranche est presque un rectangle de largeur h et de hauteur $f(x)$, donc d'aire $h f(x)$. Autrement dit :

$$F(x+h) - F(x) \approx h f(x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x).$$

C'est exactement $F'(x) = f(x)$: la vitesse à laquelle l'aire croît en x est la hauteur du graphe en x . Toute la démonstration ci-dessus consiste à rendre ce « presque » rigoureux, au moyen de la continuité de f .

Exemple 1.30

Commençons par l'usage le plus direct. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$F: x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$$

est C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le théorème est pourtant énoncé sur un *segment*, alors que l'on vient de conclure sur $\mathbb{R}$ tout entier. La raison est qu'être de classe C^1 est une propriété *locale* : il suffit de la vérifier au voisinage de chaque point. Fixons donc $x \in \mathbb{R}$ et soit A tel que $x \in [-A, A]$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[-A, A]$; le théorème s'y applique donc et donne $F'(x) = e^{-x^2}$, avec F' continue au voisinage de x . Comme x était quelconque, F est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On en déduit aussitôt, sans avoir calculé la moindre intégrale : $F' > 0$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $F(0) = 0$; et F est impaire, car F et $x \mapsto -F(-x)$ ont la même dérivée et s'annulent toutes deux en 0.

Il faut bien mesurer ce qui vient de se passer. La fonction F n'admet aucune expression à l'aide des fonctions usuelles : on ne peut donc pas l'étudier en la calculant. Et pourtant on connaît son existence, sa régularité, sa dérivée, et donc ses variations.

Exemple 1.31

Soient f continue sur un intervalle I et $a \in I$. Que dire de $G: x \mapsto \int_x^a f(t) dt$?

Ici c'est la borne *inférieure* qui varie, et le théorème fondamental ne s'applique pas directement. Mais la convention d'orientation permet de s'y ramener :

$$G(x) = \int_x^a f(t) dt = - \int_a^x f(t) dt = -F(x),$$

où $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est C^1 sur I de dérivée f . Donc G est C^1 sur I et $G'(x) = -f(x)$.

Le signe vient uniquement de l'orientation.

Exemple 1.32

Montrons que

$$G: x \mapsto \int_{-x}^{x^2} e^{-t^2} dt$$

est C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculons sa dérivée.

Cette fois les *deux* bornes dépendent de x : aucun des deux exemples précédents ne s'applique tel quel. Cependant, puisque $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue (en fait C^∞), il existe une primitive F de cette fonction. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = \int_{-x}^{x^2} e^{-t^2} dt = F(x^2) - F(-x).$$

Les fonctions $x \mapsto -x$ et $x \mapsto x^2$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$, et F est C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque $F' = f$ est continue : par composition puis par différence, G est C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant :

$$G'(x) = 2x F'(x^2) - (-1) F'(-x) = 2x e^{-x^4} + e^{-x^2}.$$

Exemple 1.33

Terminons par un exemple d'une autre nature. Étudions

$$h: x \mapsto \int_0^1 e^{(xt)^2} dt.$$

Le paramètre x n'est plus dans les bornes mais dans la fonction intégrée : le théorème fondamental ne dit rien tel quel. L'idée est de faire passer x de la fonction intégrée vers les bornes par un changement de variable.

Fixons $x \neq 0$ et posons $\varphi: u \mapsto xu$, qui est C^1 sur $[0, 1]$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = x$. Le théorème de changement de variable, appliqué à $f: t \mapsto e^{t^2}$, donne :

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t) dt = \int_0^1 f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = x \int_0^1 e^{(xu)^2} du = x h(x).$$

On obtient :

$$h(x) = \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et} \quad h(0) = \int_0^1 1 dt = 1.$$

On peut alors conclure. La fonction h est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, comme quotient de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On peut même montrer que h est C^1 sur $\mathbb{R}$. En effet, $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse (en effet sa dérivée est C^∞).

En particulier, on a le développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 0 + e^{0^2} x + \frac{1}{2} \times 2 \times 0 \times e^{0^2} x^2 + o(x^2) = x + o(x^2).$$

Ainsi :

$$h(x) = \underbrace{1}_{=h(0)} + o(x).$$

Donc h admet un DL1 en 0 : elle y est dérivable, avec $h'(0) = 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$h'(x) = \frac{e^{x^2} x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2} = \frac{(1 + o(x)) x - (x + o(x^2))}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1).$$

Donc $h'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$: la fonction h' est continue en 0, et h est bien C^1 sur $\mathbb{R}$.

On peut en fait montrer que h est C^∞ , mais on verra des techniques pour cela plus tard dans l'année.

Remarque

Le dernier exemple utilise le théorème de changement de variable, qui n'est énoncé que dans la sous-section suivante. Il n'y a pas de cercle vicieux : ces deux résultats sont au programme de première année et sont supposés connus tous les deux.

2. Méthodes de calculs

Proposition 1.34 (Intégration par parties)

Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 . Alors

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

Exemple 1.35

Commençons par un grand classique : une primitive de $\ln$. L'astuce est d'écrire $\ln = 1 \times \ln$, d'intégrer le facteur 1 et de dériver le logarithme.

Soit $x > 0$. Posons $u'(t) = 1$, donc $u(t) = t$, et $v(t) = \ln(t)$, donc $v'(t) = \frac{1}{t}$. Ces deux fonctions sont C^1 sur le segment d'extrémités 1 et x , qui est inclus dans $]0, +\infty[$. L'intégration par parties donne :

$$\int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - \int_1^x 1 dt = x \ln(x) - x + 1.$$

Autrement dit, $t \mapsto t \ln(t) - t$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

Exemple 1.36

Le même procédé fonctionne pour $\arctan$. Soit $x \in \mathbb{R}$; posons $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, et $v(t) = \arctan(t)$, donc $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$:

$$\int_0^x \arctan(t) dt = [t \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt.$$

Il reste à reconnaître, dans la dernière intégrale, la forme $\frac{w'}{w}$ à un facteur $\frac{1}{2}$ près, avec $w(t) = 1 + t^2$:

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^x = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Finalement $\int_0^x \arctan(t) dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, et donc $t \mapsto t \arctan(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$ est une primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.37

Terminons par un usage différent de l'intégration par parties. Calculons $\int_0^1 t e^{-t} dt$. L'intégrande est un produit « polynôme $\times$ exponentielle ». On dérive le polynôme — ce qui fait baisser son degré — et on intègre l'exponentielle — ce qui ne coûte rien. Posons donc $u'(t) = e^{-t}$ et $u(t) = -e^{-t}$, puis $v(t) = t$ et $v'(t) = 1$, toutes C^1 sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = -\frac{1}{e} + [-e^{-t}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}.$$

Si le facteur polynomial avait été de degré d , il aurait fallu répéter d fois l'opération pour l'épuiser.

Proposition 1.38 (Changement de variable)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow I$ de classe C^1 . Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Exemple 1.39

Commençons par le sens de lecture le plus visible : on pose $t = \varphi(\theta)$, c'est-à-dire que l'on remplace la variable d'intégration par une fonction. Calculons ainsi $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \cos(\theta)$.

La fonction $\varphi: \theta \mapsto \cos(\theta)$ est C^1 sur $[0, \pi/2]$, avec $\varphi(\pi/2) = 0$ et $\varphi(0) = 1$, et $f: t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0, 1] = \varphi([0, \pi/2])$. La formule donne donc :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{\varphi(\pi/2)}^{\varphi(0)} f(t) dt = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2(\theta)} (-\sin(\theta)) d\theta.$$

C'est ici que se joue la validité du calcul : $\sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2(\theta)} = |\sin(\theta)|$, et c'est *parce que* θ parcourt $[0, \pi/2]$, où le sinus est positif, que l'on peut écrire $|\sin(\theta)| = \sin(\theta)$. Le signe $-$ et l'échange des bornes se compensent alors :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{\pi/2}^0 (-\sin^2(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) d\theta.$$

Il ne reste qu'à linéariser :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Le résultat était prévisible : $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ est l'aire du quart de disque unité situé dans le premier quadrant, c'est-à-dire $\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2$.

Exemple 1.40

Passons à l'autre sens de lecture, celui que l'on utilise le plus souvent en pratique : on ne pose rien, on *reconnait* φ' dans la fonction intégrée. Calculons $\int_0^{\pi/4} \tan(t) dt$. Écrivons $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ avec $\varphi(t) = \cos(t)$. Cette fonction est C^1 sur $[0, \pi/4]$ et ne s'y annule pas, avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ainsi $f: w \mapsto \frac{1}{w}$ est continue sur $\varphi([0, \pi/4]) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. La formule, lue de la droite vers la gauche, donne :

$$\int_0^{\pi/4} \tan(t) dt = - \int_0^{\pi/4} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/4)} f(w) dw = - \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dw}{w}.$$

Il ne reste qu'à conclure :

$$\int_0^{\pi/4} \tan(t) dt = - [\ln(w)]_1^{\sqrt{2}/2} = - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln(2).$$

Le même calcul, mené sur un segment quelconque de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, montre que $t \mapsto -\ln(\cos(t))$ est une primitive de $\tan$ sur cet intervalle. C'est le motif $\frac{w'}{w}$, qu'il faut apprendre à repérer d'emblée : il donne systématiquement un logarithme.

Théorème 1.41 (Sommes de Riemann)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Exemple 1.42

Ce théorème se lit surtout de la droite vers la gauche : il donne la limite d'une somme que l'on ne sait pas calculer, en la remplaçant par une intégrale que l'on sait calculer. Cherchons par exemple la limite de :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}.$$

Le facteur $\frac{1}{n}$ en tête et les quotients $\frac{k}{n}$ à l'intérieur sont la signature d'une somme de Riemann sur le segment $[0, 1]$: avec $a = 0$ et $b = 1$, la subdivision du théorème est $a + k \frac{b-a}{n} = \frac{k}{n}$ et son pas est $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$. Les termes de la somme sont donc les $f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour :

$$f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}},$$

qui est continue sur $[0, 1]$.

Un détail : l'indice varie ici de 1 à n , alors que le théorème somme de 0 à $n-1$. Les deux sommes ne diffèrent que par le terme $k = n$, ajouté, et le terme $k = 0$, retiré, c'est-à-dire par $\frac{1}{n} (f(1) - f(0))$, qui tend vers 0. Elles ont donc la même limite :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Remarque

Retenons la méthode, qui ne varie pas. Devant une somme dont on cherche la limite, on cherche à l'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{n} \sum_k f\left(\frac{k}{n}\right),$$

autrement dit à faire apparaître deux choses : la variable $\frac{k}{n}$ partout où figurent k et n , et un unique facteur $\frac{1}{n}$ *global*, en dehors de la somme.

On peut d'ailleurs toujours se ramener ainsi à $a = 0$ et $b = 1$. En effet, le changement de variable $t = a + (b - a)u$ donne :

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)u) du,$$

de sorte que le cas général du théorème n'est que le cas $[0, 1]$ appliqué à $g: u \mapsto f(a + (b - a)u)$. En pratique, on ne fabrique donc jamais l'intervalle : c'est la somme qui indique la fonction f , sur $[0, 1]$.

Enfin, comme dans l'exemple ci-dessus, les bornes exactes de l'indice sont sans importance : que k aille de 0 à $n - 1$, de 1 à n ou de 1 à $n - 1$, on ne modifie la somme que d'un nombre borné de termes, chacun d'ordre $\frac{1}{n}$. La limite est la même.

EXERCICES — INTÉGRALES SUR UN SEGMENT
Exercice 1.28 ○

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 (3t^2 - 2t + 1) dt$
2. $\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt$
3. $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$

Exercice 1.29 ●

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + k/n}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$

Exercice 1.30 ●●

Déterminer la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}\right) \right)^{1/n}.$$

Exercice 1.31 ●

CCP 2011. Étudier la convergence et calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}.$$

Exercice 1.32 ●

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable :

1. $\int_0^1 t^2 e^{-t} dt$
2. $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$
3. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} dt$

Exercice 1.33 •

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On note $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Montrer que :

$$\left| \int_0^1 (f(x) + xf(1-x)) dx \right| \leq \frac{3}{2}M.$$

Exercice 1.34 •

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) > 0$ et $\int_a^b f = 0$. Montrer qu'il existe $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

Exercice 1.35 •

Calculer :

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} dx.$$

Exercice 1.36 •

Calculer :

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x - a| dx.$$

Exercice 1.37 •

Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général u_n , converge et calculer sa limite :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$;
2. $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

Exercice 1.38 ••

Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 + x^n}{2 - x^{2n}} dx.$$

Exercice 1.39 ••

Calculer :

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Exercice 1.40 ••

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 1.41 ••

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi/2} e^{-u \sin x} dx.$$

Exercice 1.42 ●●

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx.$$

Exercice 1.43 ●●

Déterminer l'ensemble des applications $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que $f \geq 0$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq \int_0^x f(t) dt.$$

Exercice 1.44 ●●

Étude et représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

Exercice 1.45 ●●●

Soient $k \in \mathbb{R}_+$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne. On pose $F: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que F est $\frac{k}{2}$ -lipschitzienne.

Exercice 1.46 ●●●

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 1.47 ●●●

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$ et : $\forall x \in [a, b], 0 \leq f'(x) \leq 1$. Montrer que :

$$\int_a^b f^3 \leq \left(\int_a^b f \right)^2.$$

Exercice 1.48 ●●●

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

1. On note $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \int_a^x |f'(t)| dt$. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq F(x).$$

2. En déduire :

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Exercice 1.49 ● ● ●

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2}M_2a.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que, en notant $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$, on a :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Exercice 1.50 ★

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer que :

$$\left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Exercice 1.51 ●

Calculer une primitive de $x^2 \ln x$.

Exercice 1.52 ●

Calculer une primitive de $x^2 \cos x$ et de $x^2 \sin x$.

Exercice 1.53 ●

Calculer une primitive de $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

Exercice 1.54 ●

Calculer une primitive de $\frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2 + 1)}$.

Exercice 1.55 ●

Calculer une primitive de $\frac{x^4}{x^{10} + 1}$.

Exercice 1.56 ● ●

Calculer une primitive de $x \exp(x) \cos(x)$.

Exercice 1.57 ● ●

Calculer une primitive de $\cos^4 x$.

Exercice 1.58 ● ●

Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Exercice 1.59 ●●

Donner une primitive de $\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$.

Exercice 1.60 ●●

Donner les primitives de

1. $\frac{3 + \ln x}{(4 + \ln x)^2}$,
2. $\frac{\exp(x)}{(\exp(x) + 1) \ln(\exp(x) + 1)}$,
3. $\sqrt{1 + \sqrt{x}}$

avec leurs ensembles de validité.

Exercice 1.61 ●●●

Calculer les primitives suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

Exercice 1.62 ●●●

Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

Exercice 1.63 ●●●

Donner une primitive de $\frac{1}{3 + \operatorname{ch}(x)}$ avec son ensemble de validité.

Exercice 1.64 ●●●

Calculer :

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1.65 ●●●

Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

puis :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

et enfin :

$$K = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx.$$

CORRECTIONS DES EXERCICES — INTÉGRALES SUR UN SEGMENT

Correction de l'exercice 1.28

1. On a

$$\int_0^1 (3t^2 - 2t + 1) dt = [t^3 - t^2 + t]_0^1 = 1 - 1 + 1 = 1.$$

2. On utilise $\sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$, d'où

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} (-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{1}{2}.$$

3. On reconnaît la forme $\frac{u'}{1} \cdot u$ avec $u(t) = \ln(t)$:

$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.29

1. C'est une somme de Riemann associée à $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1]$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

2. C'est une somme de Riemann pour $f(t) = e^t$ sur $[0, 1]$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1.$$

3. On prend le logarithme :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt.$$

Par intégration par parties ($u' = 1$, $v = \ln(1+t)$) :

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t) - (1+t)]_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

Donc la limite vaut $e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

Correction de l'exercice 1.30

Tous les facteurs sont strictement positifs ; notons P_n le produit élevé à la puissance $\frac{1}{n}$ et passons au logarithme :

$$\ln(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} \right).$$

Ce n'est *pas* une somme de Riemann : le terme $\frac{k}{n^2}$ ne s'exprime pas à l'aide de $\frac{k}{n}$ seul, et aucune fonction f ne permet d'écrire le terme général sous la forme $f\left(\frac{k}{n}\right)$. On isole donc la partie qui, elle, en est une :

$$\ln(P_n) = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)}_{A_n} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n}} \right)}_{R_n},$$

où l'on a simplement écrit $1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} = \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k/n^2}{1+k/n}\right)$.

