

DM 1

À rendre le 15/09/2026

Exercice 1 – CCINP TPC 2022 (Exercice 2)

Pour l'ensemble de l'exercice, on considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt.$$

1. Calculs préliminaires

(a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1}.$$

(b) Soit la fonction $\Phi : t \mapsto \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$. Calculer sa dérivée.

(c) En utilisant les questions précédentes, montrer que :

$$u_1 = \alpha \ln(2) + \beta \pi.$$

Préciser les valeurs de α et de β .

2. Étude de la suite (u_n)

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

(b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

(c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on ne demande pas de calculer.

3. Étude de la série $\sum u_n$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{1}{(1+t^3)^n}.$$

(b) Établir le résultat :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.

4. Étude de la série $\sum \frac{u_n}{n}$

(a) En écrivant $\frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{(1+t^3)^n} \cdot 1$, effectuer une intégration par parties dans l'expression de u_n et montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) , telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a_n + b_n (u_n - u_{n+1}).$$

Identifier les expressions de a_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) **Pour les 5/2 :** En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-x)$, établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

Pour les 3/2 : On se propose d'établir le même résultat sans utiliser les séries entières.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^{1/2} x^{n-1} dx$.

(ii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Établir :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n2^n} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^N}{1-x} dx.$$

(iii) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^N}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^N(N+1)},$$

puis déterminer la limite de cette intégrale quand $N \rightarrow +\infty$.

(iv) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

(c) Déduire des questions 4a et 4b que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge et calculer sa somme. On exprimera le résultat en fonction de ℓ défini à la question 2c.

5. **Pour les 5/2 :** On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En utilisant les résultats des questions 1a et 1b, déterminer la valeur de v_1 .

(c) En comparant les termes généraux u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

(d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} v_n.$$

On pourra utiliser une intégration par parties similaire à celle de la question 4a.

(e) En déduire le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad v_n = \frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-4)}{3^n \times (n-1)!} \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$