Le terme A_n est la somme de Riemann de la troisième question de l'exercice précédent :

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt = 2 \ln(2) - 1.$$

Il reste à montrer que R_n tend vers 0. Posons $x_k = \frac{k/n^2}{1+k/n}$. Comme $k \leq n$, on a $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, et le facteur $\frac{1}{1+k/n}$ est majoré par 1 ; donc $0 \leq x_k \leq \frac{1}{n}$. En utilisant $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$:

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Par encadrement, $R_n \rightarrow 0$.

Finalement $\ln(P_n) \rightarrow 2 \ln(2) - 1$, et par continuité de l'exponentielle :

$$P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{2 \ln(2) - 1} = \frac{4}{e}.$$

Le point de méthode. Une somme presque de Riemann se traite en deux temps : on extrait la somme de Riemann exacte, puis on *major*e le reste au lieu de le négliger. Ici la perturbation $\frac{k}{n^2}$ est uniformément un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui suffit ; une perturbation du même ordre que $\frac{k}{n}$ changerait au contraire la limite.

Correction de l'exercice 1.31

On factorise par $\frac{1}{n}$:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ (continue sur $[0, 1]$). Donc

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln(2)}.$$

Remarque. Attention à ne pas confondre : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ n'est pas une somme partielle fixée d'une série en k , car la borne dépend aussi de n . C'est pourquoi on ne peut pas conclure avec les théorèmes sur les séries.

Correction de l'exercice 1.32

1. Intégration par parties avec $v(t) = t^2$ et $u'(t) = e^{-t}$, soit $v'(t) = 2t$ et $u(t) = -e^{-t}$:

$$\int_0^1 t^2 e^{-t} dt = [-t^2 e^{-t}]_0^1 + 2 \int_0^1 t e^{-t} dt = -\frac{1}{e} + 2 \int_0^1 t e^{-t} dt.$$

On reconnaît l'intégrale calculée en exemple dans les rappels, qui vaut $1 - \frac{2}{e}$ (une seconde intégration par parties la redonne). D'où :

$$\int_0^1 t^2 e^{-t} dt = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}.$$

2. Changement de variable $u = 1 + t^2$, $du = 2t dt$:

$$\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

3. Changement de variable $u = \cos(t)$, $du = -\sin(t) dt$. Quand $t = 0$, $u = 1$; quand $t = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} dt = - \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^2} = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = -1 + \sqrt{2}.$$

Correction de l'exercice 1.33

Par linéarité puis inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^1 (f(x) + x f(1-x)) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 x |f(1-x)| dx,$$

la seconde majoration utilisant $x \geq 0$ sur $[0, 1]$.

Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée et $|f| \leq M$. Donc $\int_0^1 |f| \leq M$, et comme $1-x$ décrit aussi $[0, 1]$:

$$\int_0^1 x |f(1-x)| dx \leq M \int_0^1 x dx = \frac{M}{2}.$$

Finalement l'intégrale cherchée est majorée en valeur absolue par $M + \frac{M}{2} = \frac{3}{2}M$.

Correction de l'exercice 1.34

Raisonnons par l'absurde en supposant $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

On utilise alors le résultat classique suivant : si g est continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b g = 0$, alors g est identiquement nulle. En effet, s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) > 0$, la continuité de g en x_0 fournit un segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ avec $\alpha < \beta$ sur

lequel $g \geq \frac{g(x_0)}{2}$; la positivité de g ailleurs donne alors

$$\int_a^b g \geq \int_a^\beta g \geq (\beta - \alpha) \frac{g(x_0)}{2} > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Appliqué à f , ce résultat donne $f = 0$ sur $[a, b]$, en contradiction avec $f(x_1) > 0$.

L'hypothèse $f \geq 0$ est donc absurde : il existe $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

Correction de l'exercice 1.35

La formule de duplication donne $1 + \cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)$, donc

$$\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)} = \left| \cos \left(\frac{x}{2}\right) \right|.$$

Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{x}{2} \in [0, \pi]$: le cosinus y est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On découpe donc l'intégrale en $x = \pi$:

$$I = \int_0^\pi \cos \left(\frac{x}{2}\right) dx - \int_\pi^{2\pi} \cos \left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[2 \sin \left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi - \left[2 \sin \left(\frac{x}{2}\right)\right]_\pi^{2\pi}.$$

Le premier crochet vaut $2 - 0 = 2$, le second $0 - 2 = -2$, d'où $I = 4$.

Le point de méthode. Écrire $\sqrt{u^2} = u$ au lieu de $|u|$ donnerait ici $\left[2 \sin(x/2)\right]_0^{2\pi} = 0$: c'est l'erreur classique. Une racine carrée impose toujours de discuter le signe.

Correction de l'exercice 1.36

Posons $g(a) = \int_0^1 |x - a| dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Cas $a < 0$. Sur $[0, 1]$ on a $x - a > 0$, donc $g(a) = \int_0^1 (x - a) dx = \frac{1}{2} - a > \frac{1}{2}$.

Cas $a > 1$. Sur $[0, 1]$ on a $x - a < 0$, donc $g(a) = \int_0^1 (a - x) dx = a - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.

Cas $a \in [0, 1]$. On coupe l'intégrale en a , où la valeur absolue change d'expression :

$$g(a) = \int_0^a (a - x) dx + \int_a^1 (x - a) dx = \frac{a^2}{2} + \frac{(1 - a)^2}{2}.$$

Cette fonction polynomiale est dérivable, de dérivée $g'(a) = a - (1 - a) = 2a - 1$, qui s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe (négative puis positive) : g atteint sur $[0, 1]$ son minimum en $a = \frac{1}{2}$, et

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Comme $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, ce minimum local est global :

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x - a| dx = \frac{1}{4},$$

borne atteinte en $a = \frac{1}{2}$ (c'est donc un minimum).

Correction de l'exercice 1.37

1. On factorise n^2 sous la racine pour faire apparaître $\frac{k}{n}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{où } f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2t}}.$$

La fonction f est continue sur $[0, 1]$: c'est une somme de Riemann, donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + 2t}} = \left[\sqrt{1 + 2t} \right]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

2. Tous les facteurs sont strictement positifs ; on passe au logarithme :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt,$$

car $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est continue sur $[0, 1]$. Une intégration par parties ($u' = 1$, $v = \ln(1 + t^2)$) donne

$$\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = \left[t \ln(1 + t^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt = \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt,$$

soit $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$. Par continuité de l'exponentielle,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}.$$

Correction de l'exercice 1.38

Notons $f_n(x) = \frac{1 + x^n}{2 - x^{2n}}$. Pour $x \in [0, 1]$ on a $0 \leq x^{2n} \leq 1$, donc $2 - x^{2n} \geq 1 > 0$: chaque f_n est bien définie et continue sur $[0, 1]$.

On ne peut pas passer à la limite sous l'intégrale sans justification ; on majore donc directement l'écart à la limite pressentie $\frac{1}{2}$:

$$f_n(x) - \frac{1}{2} = \frac{2(1 + x^n) - (2 - x^{2n})}{2(2 - x^{2n})} = \frac{2x^n + x^{2n}}{2(2 - x^{2n})}.$$

Comme $2 - x^{2n} \geq 1$ et $x^{2n} \leq x^n$ sur $[0, 1]$, il vient

$$0 \leq f_n(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{2x^n + x^n}{2} = \frac{3}{2}x^n.$$

En intégrant cet encadrement sur $[0, 1]$:

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \int_0^1 x^n dx = \frac{3}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 + x^n}{2 - x^{2n}} dx = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1.39

L'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0 : on effectue le changement de variable affine $x = -t$, qui donne

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dt}{(e^{-t} + 1)(t^2 + 1)} = \int_{-1}^1 \frac{e^t}{(1 + e^t)(t^2 + 1)} dt,$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur par e^t .

En additionnant les deux écritures de I , l'exponentielle disparaît :

$$2I = \int_{-1}^1 \frac{1 + e^x}{(1 + e^x)(x^2 + 1)} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2} = [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

D'où $I = \frac{\pi}{4}$.

Le point de méthode. Devant un facteur $\frac{1}{e^x + 1}$ sur un intervalle symétrique, le réflexe est le changement de variable $x \mapsto -x$: la *somme* des deux expressions de l'intégrale élimine l'exponentielle.

Correction de l'exercice 1.40

L'idée est de fabriquer un carré à partir des trois intégrales égales. En développant :

$$\int_0^1 (f^2 - f)^2 = \int_0^1 (f^4 - 2f^3 + f^2) = \int_0^1 f^4 - 2 \int_0^1 f^3 + \int_0^1 f^2 = 0,$$

puisque les trois intégrales ont la même valeur.

Or $(f^2 - f)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$, d'intégrale nulle : elle est donc identiquement nulle. Ainsi

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x)^2 = f(x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \in \{0, 1\}.$$

Enfin f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, donc $f([0, 1])$ est un intervalle contenu dans $\{0, 1\}$: c'est nécessairement un singleton. Autrement dit f est constante, égale à 0 ou à 1.

Correction de l'exercice 1.41

Pour $u > 0$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $-u \leq -u \sin x \leq 0$, puis, par croissance de l'exponentielle,

$$e^{-u} \leq e^{-u \sin x} \leq 1.$$

En intégrant cet encadrement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{\pi}{2} e^{-u} \leq \int_0^{\pi/2} e^{-u \sin x} dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers $\frac{\pi}{2}$ quand $u \rightarrow 0^+$, donc par encadrement

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi/2} e^{-u \sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.42

Pour $u > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ est continue sur $[u, 3u] \subset \mathbb{R}_+^*$. On isole la partie singulière en écrivant

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\cos x - 1}{x},$$

ce qui donne

$$\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx = [\ln x]_u^{3u} + R(u) = \ln 3 + R(u), \quad R(u) = \int_u^{3u} \frac{\cos x - 1}{x} dx.$$

L'inégalité classique $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$ donne, pour $x \in [u, 3u]$,

$$\left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3u}{2},$$

d'où

$$|R(u)| \leq \frac{3u}{2} \times (3u - u) = 3u^2 \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} 0.$$

Finalement $\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx = \ln 3$.

Correction de l'exercice 1.43

Soit f une telle application et posons $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, la fonction F y est de classe C^1 , avec $F' = f$ et $F(0) = 0$. L'hypothèse s'écrit

$$\forall x \geq 0, \quad F'(x) \leq F(x).$$

On considère alors $g(x) = F(x) e^{-x}$, dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée

$$g'(x) = (F'(x) - F(x)) e^{-x} \leq 0.$$

Ainsi g est décroissante, donc $g(x) \leq g(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $F(x) \leq 0$ (car $e^{-x} > 0$).

Mais $f \geq 0$ entraîne $F \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Donc $F = 0$ sur $[0, +\infty[$, puis $f = F' = 0$.

Réciproquement la fonction nulle convient. L'ensemble cherché est donc réduit à la fonction nulle.

Correction de l'exercice 1.44

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; notons G sa primitive qui s'annule en 0. Alors

$$f(x) = G(2x) - G(x),$$

donc f est de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$.

Parité. L'intégrande étant paire, G est impaire, donc $f(-x) = G(-2x) - G(-x) = -G(2x) + G(x) = -f(x)$: la fonction f est impaire. On l'étudie sur $\mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie par rapport à l'origine.

Signe. Pour $x \geq 0$, on a $x \leq 2x$ et $e^{-t^2} > 0$, donc $f(x) \geq 0$, avec égalité seulement en 0.

Variations. On a

$$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2} (2e^{-3x^2} - 1).$$

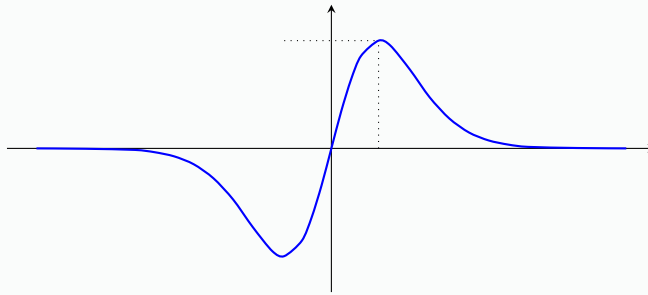
Comme $e^{-x^2} > 0$, le signe de f' est celui de $2e^{-3x^2} - 1$, qui est positif si et seulement si $3x^2 \leq \ln 2$. En posant $a = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \approx 0,48$, la fonction f est donc strictement croissante sur $[0, a]$ et strictement décroissante sur $[a, +\infty[$: elle admet un maximum en a (numériquement $f(a) \approx 0,285$). Au passage $f'(0) = 1$: la courbe traverse l'origine avec une tangente de pente 1.

Limite en $+\infty$. Pour $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$, donc

$$0 \leq f(x) \leq x e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées. Ainsi f tend vers 0 en $+\infty$, et vers 0 en $-\infty$ par imparité : l'axe des abscisses est asymptote aux deux extrémités.

Allure de la courbe.



Correction de l'exercice 1.45

Le point délicat est le raccord en 0 ; on commence donc par écrire F sous une forme valable partout. Pour $x > 0$, le changement de variable affine $t = xu$ donne

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(xu) du,$$

et cette dernière expression vaut encore en $x = 0$, où elle donne $\int_0^1 f(0) du = f(0) = F(0)$. Ainsi

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^1 f(xu) du.$$

Soient alors $x, y \in [0, +\infty[$. Par linéarité puis inégalité triangulaire,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^1 (f(xu) - f(yu)) du \right| \leq \int_0^1 |f(xu) - f(yu)| du.$$

Comme f est k -lipschitzienne et $u \geq 0$:

$$|f(xu) - f(yu)| \leq k |xu - yu| = k u |x - y|,$$

d'où

$$|F(x) - F(y)| \leq k |x - y| \int_0^1 u du = \frac{k}{2} |x - y|.$$

La fonction F est donc $\frac{k}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 1.46

L'hypothèse vaut pour *tout* couple de $[0, 1]^2$: on va la spécialiser le long du quart de cercle unité, ce qui expliquera l'apparition de π .

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, les réels $\cos \theta$ et $\sin \theta$ appartiennent à $[0, 1]$; en prenant $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$:

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos \theta f(\sin \theta) + \sin \theta f(\cos \theta) \leq 1.$$

Les deux membres sont continus ; on intègre sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta f(\sin \theta) d\theta + \int_0^{\pi/2} \sin \theta f(\cos \theta) d\theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Le changement de variable $u = \sin \theta$ transforme la première intégrale en $\int_0^1 f(u) du$; le changement de variable $u = \cos \theta$ transforme la seconde en $-\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(u) du$. Il vient donc

$$2 \int_0^1 f(u) du \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{soit} \quad \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 1.47

Commençons par observer que $f' \geq 0$ rend f croissante sur $[a, b]$; avec $f(a) = 0$, cela donne $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

L'idée est de transformer l'inégalité à démontrer en une étude de fonction. Posons, pour $x \in [a, b]$,

$$h(x) = 2 \int_a^x f - f(x)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\int_a^x f \right)^2 - \int_a^x f^3.$$

Ces deux fonctions sont de classe C^1 et s'annulent en a .

Signe de h . On a

$$h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0,$$

puisque $f \geq 0$ et $f' \leq 1$. Donc h est croissante et, comme $h(a) = 0$, on a $h \geq 0$ sur $[a, b]$.

Signe de g . On a

$$g'(x) = 2f(x) \int_a^x f - f(x)^3 = f(x) \left(2 \int_a^x f - f(x)^2 \right) = f(x) h(x) \geq 0.$$

Donc g est croissante et, comme $g(a) = 0$, on a $g(b) \geq 0$, c'est-à-dire

$$\int_a^b f^3 \leq \left(\int_a^b f \right)^2.$$

Correction de l'exercice 1.48

1. Comme f est de classe C^1 et $f(a) = 0$, on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x f'(t) dt.$$

Les bornes étant dans le bon ordre ($a \leq x$), l'inégalité triangulaire donne

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt = F(x).$$

2. La fonction F est de classe C^1 sur $[a, b]$, avec $F' = |f'|$ et $F(a) = 0$. En utilisant la question précédente puis la croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \int_a^b F(x) |f'(x)| dx = \int_a^b F(x)F'(x) dx,$$

et cette dernière intégrale se calcule :

$$\int_a^b F(x)F'(x) dx = \left[\frac{F^2}{2} \right]_a^b = \frac{F(b)^2}{2}.$$

Il reste à majorer $F(b) = \int_a^b |f'|$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions continues 1 et $|f'|$ donne

$$F(b)^2 = \left(\int_a^b 1 \times |f'| \right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2 \right) \left(\int_a^b (f')^2 \right) = (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

En reportant :

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Correction de l'exercice 1.49

1. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, appliquée à f entre x et $x+a$ puis entre x et $x-a$, fournit deux réels c_1 et c_2 tels que

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(c_1), \\ f(x-a) &= f(x) - af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(c_2). \end{aligned}$$

En soustrayant, les termes en $f(x)$ disparaissent :

$$2af'(x) = f(x+a) - f(x-a) - \frac{a^2}{2} (f''(c_1) - f''(c_2)).$$

L'inégalité triangulaire donne alors $2a|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{a^2}{2} \times 2M_2$, d'où, en divisant par $2a > 0$:

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2} M_2 a.$$

2. Le majorant obtenu ne dépend pas de x : la fonction f' est donc bornée sur $\mathbb{R}$, et en passant à la borne supérieure,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad M_1 \leq \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2} M_2 a.$$

Il ne reste qu'à choisir le meilleur a .

Si $M_2 = 0$, faire tendre a vers $+\infty$ donne $M_1 \leq 0$, donc $M_1 = 0 = \sqrt{2M_0M_2}$.

Si $M_2 > 0$, alors $M_0 > 0$ (sinon f serait nulle, donc f'' aussi). La fonction $\varphi : a \mapsto \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2}M_2a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\varphi'(a) = -\frac{M_0}{a^2} + \frac{M_2}{2}$, qui s'annule en changeant de signe (négative puis positive) en $a_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. Le minimum de φ vaut donc

$$\varphi(a_0) = M_0 \sqrt{\frac{M_2}{2M_0}} + \frac{M_2}{2} \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} = \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} = \sqrt{2M_0 M_2}.$$

En prenant $a = a_0$ dans l'inégalité précédente, on conclut $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.

Correction de l'exercice 1.50

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$: elle y est bornée et atteint ses bornes. Posons

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \geq 0,$$

atteint en un point $x_0 \in [a, b]$, et notons $I_n = \left(\int_a^b f^n \right)^{1/n}$ (bien défini car $f^n \geq 0$).

Cas $M = 0$. Alors $0 \leq f \leq 0$, donc $f = 0$ et $I_n = 0 \rightarrow M$.

On suppose désormais $M > 0$.

Majoration. De $0 \leq f \leq M$ on tire $f^n \leq M^n$, donc

$$I_n \leq ((b-a)M^n)^{1/n} = M(b-a)^{1/n} \quad \text{et} \quad (b-a)^{1/n} = e^{\frac{\ln(b-a)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Minoration. Soit $\varepsilon \in]0, M[$. Par continuité de f en x_0 , il existe un segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, avec $\alpha < \beta$, sur lequel $f \geq M - \varepsilon$. Comme $f \geq 0$ sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f^n \geq \int_\alpha^\beta f^n \geq (\beta - \alpha)(M - \varepsilon)^n, \quad \text{donc} \quad I_n \geq (\beta - \alpha)^{1/n}(M - \varepsilon),$$

et $(\beta - \alpha)^{1/n} \rightarrow 1$.

Conclusion. Pour l' ε fixé ci-dessus et n assez grand, on a à la fois $M(b-a)^{1/n} \leq M + \varepsilon$ et $(\beta - \alpha)^{1/n}(M - \varepsilon) \geq M - 2\varepsilon$, donc $M - 2\varepsilon \leq I_n \leq M + \varepsilon$. Ceci valant pour tout $\varepsilon \in]0, M[$:

$$\left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Le point de méthode. La continuité est essentielle : c'est elle qui garantit que f reste proche de son maximum sur tout un segment $[\alpha, \beta]$ non réduit à un point, ce qui donne la minoration. Pour une fonction seulement positive et intégrable, le résultat tombe en défaut.

Correction de l'exercice 1.51

La fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ (soit $u(x) = \frac{x^3}{3}$) et $v(x) = \ln x$, donne sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}.$$

Correction de l'exercice 1.52

Primitive de $x^2 \cos x$. Deux intégrations par parties successives abaissent le degré :

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx,$$

et $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x$. D'où, sur $\mathbb{R}$:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

Primitive de $x^2 \sin x$. De même,

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x,$$

en utilisant $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x$.

Le point de méthode. On peut obtenir les deux résultats d'un seul coup en calculant

$$\int x^2 e^{ix} \, dx = (-ix^2 + 2x + 2i) e^{ix},$$

puis en prenant partie réelle et partie imaginaire.

Correction de l'exercice 1.53

Le dénominateur est scindé à racines simples : on décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

En multipliant par x puis en évaluant en 0 : $a = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $x+1$ et en évaluant en -1 : $b = \frac{1}{(-1) \times 1} = -1$; et en -2 : $c = \frac{1}{(-2) \times (-1)} = \frac{1}{2}$. Sur chacun des quatre intervalles $] -\infty, -2[$, $] -2, -1[$, $] -1, 0[$ et $] 0, +\infty[$, une primitive est donc

$$\frac{1}{2} \ln |x| - \ln |x+1| + \frac{1}{2} \ln |x+2| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|x(x+2)|}{(x+1)^2} \right).$$

Correction de l'exercice 1.54

Le numérateur est de degré 5 et le dénominateur $x^2(x^2+1) = x^4 + x^2$ de degré 4 : on commence donc par la division euclidienne. Comme $x^5 + x^3 - x + 1 = x(x^4 + x^2) + (1-x)$:

$$\frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = x + \frac{1-x}{x^2(x^2 + 1)}.$$

On décompose ensuite la fraction restante, dont le dénominateur a un pôle double en 0 et un facteur irréductible $x^2 + 1$:

$$\frac{1-x}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2 + 1}.$$

En multipliant par x^2 et en évaluant en 0 : $b = 1$. En multipliant par $x^2 + 1$ et en évaluant en i : $\frac{1-i}{i^2} = -1+i = ci+d$, donc $c = 1$ et $d = -1$. Enfin, l'identification du

coefficient de x^3 dans

$$1 - x = a x(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) + (cx + d)x^2$$

donne $0 = a + c$, soit $a = -1$.

Ainsi, sur $] -\infty, 0[$ comme sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1},$$

et une primitive est

$$\frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x.$$

Correction de l'exercice 1.55

On reconnaît au numérateur, à un facteur près, la dérivée de $x \mapsto x^5$:

$$\frac{x^4}{x^{10} + 1} = \frac{1}{5} \times \frac{5x^4}{(x^5)^2 + 1}.$$

Le changement de variable $u = x^5$ ramène donc à $\frac{1}{5} \int \frac{du}{u^2+1}$, et une primitive sur $\mathbb{R}$ tout entier est

$$\frac{1}{5} \arctan(x^5).$$

Correction de l'exercice 1.56

On passe par l'exponentielle complexe : $x e^x \cos x = \Re(x e^{(1+i)x})$. Une intégration par parties donne

$$\int x e^{(1+i)x} dx = \frac{x e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2} = e^{(1+i)x} \left(\frac{x(1-i)}{2} + \frac{i}{2} \right),$$

car $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ et $(1+i)^2 = 2i$, donc $\frac{1}{(1+i)^2} = -\frac{i}{2}$.

En écrivant $e^{(1+i)x} = e^x (\cos x + i \sin x)$ et $\frac{x(1-i)}{2} + \frac{i}{2} = \frac{x+i(1-x)}{2}$, la partie réelle vaut

$$\frac{e^x}{2} (x \cos x - (1-x) \sin x).$$

Une primitive de $x e^x \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\frac{e^x}{2} (x \cos x + (x-1) \sin x),$$

ce que l'on vérifie immédiatement en dérivant.

Correction de l'exercice 1.57

On linéarise. Avec $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$:

$$\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2 \cos(2x) + \cos^2(2x)}{4},$$

puis, en linéarisant à son tour $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$:

$$\cos^4 x = \frac{3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x)}{8}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}.$$

Correction de l'exercice 1.58

Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\sin x + \cos x \geq 1 > 0$: l'intégrale est bien définie. Plutôt que de calculer I directement, on l'associe à

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Somme. On a immédiatement

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Différence. On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \sin x + \cos x > 0$:

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = [\ln(\sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \sqrt{2} - \ln 1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

En soustrayant les deux relations :

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

Correction de l'exercice 1.59

Le cosinus apparaît à une puissance *impaire* : on peut donc isoler un facteur $\cos x$ et exprimer tout le reste à l'aide de $\sin x$, ce qui invite au changement de variable $u = \sin x$.

On écrit donc

$$\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x,$$

de sorte qu'avec $u = \sin x$ et $du = \cos x dx$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - u^2}{u^2} du = \int \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) du = -\frac{1}{u} - u.$$

Une primitive est donc

$$-\frac{1}{\sin x} - \sin x,$$

sur chacun des intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, où le sinus ne s'annule pas.

Correction de l'exercice 1.60

1. La fonction est définie et continue sur $]0, e^{-4}[$ et sur $]e^{-4}, +\infty[$. Le quotient $\frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}$ ressemble à la dérivée d'un quotient dont le dénominateur est $4 + \ln x$;

on vérifie que

$$\left(\frac{x}{4 + \ln x}\right)' = \frac{(4 + \ln x) - x \times \frac{1}{x}}{(4 + \ln x)^2} = \frac{3 + \ln x}{(4 + \ln x)^2}.$$

Une primitive est donc $\frac{x}{4 + \ln x}$, sur chacun des deux intervalles.

2. Posons $u(x) = \ln(\exp(x) + 1)$. Comme $\exp(x) + 1 > 1$, on a $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, et

$$u'(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + 1},$$

de sorte que la fonction proposée est exactement $\frac{u'}{u}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\ln(\ln(\exp(x) + 1)).$$

3. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose $t = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, c'est-à-dire $x = (t^2 - 1)^2$ avec $t \geq 1$; ce changement de variable est de classe C^1 et $dx = 4t(t^2 - 1)dt$, d'où

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx = \int 4t^2(t^2 - 1) dt = \frac{4t^5}{5} - \frac{4t^3}{3}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}_+$ est donc

$$\frac{4}{5} (1 + \sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3} (1 + \sqrt{x})^{3/2}.$$

Correction de l'exercice 1.61

Première primitive. La fonction $x \mapsto \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}$ est définie et continue sur $[0, 1[$.

On pose $x = \sin^2 u$, changement de variable de classe C^1 qui réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, 1[$. Alors $dx = 2 \sin u \cos u du$, $\arcsin \sqrt{x} = u$ et $(1-x)^{3/2} = (\cos^2 u)^{3/2} = \cos^3 u$ (car $\cos u > 0$), d'où

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}} dx = \int \frac{2u \sin u}{\cos^2 u} du.$$

Une intégration par parties, en remarquant que $\frac{\sin u}{\cos^2 u}$ est la dérivée de $\frac{1}{\cos u}$, donne

$$\int \frac{2u \sin u}{\cos^2 u} du = \frac{2u}{\cos u} - 2 \int \frac{du}{\cos u}.$$

Or, en écrivant $\frac{1}{\cos u} = \frac{\cos u}{1 - \sin^2 u}$ et en posant $s = \sin u$:

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right) = \ln \left(\frac{1 + \sin u}{\cos u} \right).$$

En revenant à la variable x , avec $\sin u = \sqrt{x}$ et $\cos u = \sqrt{1-x}$, une primitive sur $[0, 1[$ est

$$\frac{2 \arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - 2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \right) = \frac{2 \arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + \ln(1-x).$$

Seconde primitive. La fonction $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Une intégration par parties avec $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ (soit $u(x) = -\frac{1}{x}$) et $v(x) = \arctan x$ donne

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

Comme $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$, une primitive sur $] -\infty, 0[$ comme sur $]0, +\infty[$ est

$$-\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = -\frac{\arctan x}{x} + \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Correction de l'exercice 1.62

On utilise le changement de variable « universel » $t = \tan \frac{x}{2}$, qui ramène toute fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$ à une fraction rationnelle en t . C'est une bijection de classe C^1 de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$. Avec $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$:

$$3 + \cos x = \frac{3(1+t^2) + 1 - t^2}{1+t^2} = \frac{2(t^2+2)}{1+t^2},$$

donc

$$I = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2(t^2+2)} \times \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_0^1.$$

Finalement

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.63

La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puisque $3 + \operatorname{ch} x \geq 3 + 1 = 4 > 0$.

On pose $u = \exp(x)$, changement de variable de classe C^1 et strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $dx = \frac{du}{u}$. Comme

$$3 + \operatorname{ch} x = 3 + \frac{u + u^{-1}}{2} = \frac{u^2 + 6u + 1}{2u},$$

il vient

$$\int \frac{dx}{3 + \operatorname{ch} x} = \int \frac{2u}{u^2 + 6u + 1} \times \frac{du}{u} = \int \frac{2 du}{(u+3)^2 - 8}.$$

Le trinôme $u^2 + 6u + 1$ a pour racines $-3 \pm 2\sqrt{2}$, toutes deux strictement négatives : il ne s'annule donc pas pour $u > 0$. En utilisant $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v-a}{v+a} \right|$ avec $a = 2\sqrt{2}$, on obtient une primitive sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\exp(x) + 3 - 2\sqrt{2}}{\exp(x) + 3 + 2\sqrt{2}} \right).$$

Correction de l'exercice 1.64

La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, qui contient le segment d'extrémités $\frac{1}{a}$ et a : l'intégrale $I(a)$ est bien définie.

Les deux bornes étant inverses l'une de l'autre, on effectue le changement de variable

$x = \frac{1}{t}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $dx = -\frac{dt}{t^2}$; lorsque x va de $\frac{1}{a}$ à a , t va de a à $\frac{1}{a}$. Alors

$$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{-\ln t}{1 + \frac{1}{t^2}} \times \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = - \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = -I(a).$$

Donc $2I(a) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad I(a) = 0.$$

Le point de méthode. Des bornes inverses l'une de l'autre appellent $x \mapsto \frac{1}{x}$; le logarithme, qui change alors de signe, fait apparaître $I(a) = -I(a)$ sans qu'aucune primitive n'ait été calculée.

Correction de l'exercice 1.65

Calcul de I . Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $\tan x \in [0, 1]$, donc $1 + \tan x > 0$: l'intégrale est bien définie. On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{4} - t$, qui échange les bornes. Comme

$$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} = \frac{2}{1 + \tan t},$$

il vient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I,$$

d'où

$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Calcul de J . Le changement de variable $x = \tan u$ est une bijection de classe C^1 de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0, 1]$, avec $dx = (1 + \tan^2 u) du$ et $1 + x^2 = 1 + \tan^2 u$. Le facteur $1 + \tan^2 u$ se simplifie et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan u) du = I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Calcul de K . Une intégration par parties, avec $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ (soit $u(x) = \ln(1+x)$) et $v(x) = \arctan x$, donne

$$K = [\arctan(x) \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln 2 - J.$$

Finalement

$$K = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{\pi}{8} \ln 2 = \frac{\pi}{8} \ln 2 :$$

les trois intégrales sont égales.

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Équations du premier ordre

Définition 1.43 (Équation différentielle linéaire du premier ordre)

Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* est une équation de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I . L'équation est dite *homogène* si $b = 0$.

Théorème 1.44 (Solutions de l'équation homogène du premier ordre)

Les solutions C^1 sur I de $y' + a(t)y = 0$, avec I un intervalle et $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue, sont les fonctions

$$y(t) = C e^{-A(t)}, \quad C \in \mathbb{K},$$

où A est une primitive de a sur I .

Démonstration

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ supposée C^1 .

Comme $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, il existe A une primitive de a sur I . Posons :

$$g(t) = y(t)e^{A(t)}.$$

Par composition et produit, g est C^1 sur I . Calculons pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = y'(t)e^{A(t)} + y(t)a(t)e^{A(t)}.$$

Ainsi, on a l'équivalence suivante :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, y'(t)e^{A(t)} + a(t)y(t)e^{A(t)} = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, g'(t) = 0.$$

Et donc y est solution de l'équation différentielle si et seulement si g est constante sur l'intervalle I .

Or g est constante sur I peut aussi s'écrire : il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I, y(t)e^{A(t)} = C$. Donc y est solution de l'équation différentielle si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$y(t) = C e^{-A(t)}.$$

□

Exemple 1.45

Les solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto C \exp(-t)$.

Les solutions C^1 sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $y' + \tan(t)y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto C \exp(-\ln(\cos(t))) \text{ c'est-à-dire } y : t \mapsto \frac{C}{\cos(t)}.$$

Remarque

Si y est dérivable sur I et si y vérifie $y' + a(t)y = 0$ alors y est C^1 . En effet, on a alors :

$$y' = -a(t)y$$

et $t \mapsto -a(t)y(t)$ est continue par produit.

Ainsi, le théorème précédent donne en fait l'ensemble des solutions *dérivables* de l'équation différentielle.

Remarque

Lorsque l'on résout une équation différentielle (en fait lorsque l'on résout n'importe quelle équation), il est important de bien définir dans quel ensemble on se place. Cela a deux rôles principaux. D'abord, cela donne un sens à l'équation elle-même. Dans notre contexte par exemple, que signifie y' ? Pour y une fonction *dérivable*, y' désigne sa fonction dérivée. On ne peut même pas donner de sens à l'équation sans ce contexte.

Et cela permet aussi de savoir quelles sont les opérations autorisées *pour la résolution*. Si je suppose y dérivable, je ne peux pas, *a priori*, dériver y' et parler de y'' .

Cela peut changer la résolution. Regardons par exemple la simple équation $x^2 + 1 = 0$. Si on la résout dans $\mathbb{R}$, comme on manipule des réels, on peut utiliser des inégalités. On arrive rapidement à montrer que $x^2 + 1 > 0$ et donc l'équation n'a pas de solution. Mais si on travaille dans $\mathbb{C}$, deux choses se passent. D'une part, *il n'y a pas de notions de positif ou négatif dans $\mathbb{C}$* . D'autre part, il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$. On peut donc par exemple écrire :

$$x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$

Et on en déduit qu'il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$.

C'est pareil pour les équations différentielles : on précise bien dans quel ensemble de fonctions on travaille. Ce sera particulièrement important lorsqu'on utilisera des séries entières pour résoudre les équations différentielles.

Méthode 1.46 (Variation de la constante)

Pour résoudre $y' + a(t)y = b(t)$:

1. Résoudre l'équation homogène : $y_h(t) = C e^{-A(t)}$.
2. Chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = C(t) e^{-A(t)}$.
3. En substituant dans l'équation, on obtient $C'(t) = b(t) e^{A(t)}$.
4. La solution générale est $y = y_h + y_p$.

Exemple 1.47

Commençons par un exemple simple. Essayons de résoudre $y' + y = \exp(-t)$.

1. $y' + y = 0$ a pour solutions (C^1 sur $\mathbb{R}$) les fonctions de la forme $y : t \mapsto C \exp(-t)$.

2. Posons $y_p(t) = C(t) \exp(-t)$ avec $C \in C^1$ sur $\mathbb{R}$.
 3. y_p est C^1 par produit. y_p est solution si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_p'(t) + y_p(t) = \exp(-t).$$

Cela revient à dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) \exp(-t) - C(t) \exp(-t) + C(t) \exp(-t) = \exp(-t)$$

qui se simplifie en :

$$\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = 1.$$

Une primitive de $t \mapsto 1$ est $t \mapsto t$. Ainsi $y_p : t \mapsto t \exp(-t)$ est solution particulière.

4. Ainsi l'ensemble des solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = \exp(-t)$ sont les fonctions de la forme : $y : t \mapsto C \exp(-t) + t \exp(-t)$.

Remarque

L'idée de la variation de la constante peut se formuler de plusieurs façons. La première façon de le comprendre est de voir que $y' + a(t)y$ ressemble fortement à la dérivée d'un produit. En fait, c'est la dérivée d'un produit à un facteur près. La forme que l'on propose est donc adaptée pour isoler le bon terme. La seconde manière est de se dire que l'on sait résoudre $y' + a(t)y = 0$ et donc, vraisemblablement, on sait *simplifier* cette écriture en utilisant la solution. Cela est en fait relativement généralisable : on peut souvent trouver des solutions d'une équation différentielle en déformant une solution connue. Voir par exemple l'exercice 1.90.

Exemple 1.48

Prenons un deuxième exemple sensiblement plus compliqué. Cherchons les solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ de :

$$y' - ty = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Commençons par trouver l'ensemble des fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $y' - ty = 0$. Une primitive de $t \mapsto -t$ est $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$. Donc ce sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto C \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Maintenant, on pose donc $y_p(t) = C(t) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ avec $C \in C^1$ sur $\mathbb{R}$. y_p est solution de l'équation différentielle (non-homogène) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_p'(t) - ty_p(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + C(t)t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - tC(t) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = \exp(t^2).$$

Une primitive est donnée par : $t \mapsto \int_0^t \exp(s^2) \, ds$.

Ainsi une solution particulière de l'équation différentielle est :

$$t \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_0^t \exp(s^2) \, ds$$

et donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto C \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_0^t \exp(s^2) \, ds.$$

Remarque

Cet exemple illustre un point : il est tout à fait possible de ne pas avoir de forme simple après une variation de la constante. Pire, il est possible que la forme simple existe mais qu'elle ne se voit pas immédiatement à cause de l'intégrale.

Cela souligne un point important : la variation de la constante est à connaître mais c'est notre *dernière* arme. S'il est possible de trouver une solution particulière sans passer par une variation de la constante, c'est souvent mieux.

En général, on peut commencer par chercher une solution de la même forme que le second membre et ne chercher des choses plus compliquées qu'en deuxième recours.

Théorème 1.49 (Théorème de Cauchy linéaire d'ordre 1)

Soient I un intervalle, $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution C^1 sur I .

Démonstration

Comme a est continue sur l'intervalle I , elle y admet une primitive, et même exactement une qui s'annule en t_0 : c'est $A : t \mapsto \int_{t_0}^t a(s) \, ds$. Posons également $\varphi : t \mapsto b(t)e^{A(t)}$, qui est continue sur I .

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 et posons, comme pour l'équation homogène, $g(t) = y(t)e^{A(t)}$; la fonction g est C^1 sur I et $g'(t) = (y'(t) + a(t)y(t))e^{A(t)}$. Comme $e^{A(t)}$ ne s'annule pas, on obtient l'équivalence :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \iff \forall t \in I, g'(t) = \varphi(t),$$

c'est-à-dire : y est solution de l'équation si et seulement si g est une primitive de φ sur I . Or φ est continue sur l'intervalle I : elle y admet des primitives, et deux d'entre elles diffèrent d'une constante. Ainsi y est solution si et seulement si il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall t \in I, g(t) = C + \int_{t_0}^t \varphi(s) \, ds.$$

Il reste à traduire la condition initiale. Comme $A(t_0) = 0$, on a $y(t_0) = g(t_0) = C$: la condition $y(t_0) = y_0$ équivaut donc à $C = y_0$. Il y a une et une seule valeur possible de C , donc une et une

seule solution au problème de Cauchy, à savoir :

$$y : t \mapsto e^{-A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(s) e^{A(s)} ds \right).$$

□

Remarque

La démonstration n'est rien d'autre qu'une variation de la constante menée jusqu'au bout : la « constante » C de la solution homogène devient la fonction $t \mapsto C + \int_{t_0}^t \varphi$, et la condition initiale fixe C .

Deux points méritent d'être soulignés. D'abord, la solution est définie *sur I tout entier* : il n'y a ni explosion ni obstruction en cours de route, quel que soit l'intervalle I sur lequel a et b sont continues. Ensuite, l'équation doit être sous *forme résolue*, c'est-à-dire que le coefficient de y' doit valoir 1. L'équation $t y' - y = 0$, par exemple, n'est pas sous cette forme sur un intervalle contenant 0 : on vérifie sans peine que $t \mapsto \lambda t$ en est solution sur $\mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si bien que le problème de Cauchy en $t_0 = 0$ avec $y(0) = 0$ a une infinité de solutions, et celui avec $y(0) = 1$ n'en a aucune.

Exemple 1.50

Résolvons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = e^{-t}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Ici $a : t \mapsto 1$ et $b : t \mapsto e^{-t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$: le théorème garantit l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$ avant même tout calcul.

Nous avons déjà déterminé les solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = e^{-t}$: ce sont les fonctions $y : t \mapsto (C + t)e^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. La condition initiale s'écrit $y(0) = C = 2$: une seule valeur de C convient, conformément au théorème. L'unique solution est donc :

$$y : t \mapsto (2 + t) e^{-t}.$$

Exemple 1.51 (Sans linéarité, tout peut arriver)

Le théorème précédent repose de façon essentielle sur la linéarité de l'équation. Voici deux équations différentielles *non linéaires* qui montrent que ses deux conclusions — l'existence sur I tout entier et l'unicité — peuvent chacune tomber en défaut.

L'unicité peut échouer. Considérons le problème de Cauchy :

$$y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}, \quad y(0) = 0.$$

La fonction nulle en est évidemment solution sur $\mathbb{R}$. Mais pour tout $c \geq 0$, posons :

$$y_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c, \\ (t - c)^2 & \text{si } t \geq c. \end{cases}$$

Les deux expressions coïncident en $t = c$ (elles y valent 0) et leurs dérivées aussi (elles y valent 0), donc y_c est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $y'_c(t) = 0$ pour $t \leq c$ et $y'_c(t) = 2(t - c)$ pour $t \geq c$. Comme $2\sqrt{|y_c(t)|} = 2|t - c| = 2(t - c)$ pour $t \geq c$, la fonction y_c est bien

solution, et $y_c(0) = 0$. Le problème de Cauchy admet donc une *infinité* de solutions sur $\mathbb{R}$.

L'existence globale peut échouer. Considérons cette fois :

$$y'(t) = 1 + y(t)^2, \quad y(0) = 0.$$

Soit J un intervalle contenant 0 et y une solution dérivable sur J . Comme $1 + y^2$ ne s'annule pas, on peut écrire pour tout $t \in J$:

$$\frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\arctan \circ y)'(t) = 1.$$

En intégrant entre 0 et t et en utilisant $y(0) = 0$, il vient $\arctan(y(t)) = t$ pour tout $t \in J$. Or $\arctan$ est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: nécessairement $J \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Aucune solution n'est donc définie sur $\mathbb{R}$, et l'unique solution sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $y : t \mapsto \tan t$, qui « explose » aux deux bords.

Remarque

Ces deux phénomènes sont typiques du cas non linéaire : on n'y dispose en général que d'un énoncé *local* (une solution existe au voisinage de t_0), et l'unicité demande une hypothèse supplémentaire sur la fonction, plus forte que la continuité. Ce cadre général n'est pas au programme.

2. Équations du second ordre

Définition 1.52 (Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants)

Une *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue sur un intervalle I .

Définition 1.53 (Équation caractéristique)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. L'*équation caractéristique* associée à l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{C}$:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Son *discriminant* est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 1.54 (Cas des coefficients complexes, solutions complexes)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et I un intervalle. Les solutions C^2 de I dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont :

- si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C};$$

- si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{C}$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Démonstration

L'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet au moins une racine $r_1 \in \mathbb{C}$ (si $\Delta \neq 0$, il y en a deux; si $\Delta = 0$, il y en a une).

Soit maintenant $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ que l'on suppose C^2 sur I et posons :

$$g(t) = y(t)e^{-r_1 t}, \quad \text{de sorte que} \quad y(t) = g(t)e^{r_1 t}.$$

Comme $t \mapsto e^{-r_1 t}$ est C^∞ , la fonction g est C^2 . Calculons, pour tout $t \in I$:

$$y'(t) = (g'(t) + r_1 g(t)) e^{r_1 t} \quad \text{puis} \quad y''(t) = (g''(t) + 2r_1 g'(t) + r_1^2 g(t)) e^{r_1 t}.$$

En reportant dans l'équation, il vient :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{r_1 t} \left(ag''(t) + (2ar_1 + b)g'(t) + \underbrace{(ar_1^2 + br_1 + c)}_{=0} g(t) \right)$$

car r_1 est racine de l'équation caractéristique. De plus $2ar_1 + b = a(2r_1 - (r_1 + r_2)) = a(r_1 - r_2)$ où r_2 est la seconde racine de l'équation caractéristique (on a $r_1 = r_2$ si $\Delta = 0$), puisque $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$. Ainsi :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = a e^{r_1 t} (g''(t) + (r_1 - r_2)g'(t)).$$

Comme $a \neq 0$ et $e^{r_1 t} \neq 0$, on obtient l'équivalence :

$$\forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \iff \forall t \in I, g''(t) + (r_1 - r_2)g'(t) = 0.$$

Posons $h = g'$, qui est C^1 sur I . La condition de droite s'écrit $h' + (r_1 - r_2)h = 0$: c'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, dont une primitive du coefficient constant $r_1 - r_2$ est $t \mapsto (r_1 - r_2)t$. D'après le théorème sur l'équation homogène du premier ordre, cela équivaut à l'existence de $K \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in I, g'(t) = K e^{(r_2 - r_1)t}.$$

Distinguons alors les deux cas.

- Si $\Delta \neq 0$, alors $r_2 - r_1 \neq 0$ et une primitive de $t \mapsto K e^{(r_2 - r_1)t}$ est $t \mapsto \frac{K}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t}$. Ainsi g' est de la forme ci-dessus si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in I, g(t) = \frac{K}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t} + \lambda.$$

En posant $\mu = \frac{K}{r_2 - r_1}$, qui décrit $\mathbb{C}$ lorsque K décrit $\mathbb{C}$, et en multipliant par $e^{r_1 t}$:

$$\forall t \in I, y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ (car $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$) et la condition devient $g' = K$ sur I , c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in I, g(t) = \lambda + Kt$. En multipliant par $e^{r_1 t}$ et en posant $\mu = K$:

$$\forall t \in I, y(t) = (\lambda + \mu t) e^{r_1 t}.$$

Toutes les étapes étant des équivalences, on a bien décrit exactement l'ensemble des solutions.

□

Proposition 1.55 (Cas des coefficients réels, solutions réelles)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et I un intervalle. Les solutions C^2 de I dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont :

- si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

- si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

- si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$ (avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$) et les solutions sont les

$$y : t \mapsto e^{\alpha t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Démonstration

Une solution à valeurs réelles est en particulier une solution à valeurs complexes. La proposition précédente en donne donc la forme, et il ne reste qu'à déterminer *lesquelles* de ces solutions sont à valeurs réelles. Pour cela, on utilise à chaque fois le critère : y est à valeurs réelles si et seulement si $\overline{y(t)} = y(t)$ pour tout $t \in I$.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant. Soient $r \neq r'$ deux nombres complexes et $A, B \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall t \in I, A e^{rt} + B e^{r't} = 0.$$

Alors $A = B = 0$. En effet, en divisant par $e^{r't}$ qui ne s'annule pas, on obtient $A + B e^{(r'-r)t} = 0$ pour tout $t \in I$; en dérivant, $B(r' - r) e^{(r'-r)t} = 0$, donc $B = 0$ puisque $r' \neq r$, puis $A = 0$.

Cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$. Les racines sont alors réelles, et l'argument est le même dans les deux cas. Si $\Delta > 0$, les solutions complexes s'écrivent $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Comme r_1 et r_2 sont réels, $\overline{y(t)} = \bar{\lambda} e^{r_1 t} + \bar{\mu} e^{r_2 t}$, et y est à valeurs réelles si et seulement si :

$$\forall t \in I, (\lambda - \bar{\lambda}) e^{r_1 t} + (\mu - \bar{\mu}) e^{r_2 t} = 0,$$

ce qui, d'après le lemme, équivaut à $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\mu = \bar{\mu}$, c'est-à-dire à $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\Delta = 0$, on obtient de même $((\lambda - \bar{\lambda}) + (\mu - \bar{\mu})t) e^{r_0 t} = 0$ sur I , donc la fonction affine $t \mapsto (\lambda - \bar{\lambda}) + (\mu - \bar{\mu})t$ est nulle sur l'intervalle I et ses deux coefficients sont nuls : là encore $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Cas $\Delta < 0$. Comme a, b et c sont réels, les deux racines de l'équation caractéristique sont conjuguées et non réelles : notons-les $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$, avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ et $\omega \neq 0$. D'après la proposition précédente, les solutions C^2 de I dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\omega)t} + \mu e^{(\alpha-i\omega)t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Soit y une telle fonction. Comme α, ω et t sont réels, on a $\overline{e^{(\alpha+i\omega)t}} = e^{(\alpha-i\omega)t}$ et donc :

$$\overline{y(t)} = \bar{\lambda} e^{(\alpha-i\omega)t} + \bar{\mu} e^{(\alpha+i\omega)t}.$$

Ainsi y est à valeurs réelles si et seulement si :

$$\forall t \in I, (\lambda - \bar{\mu}) e^{(\alpha+i\omega)t} + (\mu - \bar{\lambda}) e^{(\alpha-i\omega)t} = 0.$$

Comme $\omega \neq 0$, les deux exposants $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ sont distincts, et le lemme donne $\lambda = \bar{\mu}$, c'est-à-dire $\mu = \bar{\lambda}$. Les solutions à valeurs réelles sont donc exactement les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\omega)t} + \bar{\lambda} e^{(\alpha-i\omega)t} = 2\Re \left(\lambda e^{(\alpha+i\omega)t} \right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Il reste à retrouver la forme annoncée. Écrivons $\lambda = \frac{1}{2}(p - iq)$ avec $p, q \in \mathbb{R}$: cette écriture est unique et (p, q) décrit $\mathbb{R}^2$ lorsque λ décrit $\mathbb{C}$. Comme $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, il vient :

$$2\Re\left(\lambda e^{(\alpha+i\omega)t}\right) = e^{\alpha t} \Re\left((p - iq)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\right) = e^{\alpha t} (p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)).$$

Les solutions à valeurs réelles sont donc bien les fonctions $t \mapsto e^{\alpha t} (p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t))$ avec $p, q \in \mathbb{R}$. $\square$

Remarque

Lorsque a, b et c sont réels, les deux propositions s'appliquent : la première décrit les solutions à valeurs complexes, la seconde les solutions à valeurs réelles. Il faut donc, ici encore, préciser dans quel ensemble de fonctions on cherche les solutions. En revanche, si l'un des coefficients n'est pas réel, la question des solutions réelles ne se pose plus : seule la première proposition a un sens.

Exemple 1.56

Réolvons $y'' - 3y' + 2y = 0$. Ici $a = 1, b = -3$ et $c = 2$ sont réels, et $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Mais on peut aussi chercher les solutions à valeurs complexes : ce sont les fonctions de la même forme, cette fois avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Les solutions réelles sont exactement celles pour lesquelles λ et μ sont réels.

Exemple 1.57

Réolvons $y'' + 2y' + 5y = 0$. Ici $a = 1, b = 2$ et $c = 5$ sont réels, et $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Les racines de $r^2 + 2r + 5 = 0$ sont $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto e^{-t} (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ sont, elles, les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda e^{(-1+2i)t} + \mu e^{(-1-2i)t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les deux ensembles sont bien différents : le premier est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de fonctions à valeurs réelles, le second un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de fonctions à valeurs complexes.

Exemple 1.58

Réolvons $y'' - (1 + i)y' + iy = 0$. Ici $a = 1, b = -(1 + i)$ et $c = i$ ne sont pas tous réels : on cherche donc les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Le discriminant vaut :

$$\Delta = (1 + i)^2 - 4i = 1 + 2i - 1 - 4i = -2i \neq 0.$$

Comme $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$, le nombre $1 - i$ est une racine carrée de Δ , et les

racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{(1+i) + (1-i)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{(1+i) - (1-i)}{2} = i.$$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{it}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Remarque

Lorsque a , b et c sont réels et que $\Delta < 0$, les deux écritures des solutions complexes coïncident. En effet, si les racines sont $\alpha \pm i\omega$, les formules d'Euler donnent :

$$e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \quad \text{et} \quad e^{(\alpha-i\omega)t} = e^{\alpha t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))$$

et réciproquement :

$$e^{\alpha t} \cos(\omega t) = \frac{e^{(\alpha+i\omega)t} + e^{(\alpha-i\omega)t}}{2} \quad \text{et} \quad e^{\alpha t} \sin(\omega t) = \frac{e^{(\alpha+i\omega)t} - e^{(\alpha-i\omega)t}}{2i}.$$

Autrement dit, les familles $(e^{(\alpha+i\omega)t}, e^{(\alpha-i\omega)t})$ et $(e^{\alpha t} \cos(\omega t), e^{\alpha t} \sin(\omega t))$ engendrent le même $\mathbb{C}$ -espace vectoriel : les solutions complexes peuvent aussi s'écrire

$$y : t \mapsto e^{\alpha t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

On retrouve alors les solutions réelles en imposant $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Méthode 1.59 (Recherche d'une solution particulière)

Pour trouver une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f(t)$:

- Si $f(t) = P(t) e^{\gamma t}$ avec P polynôme de degré d : chercher $y_p(t) = t^s Q(t) e^{\gamma t}$ où Q est un polynôme de degré d et s est la multiplicité de γ comme racine de l'équation caractéristique.
- Si $f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$: chercher $y_p(t) = \gamma \cos(\omega t) + \delta \sin(\omega t)$, sauf si $i\omega$ est racine caractéristique (résonance), auquel cas on cherche $y_p(t) = t(\gamma \cos(\omega t) + \delta \sin(\omega t))$.

La solution générale est la somme de la solution générale homogène et d'une solution particulière.

Exemple 1.60

Commençons par le cas le plus simple. Résolvons $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation homogène associée a déjà été résolue plus haut : ses solutions réelles sont les $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les racines caractéristiques étant 1 et 2.

Le second membre est de la forme $P(t)e^{\gamma t}$ avec $P = 1$ (de degré 0) et $\gamma = 3$. Comme 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, sa multiplicité est $s = 0$: on cherche donc $y_p(t) = Ce^{3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$y_p''(t) - 3y_p'(t) + 2y_p(t) = (9 - 9 + 2) Ce^{3t} = 2Ce^{3t},$$

qui vaut e^{3t} si et seulement si $C = \frac{1}{2}$. Ainsi $y_p : t \mapsto \frac{1}{2}e^{3t}$ est une solution particulière,

et les solutions réelles de l'équation sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.61

Passons à un cas nettement plus délicat : résolvons $y'' - 2y' + y = t e^t$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$: elle a 1 pour racine double. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Le second membre est de la forme $P(t)e^{\gamma t}$ avec $P(t) = t$ de degré 1 et $\gamma = 1$. Cette fois γ est racine *double*, donc $s = 2$: on cherche $y_p(t) = t^2 Q(t)e^t$ avec Q de degré 1, c'est-à-dire $y_p(t) = u(t)e^t$ où $u(t) = at^3 + bt^2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Pour toute fonction u deux fois dérivable, on a $(ue^t)' = (u' + u)e^t$ et $(ue^t)'' = (u'' + 2u' + u)e^t$, donc :

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = ((u'' + 2u' + u) - 2(u' + u) + u)e^t = u'' e^t.$$

C'est précisément parce que 1 est racine double que les termes en u et en u' disparaissent. L'équation se ramène donc à $u''(t) = t$, c'est-à-dire $6at + 2b = t$, soit $a = \frac{1}{6}$ et $b = 0$.

Une solution particulière est donc $y_p : t \mapsto \frac{t^3}{6} e^t$, et les solutions réelles de l'équation sont les fonctions :

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t + \frac{t^3}{6} e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.62

Terminons par un exemple relevant du second point, dans son cas d'exception. Résolvons $y'' + y = \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour racines i et $-i$: on est dans le cas $\Delta < 0$ avec $\alpha = 0$ et $\omega = 1$, et les solutions réelles de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Le second membre est de la forme $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec $\omega = 1$. Or $i\omega = i$ est racine de l'équation caractéristique : il faut donc chercher une solution particulière de la forme $y_p(t) = t(\gamma \cos(t) + \delta \sin(t))$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. En effet, une fonction de la forme $\gamma \cos(t) + \delta \sin(t)$ est solution de l'équation homogène et ne peut donc pas convenir.

Calculons :

$$y_p'(t) = \gamma \cos(t) + \delta \sin(t) + t(-\gamma \sin(t) + \delta \cos(t)),$$

$$y_p''(t) = 2(-\gamma \sin(t) + \delta \cos(t)) + t(-\gamma \cos(t) - \delta \sin(t)),$$

et les termes en t se simplifient dans la somme :

$$y_p''(t) + y_p(t) = -2\gamma \sin(t) + 2\delta \cos(t).$$

Cela vaut $\cos(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p : t \mapsto \frac{t}{2} \sin(t)$, et les solutions réelles sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \frac{t}{2} \sin(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On observe que toutes les solutions sont non bornées : c'est le phénomène de résonance, l'amplitude croissant linéairement en t .

Théorème 1.63 (Théorème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution C^2 sur I .

Démonstration

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons r_1 et r_2 les racines complexes de l'équation caractéristique (confondues si $\Delta = 0$). Soit $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 et posons $g(t) = y(t)e^{-r_1 t}$: comme $t \mapsto e^{-r_1 t}$ est C^∞ et ne s'annule pas, se donner y ou se donner g revient au même, et g est C^2 sur I . Le calcul mené dans la démonstration de la proposition sur l'équation homogène donne :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = a e^{r_1 t} (g''(t) + (r_1 - r_2)g'(t)).$$

En posant $\varphi : t \mapsto \frac{1}{a}f(t)e^{-r_1 t}$, qui est continue sur I , l'équation équivaut donc à :

$$\forall t \in I, g''(t) + (r_1 - r_2)g'(t) = \varphi(t).$$

Par ailleurs $y = g e^{r_1 t}$ et $y' = (g' + r_1 g) e^{r_1 t}$, de sorte que les conditions initiales se traduisent exactement en :

$$g(t_0) = y_0 e^{-r_1 t_0} \quad \text{et} \quad g'(t_0) = (y_1 - r_1 y_0) e^{-r_1 t_0}.$$

Posons enfin $h = g'$, qui est C^1 sur I . Le problème de Cauchy en y équivaut donc à la conjonction des deux problèmes :

$$\begin{cases} h' + (r_1 - r_2)h = \varphi, \\ h(t_0) = (y_1 - r_1 y_0) e^{-r_1 t_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g' = h, \\ g(t_0) = y_0 e^{-r_1 t_0}. \end{cases}$$

Le premier est un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1, dont le coefficient (la constante $r_1 - r_2$) et le second membre φ sont continus sur I : d'après le théorème précédent, il admet une unique solution h , de classe C^1 sur I . Cette fonction h étant continue sur l'intervalle I , elle y admet une unique primitive g valant $y_0 e^{-r_1 t_0}$ en t_0 , et cette primitive est C^2 puisque $g' = h$ est C^1 . Il y a donc une et une seule fonction $y = g e^{r_1 t}$ convenable, et elle est C^2 sur I .

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supposons maintenant a, b, c, f, y_0 et y_1 réels. D'après ce qui précède, le problème admet une unique solution y à valeurs complexes. Comme la conjugaison commute à la dérivation et que les coefficients et le second membre sont réels, $\bar{y}$ est encore C^2 sur I et vérifie $a\bar{y}'' + b\bar{y}' + c\bar{y} = \bar{f} = f$, ainsi que $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 = y_0$ et $\bar{y}'(t_0) = \bar{y}_1 = y_1$: c'est donc une solution du même problème de Cauchy. Par unicité, $\bar{y} = y$, autrement dit y est à valeurs réelles. C'est bien l'unique solution réelle, puisqu'une solution réelle est en particulier une solution complexe. $\square$

Exemple 1.64

Résolvons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Le second membre est continu sur $\mathbb{R}$: le théorème garantit l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$.

Nous avons déjà déterminé les solutions réelles de l'équation : ce sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors $y'(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{2t} + \frac{3}{2}e^{3t}$, et les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \frac{1}{2} = 0, \\ \lambda + 2\mu + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

C'est un système linéaire de deux équations à deux inconnues, de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$: il admet bien une unique solution, comme annoncé. En soustrayant la première ligne à la seconde, on obtient $\mu + 1 = 0$, d'où $\mu = -1$ puis $\lambda = \frac{1}{2}$. L'unique solution du problème de Cauchy est donc :

$$y : t \mapsto \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Remarque

Le théorème contient aussi une information de structure. Prenons $f = 0$ et notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur I . Le théorème dit exactement que l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ y &\longmapsto (y(t_0), y'(t_0)) \end{aligned}$$

est bijective : tout couple de conditions initiales est atteint (existence) et une seule fois (unicité). Comme elle est de plus linéaire, $\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2. C'est ce que confirment les formules explicites obtenues plus haut : deux constantes λ et μ , donc deux degrés de liberté, donc deux conditions initiales à imposer.

Remarque (Ce qui se passe si les coefficients ne sont pas constants)

Le théorème s'étend, et nous l'admettons, à une équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$ où p, q et f sont continues sur I : là encore, il y a une unique solution sur I tout entier pour chaque couple de conditions initiales. Le point crucial est que l'équation soit sous *forme résolue*, c'est-à-dire que le coefficient de y'' vaille 1. Ce résultat est hors-programme. Cependant, certains sujets (écrits ou à l'oral) l'utilisent, il est donc bon de le connaître.

Dès que ce coefficient s'annule, tout peut changer : voir l'exercice 1.90 pour le traitement d'un tel exemple.

EXERCICES — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
Exercice 1.66 ○ _____

Résoudre l'équation différentielle

$$y' + 2y = 3e^{-t}$$

sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.**Exercice 1.67** ● _____

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = e^t$$

sur $\mathbb{R}$.**Exercice 1.68** ● _____

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(t)$$

sur $\mathbb{R}$. On identifiera le phénomène de résonance.**Exercice 1.69** ● _____Résoudre $y' - xy = x$.**Exercice 1.70** ● _____Résoudre $y' + 2y = 4 \exp(x) + \sin x + \cos x$ avec $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.**Exercice 1.71** ● _____Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 0$ avec $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.**Exercice 1.72** ● _____Résoudre $y'' - 6y' + 9y = 0$ avec $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.**Exercice 1.73** ● _____Résoudre $y'' + y = \exp(x)$ avec $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.**Exercice 1.74** ● _____Résoudre $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1) \exp(x)$ avec $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.**Exercice 1.75** ● _____Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 7 \sin x - \cos x$ avec $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.**Exercice 1.76** ●● _____

Résoudre $y' = y \tan x + \sin x$ avec $y:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 1.77 ●●

Résoudre $xy' - 2y = -\ln x$ avec $y:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 1.78 ●●

Résoudre $(x^3 - x)y' - (x^2 - x + 1)y = 0$ avec $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.79 ●●

Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \left(\int_0^x t f(t) dt + 1 \right).$$

Exercice 1.80 ●●

Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)).$$

Exercice 1.81 ●●

Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x t f(t) dt.$$

Exercice 1.82 ●●

Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Exercice 1.83 ●●●

Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (x - 3t) f(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 1.84 ●●●

Résoudre $y'' + 2y' + y = \frac{\exp(-x)}{x}$ avec $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

CORRECTIONS DES EXERCICES — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Correction de l'exercice 1.66

Équation homogène : $y' + 2y = 0$ donne $y_h(t) = C e^{-2t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : on cherche $y_p(t) = \lambda e^{-t}$ (car -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique $r + 2 = 0$). En substituant : $-\lambda e^{-t} + 2\lambda e^{-t} = 3e^{-t}$, d'où $\lambda = 3$.

Solution générale : $y(t) = C e^{-2t} + 3e^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Condition initiale : $y(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$. La solution est $y(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-t}$.

Correction de l'exercice 1.67

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$, soit $(r - 1)(r - 2) = 0$. Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

Solution homogène : $y_h(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : le second membre est e^t et $r = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc $y_p(t) = \alpha t e^t$.

On calcule : $y'_p = \alpha(1 + t)e^t$ et $y''_p = \alpha(2 + t)e^t$. En substituant :

$$\alpha(2 + t)e^t - 3\alpha(1 + t)e^t + 2\alpha t e^t = e^t,$$

soit $\alpha(2 + t - 3 - 3t + 2t)e^t = e^t$, c'est-à-dire $-\alpha e^t = e^t$, d'où $\alpha = -1$.

Solution générale : $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t} - t e^t$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1.68

Équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$, donc $r = \pm i$.

Solution homogène : $y_h(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : le second membre est $\cos(t)$ et i est racine de l'équation caractéristique. Il y a **résonance**. On cherche donc $y_p(t) = t(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t))$.

On calcule :

$$y'_p = (\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)) + t(-\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)),$$

$$y''_p = 2(-\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)) + t(-\alpha \cos(t) - \beta \sin(t)).$$

En substituant dans $y'' + y = \cos(t)$:

$$2(-\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)) + t(-\alpha \cos(t) - \beta \sin(t)) + t(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)) = \cos(t).$$

Les termes en t s'annulent et il reste :

$$-2\alpha \sin(t) + 2\beta \cos(t) = \cos(t).$$

Par identification : $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2$.

Solution générale :

$$y(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \frac{t}{2} \sin(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le terme $\frac{t}{2} \sin(t)$ est caractéristique de la résonance : l'amplitude croît linéairement avec le temps.

Correction de l'exercice 1.69

Équation homogène : $y' = xy$ conduit à $\frac{y'}{y} = x$, dont une primitive du second membre est $\frac{x^2}{2}$; les solutions sont donc $y_h(x) = C e^{x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : la fonction constante $y_p = -1$ convient, puisque $0 - x \times (-1) = x$.

Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = C e^{x^2/2} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.70

Équation homogène : $y' + 2y = 0$ donne $y_h(x) = C e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On traite ensuite les deux morceaux du second membre séparément, puis on superpose.

Second membre $4 \exp(x)$: comme 1 n'est pas racine de $r + 2 = 0$, on cherche $y_1(x) = \lambda \exp(x)$. En substituant : $\lambda + 2\lambda = 4$, d'où $\lambda = \frac{4}{3}$.

Second membre $\sin x + \cos x$: on cherche $y_2(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Alors

$$y_2' + 2y_2 = (2\alpha + \beta) \cos x + (2\beta - \alpha) \sin x,$$

et l'identification donne le système $2\alpha + \beta = 1$ et $-\alpha + 2\beta = 1$, dont la solution est $\alpha = \frac{1}{5}$ et $\beta = \frac{3}{5}$.

Solution générale sur $\mathbb{R}$, par principe de superposition :

$$y(x) = C e^{-2x} + \frac{4}{3} \exp(x) + \frac{1}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.71

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 > 0$ et de racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.

Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.72

Équation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$, de discriminant nul et de racine double $r = 3$.

Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.73

Équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$, de racines $\pm i$. La solution générale réelle de l'équation homogène est $y_h(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc $y_p(x) = \alpha \exp(x)$. En substituant : $\alpha + \alpha = 1$, d'où $\alpha = \frac{1}{2}$.

Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{\exp(x)}{2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.74

Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, de racines 2 et 3, donc $y_h(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$.

Solution particulière : le second membre est de la forme $P(x) \exp(x)$ avec P de degré 2, et 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique : on cherche donc $y_p = Q \exp(x)$ avec Q polynomiale de degré 2. Comme $y'_p = (Q' + Q) \exp(x)$ et $y''_p = (Q'' + 2Q' + Q) \exp(x)$:

$$y''_p - 5y'_p + 6y_p = (Q'' - 3Q' + 2Q) \exp(x).$$

Il s'agit donc de résoudre $Q'' - 3Q' + 2Q = 2x^2 - 4x + 1$. Avec $Q = ax^2 + bx + c$:

$$Q'' - 3Q' + 2Q = 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c),$$

et l'identification donne successivement $a = 1$, puis $b = 1$, puis $c = 1$. Ainsi $y_p(x) = (x^2 + x + 1) \exp(x)$.

Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} + (x^2 + x + 1) \exp(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.75

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$, de racine double 2, donc $y_h(x) = (\lambda + \mu x) e^{2x}$.

Solution particulière : le second membre est une combinaison de cos et sin, et 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique : on cherche $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Un calcul direct donne

$$y''_p - 4y'_p + 4y_p = (3\alpha - 4\beta) \cos x + (4\alpha + 3\beta) \sin x.$$

L'identification avec $7 \sin x - \cos x$ conduit au système

$$\begin{cases} 3\alpha - 4\beta = -1, \\ 4\alpha + 3\beta = 7, \end{cases}$$

dont la solution est $\alpha = \beta = 1$.

Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{2x} + \cos x + \sin x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.76

Sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'équation s'écrit $y' - (\tan x) y = \sin x$, avec $\tan$ continue sur I : c'est une équation linéaire du premier ordre résolue.

Équation homogène : le cosinus étant strictement positif sur I , une primitive de $\tan x$ est $-\ln(\cos x)$. Les solutions homogènes sont donc

$$y_h(x) = C e^{-\ln(\cos x)} = \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante : on cherche $y(x) = \frac{C(x)}{\cos x}$ avec C dérivable sur I . En dérivant,

$$y'(x) = \frac{C'(x)}{\cos x} + C(x) \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{C'(x)}{\cos x} + (\tan x) y(x),$$

de sorte que l'équation devient $\frac{C'(x)}{\cos x} = \sin x$, soit $C'(x) = \sin x \cos x$. D'où $C(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution générale sur I : en écrivant $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{1-\cos^2 x}{2}$ et en absorbant la constante $\frac{1}{2}$ dans λ :

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x} - \frac{\cos x}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.77

Sur $I =]0, +\infty[$, on peut diviser par x : l'équation s'écrit

$$y' - \frac{2}{x} y = -\frac{\ln x}{x}.$$

Équation homogène : une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ sur I est $2 \ln x$, donc $y_h(x) = C e^{2 \ln x} = C x^2$, $C \in \mathbb{R}$.

Variation de la constante : on pose $y(x) = C(x)x^2$ avec C dérivable. Alors $y' - \frac{2}{x}y = C'(x)x^2$, et l'équation devient

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2},$$

d'où $C(x) = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution générale sur I :

$$y(x) = \lambda x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.78

Notons (E) l'équation proposée. Son coefficient dominant $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ s'annule en -1 , 0 et 1 : l'équation n'est pas résolue en ces points, et il faudra recoller.

Résolution là où le coefficient ne s'annule pas. Sur tout intervalle ne rencontrant pas $\{-1, 0, 1\}$, (E) équivaut à

$$y' = \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} y.$$

La décomposition en éléments simples donne

$$\frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x+1},$$

dont une primitive est $-\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x+1|$. Les solutions y sont donc les $y = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où

$$\varphi(x) = \frac{|x+1|^{3/2} \sqrt{|x-1|}}{|x|}.$$

C'est en particulier la solution générale sur chacun des quatre intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $] 0, 1[$ et $] 1, +\infty[$.

Recollements. Soit maintenant I un intervalle ouvert quelconque et y une solution de (E) sur I . Sur chaque composante connexe J de $I \setminus \{-1, 0, 1\}$, ce qui précède donne $y = \lambda_J \varphi$ pour un certain $\lambda_J \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, en évaluant (E) en un point $x_0 \in \{-1, 0, 1\} \cap I$, le terme en y' disparaît et il reste $-(x_0^2 - x_0 + 1)y(x_0) = 0$, donc $y(x_0) = 0$ (le trinôme $x^2 - x + 1$ n'a pas de racine réelle). Reste à voir ce que la dérivabilité impose de part et d'autre de chaque point singulier.

- **En 0.** On a $\varphi(x) \sim \frac{1}{|x|}$, qui n'est pas bornée au voisinage de 0; or y est continue. Donc $\lambda_J = 0$ pour les deux composantes bordant 0.
- **En 1.** On a $\varphi(x) \sim 2\sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, dont le taux d'accroissement en 1 tend vers $\pm\infty$: y ne serait pas dérivable en 1. Donc $\lambda_J = 0$ pour les deux composantes bordant 1.
- **En -1.** Cette fois $\varphi(x) = |x+1|^{3/2} \psi(x)$ avec ψ continue et non nulle en -1, donc $\frac{\varphi(x)}{x+1} \rightarrow 0$: la fonction obtenue en recollant $\lambda_1 \varphi$ à gauche, 0 en -1 et $\lambda_2 \varphi$ à droite est bien dérivable en -1, de dérivée nulle, et vérifie (E) en -1 (les deux termes y sont nuls). *Aucune* condition ne relie donc λ_1 et λ_2 .

Conclusion. Une solution sur I est déterminée par un coefficient λ_J par composante connexe J de $I \setminus \{-1, 0, 1\}$, soumis à la seule contrainte $\lambda_J = 0$ dès que J admet 0 ou 1 pour extrémité intérieure à I . L'espace des solutions est ainsi de dimension 1 sur chacun des quatre intervalles ci-dessus, de dimension 2 sur un intervalle du type $] -1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon[$, et réduit à la fonction nulle sur tout intervalle contenu dans $] -1, +\infty[$ qui contient 0 ou 1.

Correction de l'exercice 1.79

Analyse. Soit f une solution. La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $F: x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ est de classe C^1 , avec $F'(x) = xf(x)$ et $F(0) = 0$. L'hypothèse s'écrit $f(x) = x(F(x) + 1)$.

Posons $g = F + 1$: la fonction g est de classe C^1 , $g(0) = 1$ et

$$g'(x) = F'(x) = xf(x) = x \times x(F(x) + 1) = x^2 g(x).$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $g(x) = C e^{x^3/3}$; la condition $g(0) = 1$ impose $C = 1$. Par conséquent

$$f(x) = x g(x) = x e^{x^3/3}.$$

Synthèse. Réciproquement, pour cette fonction,

$$\int_0^x tf(t) dt = \int_0^x t^2 e^{t^3/3} dt = \left[e^{t^3/3} \right]_0^x = e^{x^3/3} - 1,$$

et $x \left(e^{x^3/3} - 1 + 1 \right) = x e^{x^3/3} = f(x)$: elle convient.

L'unique solution est donc $f: x \mapsto x e^{x^3/3}$.

Correction de l'exercice 1.80

Analyse. Soit f une solution. Le membre de droite $x \mapsto \frac{1}{2} (f(x) + f(-x))$ est dérivable puisque f l'est ; donc f' est dérivable, c'est-à-dire f est deux fois dérivable. Par ailleurs, en remplaçant x par $-x$ dans l'équation, le membre de droite est inchangé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) = f'(x),$$

autrement dit f' est paire. En dérivant l'équation, il vient alors

$$f''(x) = \frac{1}{2} (f'(x) - f'(-x)) = 0.$$

Ainsi $f'' = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc f est affine : $f(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse. Pour une telle fonction, $f'(x) = a$ et

$$\frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) = \frac{1}{2} ((ax + b) + (-ax + b)) = b.$$

L'équation équivaut donc à $a = b$.

Les solutions sont exactement les fonctions $f: x \mapsto a(x + 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1.81

Analyse. Soit f une solution. La fonction $t \mapsto tf(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, le membre de droite est de classe C^1 ; donc f l'est aussi, et en dérivant :

$$f'(x) = xf(x), \quad f(0) = 1.$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $f(x) = C e^{x^2/2}$; la condition $f(0) = 1$ impose $C = 1$.

Synthèse. Réciproquement, pour $f(x) = e^{x^2/2}$:

$$1 + \int_0^x t e^{t^2/2} dt = 1 + \left[e^{t^2/2} \right]_0^x = e^{x^2/2} = f(x).$$

L'unique solution est donc $f: x \mapsto e^{x^2/2}$.

Correction de l'exercice 1.82

Analyse. Soit f une solution. Comme $f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \neq 0$, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$; étant continue, elle y garde un signe constant. De plus, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f' \left(\frac{1}{x} \right) f(x) = x.$$

L'astuce. Posons $g(x) = f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant les deux relations :

$$g'(x) = f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f(x)f' \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \times x = 0.$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $g(1) = f(1)^2$. Notons $c = f(1)^2 > 0$.

Résolution. De $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{f(x)}$ et de l'équation, on tire

$$f'(x) = \frac{1}{x f\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f(x)}{c x}.$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène, dont les solutions ne s'annulant pas sont $f(x) = A x^{1/c}$ avec $A \in \mathbb{R}^*$. En évaluant en 1, $A = f(1)$, donc $c = A^2$.

Synthèse. Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = \lambda x^{1/\lambda^2}$. Alors

$$f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda^2}-1} \times \lambda x^{-\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{x}.$$

Les solutions sont donc exactement les $f: x \mapsto \lambda x^{1/\lambda^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Correction de l'exercice 1.83

Analyse. Soit f une telle application. En développant $x - 3t$, la relation s'écrit

$$\forall x \geq 0, \quad x \int_0^x f(t) dt - 3 \int_0^x t f(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

Les fonctions $F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et $G: x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ sont de classe C^1 (car f est continue), et la relation devient $x F(x) - 3G(x) = \frac{x^2}{2}$. En dérivant :

$$F(x) + x f(x) - 3x f(x) = x, \quad \text{soit} \quad F(x) - 2x f(x) = x.$$

Pour $x > 0$, on en tire $f(x) = \frac{F(x) - x}{2x}$: comme F est de classe C^1 , la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc dériver à nouveau la relation $F(x) - 2x f(x) = x$:

$$f(x) - 2f(x) - 2x f'(x) = 1, \quad \text{soit} \quad 2x f'(x) + f(x) = -1.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$ cette équation s'écrit $f' + \frac{1}{2x} f = -\frac{1}{2x}$. L'équation homogène a pour solutions $C e^{-\frac{1}{2} \ln x} = \frac{C}{\sqrt{x}}$, et la fonction constante -1 est une solution particulière évidente ; donc

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Or f est continue en 0, donc bornée au voisinage de 0 : cela impose $C = 0$. Par continuité, $f = -1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Synthèse. Réciproquement, pour $f = -1$:

$$\int_0^x (x - 3t)(-1) dt = - \left[xt - \frac{3t^2}{2} \right]_0^x = -x^2 + \frac{3x^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

L'unique solution est donc la fonction constante égale à -1 .

Correction de l'exercice 1.84

Équation homogène : $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$ a pour racine double -1 , donc $y_h(x) = (\lambda + \mu x) e^{-x}$.

Solution particulière : le second membre n'est pas de la forme $P(x)e^{rx}$, on ne peut donc pas deviner la forme de y_p . On pose plutôt $y(x) = z(x) e^{-x}$ avec z deux fois

dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; alors $y' = (z' - z)e^{-x}$ et $y'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$, d'où

$$y'' + 2y' + y = (z'' - 2z' + z + 2z' - 2z + z) e^{-x} = z'' e^{-x}.$$

L'équation équivaut donc à $z''(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui donne $z'(x) = \ln x + a$, puis

$$z(x) = x \ln x - x + ax + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$, après absorption du terme $-x$ dans la constante a :

$$y(x) = (x \ln x + \lambda x + \mu) e^{-x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



★ POUR ALLER PLUS LOIN

Séries numériques

Exercice 1.85 ●●

Sommation d'Abel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}n}}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence de $\sum u_n$ pour $\alpha > 1$, puis pour $\alpha \leq 0$.
2. On suppose maintenant $0 < \alpha \leq 1$. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2i\pi}{7}k}$. Montrer que la suite (A_n) est bornée.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right).$$

4. En déduire la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 1.86 ★

Théorème de réarrangement de Riemann. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série réelle convergente mais pas absolument convergente (on dit qu'elle est *semi-convergente*), et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une *permutation* de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)} = \ell$. Autrement dit, en réarrangeant les termes d'une série semi-convergente, on peut obtenir n'importe quelle somme.

On note $P = \{n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N} : u_n < 0\}$, et l'on suppose (sans perte de généralité) que ces deux ensembles sont infinis. On note $(p_k)_{k \geq 0}$ et $(q_k)_{k \geq 0}$ les énumérations strictement croissantes de P et N respectivement, et on pose $v_k = u_{p_k} \geq 0$ et $w_k = u_{q_k} < 0$.

1. Montrer que $\sum v_k = +\infty$ et $\sum w_k = -\infty$.
2. Construire φ par récurrence « gloutonne » : à chaque étape, on ajoute des termes positifs (par ordre d'apparition) jusqu'à ce que la somme dépasse ℓ , puis des termes négatifs jusqu'à ce qu'elle repasse en dessous de ℓ , et ainsi de suite. Montrer que chaque phase termine (c'est-à-dire finit par franchir ℓ).
3. Montrer que φ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
4. Soit $(T_N)_{N \geq 0}$ la suite des sommes partielles réarrangées. Montrer que $T_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Intégrales sur un segment

Exercice 1.87 ●●●

Moyennisation et lemme de Riemann–Lebesgue. Lorsqu'une fonction oscille de plus en plus vite, elle se comporte, vue à travers une intégrale, comme sa valeur moyenne. C'est ce phénomène que l'on quantifie ici.

1. Soit f de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe une constante $C \geq 0$ ne dépendant que de f telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{C}{n}.$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique, de valeur moyenne $m = \int_0^1 g(u) du$. On note G la primitive de $g - m$ nulle en 0. Montrer que G est 1-périodique, puis qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Soient f de classe C^1 sur $[a, b]$ et g comme à la question précédente. Montrer qu'il existe une constante $C' \geq 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_a^b f(t)g(nt) dt - m \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{C'}{n}.$$

En particulier, $\int_a^b f(t)g(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m \int_a^b f(t) dt$.

4. Applications.

- (a) Vérifier que la question 3 reste valable si g est T -périodique, la valeur moyenne étant alors $m = \frac{1}{T} \int_0^T g(u) du$.
- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{2 + \sin(nt)}$.
- (c) Soit f de classe C^1 sur $[0, 1]$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |\sin(n\pi t)| f(t) dt$.

Exercice 1.88 ●●

Inégalité de Tchebychev intégrale. Soient $a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On pose, pour $x \in [a, b]$,

$$\Phi(x) = (x - a) \int_a^x f(t)g(t) dt - \int_a^x f(t) dt \int_a^x g(t) dt.$$

1. Justifier que Φ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et calculer $\Phi'(x)$.
2. Montrer que $\Phi'(x) = \int_a^x (f(t) - f(x))(g(t) - g(x)) dt$. En déduire que si f et g sont toutes deux croissantes,

$$(b - a) \int_a^b f(t)g(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt.$$

3. Que devient l'inégalité lorsque f est croissante et g décroissante?
4. Application. Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$.

- (a) Retrouver, à l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, l'inégalité $\int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f} \geq (b - a)^2$, et préciser le cas d'égalité.
- (b) Redémontrer cette inégalité par la méthode de Φ , et discuter à nouveau le cas d'égalité. Que constate-t-on quant à l'hypothèse de monotonie?

Exercice 1.89 ★

Comment démontrer que $\pi < \frac{22}{7}$. L'approximation $\pi \simeq \frac{22}{7}$ est connue depuis l'Antiquité. Une seule intégrale permet de la contrôler avec précision.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^4(1-X)^4$ par $1+X^2$ et en déduire

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

2. En déduire que $\pi < \frac{22}{7}$.

3. À l'aide de l'encadrement $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, valable sur $[0, 1]$, montrer que

$$\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{630}.$$

4. *Question ouverte : l'irrationalité de π .* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin x \, dx.$$

- (a) Montrer que $I_n > 0$ et que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- (b) On suppose $\pi = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, et l'on pose $P_n(x) = \frac{q^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$. Montrer que $n! P_n$ est une fonction polynomiale à coefficients entiers, que $P_n(\pi - x) = P_n(x)$, et enfin que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- (c) On pose $Q_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_n^{(2j)}$. Montrer que $Q_n + Q_n'' = P_n$, puis que $q^n I_n = Q_n(0) + Q_n(\pi)$.

- (d) Conclure que π est irrationnel.

Équations différentielles**Exercice 1.90** ● ● ●

Abaissement de l'ordre.

A — La méthode

On considère l'équation différentielle

$$(E) : (1+x^2)y'' - 2y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que la fonction $y_0 : x \mapsto 1+x^2$ est solution de (E), et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $z = \frac{y}{y_0}$. Montrer que

$$y \text{ est solution de } (E) \iff (1+x^2)z'' + 4xz' = 0.$$

Indication : aucun terme en z ne subsiste dans l'équation obtenue. Identifier le calcul qui le garantit, et expliquer pourquoi c'est précisément l'hypothèse « y_0 est solution de (E) » qui sert ici.

3. En posant $u = z'$, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre. La résoudre.
4. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto a(1+x^2) + b(x + (1+x^2)\arctan x) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Vérifier que les deux fonctions ainsi obtenues ne sont pas proportionnelles. Quelle est la dimension de $\mathcal{S}$?

6. Montrer que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' - 2y = 0, \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta, \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On vient ainsi de démontrer « à la main », sur cet exemple, un cas particulier du théorème de Cauchy linéaire.

B — Avec second membre

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

7. Montrer que la substitution $y = (1+x^2)z$ transforme l'équation $(1+x^2)y'' - 2y = g(x)$ en

$$((1+x^2)^2 z')' = g(x).$$

8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+x^2)y'' - 2y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Indication : pour le calcul de $\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} dx$, utiliser le changement de variable $x = \tan t$.

C — Ce qui peut mal se passer

On considère l'équation différentielle

$$(F) : \quad x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

9. Vérifier que $y_0 : x \mapsto x$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$. Pourquoi la méthode de la partie A ne peut-elle pas être appliquée directement sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
10. Résoudre (F) par abaissement de l'ordre sur l'intervalle des réels strictement positifs, puis sur celui des réels strictement négatifs.
11. Déterminer l'ensemble des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Quelle est sa dimension ?

Correction de l'exercice 1.85

1. Si $\alpha > 1$, $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum u_n$ converge absolument.

Si $\alpha \leq 0$, $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$, donc la série diverge grossièrement.

2. A_n est une somme géométrique :

$$A_n = e^{\frac{2i\pi}{7}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{2i\pi}{7}n}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}},$$

donc

$$|A_n| \leq \frac{2}{\left|1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}\right|} =: M.$$

3. Convenons de poser $A_0 = 0$. Avec cette convention, on a $A_k - A_{k-1} = e^{\frac{2i\pi}{7}k}$ pour tout $k \geq 1$: c'est vrai pour $k \geq 2$ par définition de A_k , et pour $k = 1$ cela donne $A_1 - A_0 = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, ce qui est bien exact.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Remplaçons chaque numérateur par cette différence, puis séparons la somme en deux :

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k - A_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{A_{k-1}}{k^\alpha}.$$

Occupons-nous de la seconde somme. Le changement d'indice $j = k - 1$ donne

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j}{(j+1)^\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{(j+1)^\alpha},$$

le terme d'indice $j = 0$ étant nul puisque $A_0 = 0$.

Isolons maintenant, dans la première somme, le terme d'indice n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k^\alpha}.$$

En reportant ces deux calculs, les deux sommes qui restent portent sur les mêmes indices : on peut donc les regrouper et mettre A_k en facteur, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(k+1)^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right),$$

ce qui est la formule demandée.

4. D'une part, $\left| \frac{A_n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{M}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\alpha > 0$.

D'autre part, pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-\alpha} \right) \sim \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}},$$

et cette quantité est positive. Comme $\alpha > 0$, $\alpha + 1 > 1$, donc $\sum \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ converge. Par critère d'équivalence, la série $\sum \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ converge.

Et $\left| A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \right| \leq M \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$, donc par critère de domination, $\sum A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ converge absolument.

Finalement, la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est la somme de deux suites convergentes, donc converge. **La série converge.**

Correction de l'exercice 1.86

1. On note $V_K = \sum_{k=0}^K v_k$ et $W_K = \sum_{k=0}^K w_k$. Pour $N \in \mathbb{N}$, en notant S_N la somme partielle $\sum_{n=0}^N u_n$ et Σ_N celle de $\sum |u_n|$:

$$S_N = \sum_{\substack{k \\ p_k \leq N}} v_k + \sum_{\substack{k \\ q_k \leq N}} w_k, \quad \Sigma_N = \sum_{\substack{k \\ p_k \leq N}} v_k - \sum_{\substack{k \\ q_k \leq N}} w_k.$$

Par hypothèse, $S_N \rightarrow S = \sum u_n$ (finie), tandis que $\Sigma_N \rightarrow +\infty$ (semi-convergence). En additionnant et soustrayant, $\sum v_k = \frac{S + (+\infty)}{2} = +\infty$ et $\sum w_k = \frac{S - (+\infty)}{2} = -\infty$.

2. Construction formelle : posons $T_0 = 0$ (somme vide). À l'étape suivante, on compare T_n à ℓ :
- Si $T_n \leq \ell$, on ajoute le prochain terme positif non utilisé.
 - Si $T_n > \ell$, on ajoute le prochain terme négatif non utilisé.

Cela définit $\varphi(n)$ comme le prochain indice positif ou négatif non encore utilisé selon le cas. Chaque « phase » (suite d'ajouts positifs ou suite d'ajouts négatifs) termine par franchir ℓ , car la somme des positifs restants est $+\infty$ (on finit donc toujours par dépasser ℓ), et symétriquement pour les négatifs.

3. Comme les phases alternent et chacune utilise au moins un terme, la construction consomme une infinité de p_k et de q_k . En fait, comme chaque phase ajoute au moins un terme mais termine en un nombre fini d'étapes, tous les p_k et tous les q_k sont finalement utilisés. Comme aucun indice n'est utilisé deux fois, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow P \cup N = \mathbb{N}$ est une bijection.
4. À chaque *point de flip* (moment où l'on vient de franchir ℓ et où on change de signe d'ajout), la somme partielle T_n est à distance au plus $|u_{\varphi(n)}|$ de ℓ (car avant l'ajout du terme qui a fait franchir ℓ , on était de l'autre côté de ℓ). Entre deux flips, la somme reste entre ℓ et T_{flip} , donc aussi à distance au plus $|u_{\varphi(n)}|$ de ℓ pour tous les n dans la phase.

Or $u_n \rightarrow 0$ (condition nécessaire de convergence de $\sum u_n$), donc $u_{\varphi(n)} \rightarrow 0$ (car φ est une bijection avec $\varphi(n) \rightarrow +\infty$). Ainsi $|T_n - \ell| \rightarrow 0$, et $T_n \rightarrow \ell$.

Correction de l'exercice 1.87

1. Soit $n \geq 1$. On intègre par parties, en primitivant $t \mapsto \sin(nt)$ en $t \mapsto -\frac{\cos(nt)}{n}$

et en dérivant f (les deux fonctions sont de classe C^1 sur $[a, b]$) :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \left[-\frac{f(t) \cos(nt)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt.$$

En majorant $|\cos| \leq 1$, on obtient

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right),$$

d'où le résultat avec $C = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt$.

C'est le *lemme de Riemann–Lebesgue* dans le cas C^1 : il reste vrai pour f seulement continue, mais la démonstration demande d'autres outils.

2. Posons $G(x) = \int_0^x (g(u) - m) du$; G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car $g - m$ est continue. Considérons

$$\psi(x) = G(x+1) - G(x) = \int_x^{x+1} (g(u) - m) du.$$

La fonction ψ est dérivable, de dérivée $\psi'(x) = (g(x+1) - m) - (g(x) - m) = 0$ par 1-périodicité de g . Donc ψ est constante, égale à $\psi(0) = \int_0^1 g(u) du - m = 0$. Ainsi $G(x+1) = G(x)$ pour tout x : G est 1-périodique.

G est continue sur le segment $[0, 1]$, donc y est bornée ; par périodicité, G est bornée sur $\mathbb{R}$, avec $\sup_{\mathbb{R}} |G| = \sup_{[0,1]} |G|$.

3. Notons $M = \sup_{\mathbb{R}} |G|$. Pour $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{n}G(nt)$ est de classe C^1 et sa dérivée vaut $g(nt) - m$: c'est donc une primitive de $t \mapsto g(nt) - m$. Une intégration par parties donne

$$\int_a^b f(t) (g(nt) - m) dt = \left[\frac{f(t)G(nt)}{n} \right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b f'(t)G(nt) dt.$$

Comme $\int_a^b f(t)g(nt) dt - m \int_a^b f(t) dt$ est exactement le membre de gauche, on en déduit

$$\left| \int_a^b f(t)g(nt) dt - m \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M}{n} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right),$$

c'est-à-dire le résultat voulu avec $C' = MC$, où C est la constante de la question

1. En particulier, la différence tend vers 0.

4. (a) La démonstration précédente n'utilise la période que par l'intermédiaire de l'égalité $\int_0^T (g - m) = 0$, qui définit précisément m . Si g est T -périodique et $m = \frac{1}{T} \int_0^T g$, la fonction $\psi(x) = \int_x^{x+T} (g - m)$ est encore de dérivée nulle et vaut 0 en 0 : la primitive G de $g - m$ nulle en 0 est T -périodique, donc bornée, et l'intégration par parties de la question 3 est inchangée.
- (b) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{2+\sin t}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $2+\sin t \geq 1 > 0$) et 2π -périodique. Avec $f = 1$, qui est de classe C^1 sur $[0, 1]$, la question précédente donne

$$\int_0^1 \frac{dt}{2+\sin(nt)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m \int_0^1 dt = m, \quad m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}.$$

Calculons cette moyenne. Le raisonnement de la question 2 (dérivée nulle) montre que $x \mapsto \int_x^{x+2\pi} g$ est constante, donc $\int_0^{2\pi} g = \int_{-\pi}^{\pi} g$. Posons, pour $-\pi < t < \pi$,

$$H(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right).$$

En posant $u = \tan \frac{t}{2}$, on a $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$, donc $2 + \sin t = \frac{2(u^2+u+1)}{1+u^2}$, et le calcul de H' donne

$$H'(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{3 + (2u + 1)^2} \cdot \frac{1 + u^2}{\sqrt{3}} = \frac{1 + u^2}{2(u^2 + u + 1)} = \frac{1}{2 + \sin t}.$$

Comme $\tan \frac{t}{2} \rightarrow \pm\infty$ quand $t \rightarrow \pm\pi$, H se prolonge par continuité à $[-\pi, \pi]$ en posant $H(\pm\pi) = \pm\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. La fonction $x \mapsto H(x) - \int_{-\pi}^x g$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, de dérivée nulle pour $-\pi < x < \pi$, donc constante; en comparant les valeurs en $-\pi$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = H(\pi) - H(-\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Finalement $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et

$$\int_0^1 \frac{dt}{2 + \sin(nt)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- (c) La fonction $g : u \mapsto |\sin(\pi u)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique, et $|\sin(n\pi t)| = g(nt)$. Sa valeur moyenne vaut

$$m = \int_0^1 |\sin(\pi u)| du = \int_0^1 \sin(\pi u) du = \left[-\frac{\cos(\pi u)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi},$$

car $\sin(\pi u) \geq 0$ sur $[0, 1]$. Donc

$$\int_0^1 |\sin(n\pi t)| f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(t) dt.$$

Correction de l'exercice 1.88

1. Les fonctions fg , f et g sont continues sur $[a, b]$, donc $x \mapsto \int_a^x fg$, $x \mapsto \int_a^x f$ et $x \mapsto \int_a^x g$ sont de classe C^1 , de dérivées respectives $f(x)g(x)$, $f(x)$ et $g(x)$. Par produits et sommes, Φ est de classe C^1 et

$$\Phi'(x) = \int_a^x fg + (x-a)f(x)g(x) - f(x) \int_a^x g - g(x) \int_a^x f.$$

2. Développons l'intégrande proposé :

$$(f(t) - f(x))(g(t) - g(x)) = f(t)g(t) - f(x)g(t) - g(x)f(t) + f(x)g(x).$$

En intégrant sur $[a, x]$ (où x est une constante), il vient

$$\begin{aligned} \int_a^x (f(t) - f(x))(g(t) - g(x)) dt &= \int_a^x fg + (x-a)f(x)g(x) \\ &\quad - f(x) \int_a^x g - g(x) \int_a^x f, \end{aligned}$$

c'est-à-dire exactement $\Phi'(x)$.

Supposons maintenant f et g croissantes. Pour $t \in [a, x]$, on a $t \leq x$, donc $f(t) - f(x) \leq 0$ et $g(t) - g(x) \leq 0$: leur produit est positif. Par positivité de l'intégrale, $\Phi'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, donc Φ est croissante. Comme $\Phi(a) = 0$, on obtient $\Phi(b) \geq 0$, ce qui est exactement l'inégalité annoncée.

3. Si f est croissante et g décroissante, alors $-g$ est croissante et la question précédente appliquée au couple $(f, -g)$ donne $(b-a) \int_a^b f \times (-g) \geq \int_a^b f \int_a^b (-g)$. En multipliant par -1 , l'inégalité change de sens :

$$(b-a) \int_a^b f(t)g(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt.$$

4. (a) Rappelons que l'application

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(t)v(t) dt$$

définit un *produit scalaire* sur l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$: elle est bilinéaire et symétrique, et si $\langle u, u \rangle = 0$ alors u^2 , qui est continue et positive d'intégrale nulle, est identiquement nulle, donc u aussi. C'est à ce produit scalaire que nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Comme f est continue et strictement positive sur $[a, b]$, les fonctions $u = \sqrt{f}$ et $v = \frac{1}{\sqrt{f}}$ sont continues sur $[a, b]$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_a^b uv \right)^2 \leq \int_a^b u^2 \int_a^b v^2, \quad \text{soit} \quad (b-a)^2 \leq \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f},$$

puisque $uv = 1$. Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires; comme u ne s'annule pas, cela s'écrit $v = \lambda u$, soit $\frac{1}{\sqrt{f}} = \lambda \sqrt{f}$, c'est-à-dire f constante (et réciproquement, f constante donne bien l'égalité).

- (b) Reprenons l'identité de la question 2 avec le couple $(f, \frac{1}{f})$: en posant $\Phi(x) = (x-a)^2 - \int_a^x f \int_a^x \frac{1}{f}$, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \int_a^x (f(t) - f(x)) \left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(x)} \right) dt \\ &= - \int_a^x \frac{(f(t) - f(x))^2}{f(t)f(x)} dt \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi Φ est décroissante et $\Phi(a) = 0$, donc $\Phi(b) \leq 0$, ce qui redonne $(b-a)^2 \leq \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f}$.

S'il y a égalité, alors $\Phi(b) = 0$; comme Φ est décroissante et nulle en a et en b , elle est identiquement nulle, donc $\Phi' \equiv 0$. En $x = b$,

$$\int_a^b \frac{(f(t) - f(b))^2}{f(t)f(b)} dt = 0,$$

et l'intégrande est continu et positif : il est donc identiquement nul, ce qui impose $f(t) = f(b)$ pour tout $t \in [a, b]$. On retrouve bien : égalité si et seulement si f est constante.

Enfin, ce calcul de Φ' n'a utilisé *aucune* hypothèse de monotonie : seul le fait que $(f(t) - f(x)) \left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(x)} \right)$ soit toujours négatif a servi. La méthode de Φ redonne donc ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz en toute généralité, alors que la question 3 ne s'appliquait qu'aux f monotones.

Correction de l'exercice 1.89

1. En développant, $X^4(1-X)^4 = X^8 - 4X^7 + 6X^6 - 4X^5 + X^4$. La division euclidienne par $X^2 + 1$ donne

$$X^4(1-X)^4 = (1+X^2)(X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4) - 4,$$

ce que l'on vérifie en développant le membre de droite. Donc, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}.$$

Les deux membres sont continus sur $[0, 1]$; en intégrant,

$$\int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{1}{7} + 3 = \frac{22}{7},$$

tandis que $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2} = 4 [\arctan x]_0^1 = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$. D'où le résultat.

2. La fonction $x \mapsto \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ est continue et positive sur $[0, 1]$, et n'est pas identiquement nulle (elle vaut $\frac{1}{320} > 0$ en $x = \frac{1}{2}$). Son intégrale est donc *strictement* positive : $\frac{22}{7} - \pi > 0$, c'est-à-dire $\pi < \frac{22}{7}$.
3. Sur $[0, 1]$ on a $1 \leq 1+x^2 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. En multipliant par $x^4(1-x)^4 \geq 0$ et en intégrant,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx.$$

Or

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = \frac{1}{5} - \frac{4}{6} + \frac{6}{7} - \frac{4}{8} + \frac{1}{9} = \frac{126 - 420 + 540 - 315 + 70}{630} = \frac{1}{630},$$

d'où l'encadrement $\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{630}$.

En particulier, en combinant les deux inégalités, $3,1412 \leq \pi \leq 3,1421$: une seule intégrale donne deux décimales exactes de π et encadre la troisième.

4. (a) Sur $[0, \pi]$, la fonction $x \mapsto x^n(\pi-x)^n \sin x$ est continue et positive, et strictement positive pour $0 < x < \pi$: son intégrale est strictement positive, donc $I_n > 0$.

Par ailleurs, pour $x \in [0, \pi]$, l'étude du trinôme $x(\pi-x)$ donne $0 \leq x(\pi-x) \leq \frac{\pi^2}{4}$, et $\sin x \leq 1$. Donc

$$0 < I_n \leq \frac{\pi}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $\frac{c^n}{n!} \rightarrow 0$ pour tout $c > 0$ (terme général d'une série convergente, celle de l'exponentielle). Par encadrement, $I_n \rightarrow 0$.

- (b) Comme $q\pi = p$, on a $q^n(\pi-x)^n = (p-qx)^n$, donc $n! P_n(x) = x^n(p-qx)^n$: c'est bien une fonction polynomiale à coefficients entiers, de degré $2n$, dont les monômes sont tous de degré $\geq n$. Écrivons $n! P_n(x) = \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$ avec $c_k \in \mathbb{Z}$.

L'égalité $P_n(\pi-x) = P_n(x)$ est immédiate sur l'expression $P_n(x) = \frac{q^n x^n (\pi-x)^n}{n!}$, qui est symétrique en x et $\pi-x$.

Pour $k < n$ ou $k > 2n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$. Pour $n \leq k \leq 2n$, $P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k$, et $\frac{k!}{n!} = (n+1)(n+2) \cdots k$ est un entier : donc $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ dans tous les cas. Enfin, en dérivant k fois la relation $P_n(\pi-x) = P_n(x)$, on obtient $(-1)^k P_n^{(k)}(\pi-x) = P_n^{(k)}(x)$, puis, en $x=0$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

- (c) Comme $\deg P_n = 2n$, on a $P_n^{(2n+2)} = 0$, donc

$$Q_n + Q_n'' = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_n^{(2j)} + \sum_{j=0}^n (-1)^j P_n^{(2j+2)}.$$

Dans la seconde somme, le terme $j=n$ est nul ; en réindexant $j \rightarrow j-1$, elle vaut $\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} P_n^{(2j)}$, qui annihile tous les termes $j \geq 1$ de la première. Il reste $Q_n + Q_n'' = P_n$.

Posons alors $R(x) = Q_n'(x) \sin x - Q_n(x) \cos x$. On a

$$\begin{aligned} R'(x) &= Q_n''(x) \sin x + Q_n'(x) \cos x - Q_n'(x) \cos x + Q_n(x) \sin x \\ &= (Q_n''(x) + Q_n(x)) \sin x = P_n(x) \sin x, \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx = [R]_0^\pi = Q_n(\pi) + Q_n(0),$$

puisque $\sin 0 = \sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$ et $\cos 0 = 1$. Comme $P_n(x) = \frac{q^n x^n (\pi-x)^n}{n!}$, le membre de gauche vaut $q^n I_n$.

- (d) D'après la question précédente, $q^n I_n = Q_n(0) + Q_n(\pi)$ est une somme de valeurs $\pm P_n^{(2j)}(0)$ et $\pm P_n^{(2j)}(\pi)$, donc un *entier*. Or $I_n > 0$ et $q > 0$, donc $q^n I_n$ est un entier strictement positif : $q^n I_n \geq 1$ pour tout n .

Mais la majoration de la question (a) donne

$$0 < q^n I_n \leq \pi \frac{\left(\frac{q\pi^2}{4}\right)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $q^n I_n < 1$ pour n assez grand : contradiction. L'hypothèse « π est rationnel » est donc absurde, et π est irrationnel.

Correction de l'exercice 1.90

A — La méthode

1. La fonction $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$ est polynomiale, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $y_0'(x) = 2x$ et $y_0''(x) = 2$. Ainsi

$$(1+x^2)y_0''(x) - 2y_0(x) = 2(1+x^2) - 2(1+x^2) = 0,$$

et y_0 est bien solution de (E). Enfin $y_0(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: y_0 ne s'annule pas.

2. Comme y_0 ne s'annule pas et est de classe C^∞ , les fonctions y et $z = \frac{y}{y_0}$ sont simultanément deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$: se donner y ou se donner z , avec $y = y_0 z$, revient au même. On dérive deux fois ce produit :

$$y' = y'_0 z + y_0 z', \quad y'' = y''_0 z + 2y'_0 z' + y_0 z''.$$

En reportant et en regroupant les termes selon z , z' et z'' :

$$\begin{aligned} (1+x^2)y'' - 2y &= \underbrace{[(1+x^2)y''_0 - 2y_0]}_{=0} z + (1+x^2)(2y'_0 z' + y_0 z'') \\ &= (1+x^2)(4xz' + (1+x^2)z''). \end{aligned}$$

C'est ici, et seulement ici, que sert l'hypothèse « y_0 est solution de (E) » : le coefficient de z est exactement le premier membre de (E) évalué en y_0 , donc il est nul. Comme $1+x^2 \neq 0$ pour tout x , on peut diviser, d'où l'équivalence annoncée.

3. Avec $u = z'$, l'équation s'écrit $(1+x^2)u' + 4xu = 0$, soit, en divisant par $1+x^2$ qui ne s'annule pas, $u' = -\frac{4x}{1+x^2}u$. Une primitive de $x \mapsto -\frac{4x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -2\ln(1+x^2)$, donc les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les

$$u(x) = \lambda e^{-2\ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Posons $x = \tan t$, avec $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Alors $dx = (1+\tan^2 t) dt$ et $\frac{1}{(1+x^2)^2} = \cos^4 t$, d'où

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2}.$$

Comme $t = \arctan x$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, on obtient le candidat

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right).$$

Vérification directe, qui dispense de toute justification sur le changement de variable :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2) + (1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

5. D'après les questions 3 et 4, $z' = u = \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}$ équivaut à $z = \lambda F + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Donc $y = y_0 z$ est solution de (E) si et seulement si

$$y(x) = \frac{\lambda}{2} ((1+x^2) \arctan x + x) + \mu(1+x^2),$$

ce qui est bien la description de $\mathcal{S}$ avec $a = \mu$ et $b = \frac{\lambda}{2}$. Notons $y_1 : x \mapsto 1+x^2$ et $y_2 : x \mapsto x + (1+x^2) \arctan x$. Si $y_2 = c y_1$, l'évaluation en 0 donne $0 = c$, donc $y_2 = 0$; or $y_2(1) = 1 + \frac{\pi}{2} \neq 0$. Les deux fonctions ne sont donc pas proportionnelles, et (y_1, y_2) est une famille libre génératrice de $\mathcal{S}$: $\dim \mathcal{S} = 2$.

6. On a $y_1(0) = 1$, $y'_1(x) = 2x$ donc $y'_1(0) = 0$, et

$$y'_2(x) = 1 + 2x \arctan x + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 2 + 2x \arctan x,$$

donc $y_2(0) = 0$ et $y'_2(0) = 2$. Pour $y = ay_1 + by_2 \in \mathcal{S}$, les conditions initiales s'écrivent $a = \alpha$ et $2b = \beta$: il existe un unique couple (a, b) convenable, à savoir $\left(\alpha, \frac{\beta}{2}\right)$. Comme $\mathcal{S}$ contient toutes les solutions (la question 2 était une équivalence), le problème de Cauchy admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

B — Avec second membre

7. Le calcul de la question 2 n'a jamais utilisé la nullité du second membre : avec $y = (1+x^2)z$, on a toujours $(1+x^2)y'' - 2y = (1+x^2)((1+x^2)z'' + 4xz')$. Or

$$((1+x^2)^2 z')' = (1+x^2)^2 z'' + 4x(1+x^2)z' = (1+x^2)((1+x^2)z'' + 4xz').$$

Les deux membres coïncident, donc $(1+x^2)y'' - 2y = g(x)$ équivaut à $((1+x^2)^2 z')' = g(x)$.

8. Ici $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dont $\arctan$ est une primitive. L'équation devient $(1+x^2)^2 z' = \arctan x + \lambda$, soit

$$z'(x) = \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} + \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}.$$

Le second terme s'intègre en $\lambda F(x)$ (question 4). Pour le premier, le changement de variable $x = \tan t$ donne

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} dx = \int t \cos^2 t dt = \frac{t^2}{4} + \frac{t \sin 2t}{4} + \frac{\cos 2t}{8},$$

la dernière égalité s'obtenant en linéarisant $\cos^2 t$ puis en intégrant par parties. Avec $t = \arctan x$, $\sin 2t = \frac{2x}{1+x^2}$ et $\cos 2t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, d'où

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{(\arctan x)^2}{4} + \frac{x \arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4(1+x^2)} - \frac{1}{8}.$$

En multipliant par $1+x^2$ et en absorbant les constantes dans les solutions homogènes, on trouve la solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{4} + \frac{x \arctan x}{2} + \frac{1}{4} + a(1+x^2) + b(x + (1+x^2) \arctan x),$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On vérifie sans peine, en dérivant deux fois, que $y_p : x \mapsto \frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{4} + \frac{x \arctan x}{2} + \frac{1}{4}$ est bien une solution particulière.

C — Ce qui peut mal se passer

9. Pour $y_0(x) = x$, on a $y'_0 = 1$ et $y''_0 = 0$, donc $x^2 \cdot 0 + x \cdot 1 - x = 0$: y_0 est solution de (F) sur $\mathbb{R}$. Mais y_0 s'annule en 0, si bien que $z = \frac{y}{y_0}$ n'y est pas définie : la substitution $y = y_0 z$ n'a de sens que sur un intervalle ne contenant pas 0. De surcroît le coefficient dominant x^2 s'annule lui aussi en 0, et on ne peut donc pas mettre (F) sous forme résolue $y'' = \dots$ au voisinage de 0.
10. Plaçons-nous sur un intervalle I ne contenant pas 0 et posons $y = xz$. Alors $y' = z + xz'$ et $y'' = 2z' + xz''$, d'où

$$x^2 y'' + x y' - y = 2x^2 z' + x^3 z'' + xz + x^2 z' - xz = x^3 z'' + 3x^2 z'.$$

Comme $x \neq 0$ sur I , (F) équivaut à $xz'' + 3z' = 0$. En posant $u = z'$, on obtient $u' = -\frac{3}{x}u$, dont les solutions sur I sont les $u(x) = \frac{\lambda}{x^3}$. Alors $z(x) = -\frac{\lambda}{2x^2} + \mu$, et

$$y(x) = xz(x) = -\frac{\lambda}{2x} + \mu x.$$

Autrement dit, sur chacun des deux intervalles, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ x \mapsto ax + \frac{b}{x} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

espace de dimension 2, conformément au théorème de Cauchy linéaire, valable sur tout intervalle où le coefficient dominant ne s'annule pas.

11. Soit y une solution de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ses restrictions aux deux demi-droites sont du type précédent : il existe a_+, b_+, a_-, b_- tels que $y(x) = a_+x + \frac{b_+}{x}$ pour $x > 0$ et $y(x) = a_-x + \frac{b_-}{x}$ pour $x < 0$. Mais y est dérivable, donc continue en 0, alors que $|y(x)| \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0$ dès que $b_{\pm} \neq 0$: nécessairement $b_+ = b_- = 0$. Il reste $y(x) = a_+x$ pour $x > 0$, $y(x) = a_-x$ pour $x < 0$, et $y(0) = 0$ par continuité. La dérivée à droite en 0 vaut alors a_+ et la dérivée à gauche a_- : la dérivabilité en 0 impose $a_+ = a_-$. Réciproquement, $x \mapsto ax$ est bien solution sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}(x \mapsto x), \quad \dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = 1.$$

Le coefficient dominant x^2 s'annule en 0 : le théorème de Cauchy ne s'applique sur aucun intervalle contenant 0, et la dimension 2 qu'il garantit sur chaque demi-droite n'est plus assurée. Ici le recollement en 0 tue trois des quatre paramètres. Le même phénomène s'observe pour les équations $xy' - \alpha y = 0$, de solutions $\lambda |x|^\alpha$ sur chaque demi-droite : pour $\alpha = 2$ les deux branches se recollent librement et l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2, pour $\alpha = 1$ il est de dimension 1, et pour $\alpha = -1$ il est réduit à $\{0\}$.