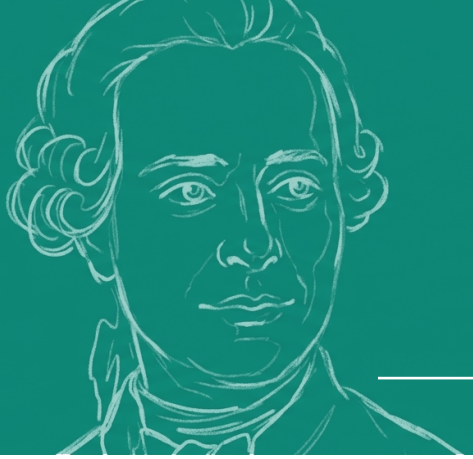


3

Techniques d'étude pour les séries numériques

Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783)

Pour commencer le programme de deuxième année, nous retournons sur les séries. Dans ce court chapitre, nous allons apprendre quelques techniques supplémentaires pour leur étude. Ces outils nous seront utiles toute l'année et doivent être maîtrisés pour comprendre le programme d'analyse de deuxième année.

Programme officiel

Suites et séries de fonctions

A – Compléments sur les séries numériques



3

Techniques d'étude pour les séries numériques

I. Comparaison série-intégrale

Méthode 3.1 (Comparaison série-intégrale)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$. Pour étudier la série $\sum f(n)$ ou ses sommes partielles :

1. **Encadrer $f(t)$ sur $[k, k+1]$ par les valeurs aux extrémités.** Soit $k \geq n_0$ un entier. Si f est décroissante, alors :
$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$
Si f est croissante, les inégalités sont renversées.
2. **Intégrer par croissance de l'intégrale.** On intègre cet encadrement sur $[k, k+1]$. Comme ce segment est de longueur 1, les deux membres extrêmes sont inchangés :
$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k).$$
3. **Sommer et recoller par la relation de Chasles.** On somme ces inégalités pour k variant de n_0 à $N-1$. La relation de Chasles recolle les intégrales en une seule :
$$\sum_{k=n_0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On obtient ainsi un encadrement de la somme partielle par une intégrale *sur un segment*, à quelques termes près qu'il faut identifier soigneusement (changement d'indice).
4. **Conclure.** On calcule l'intégrale, puis on fait tendre N vers $+\infty$. Si la série est à termes positifs, ses sommes partielles forment une suite croissante : elle converge si elle est majorée, et tend vers $+\infty$ sinon.

Exemple 3.2 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudions la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Si $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement. On suppose désormais $\alpha > 0$ et on applique la méthode à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, qui est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Notons $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ ses sommes partielles.

1. Encadrement sur $[k, k+1]$. Soit $k \geq 1$ un entier. Comme f est décroissante, pour tout $t \in [k, k+1]$:
$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

2. Croissance de l'intégrale. En intégrant sur $[k, k+1]$, qui est de longueur 1 :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

3. Sommation et relation de Chasles. Soit $N \geq 2$. En sommant pour k de 1 à $N-1$ et en recollant les intégrales :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par changement d'indice, la somme de gauche vaut $\displaystyle\sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j^\alpha} = S_N - 1$, et celle de droite vaut $S_N - \frac{1}{N^\alpha}$. Donc, pour tout $N \geq 2$:

$$S_N - 1 \leq \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq S_N - \frac{1}{N^\alpha}.$$

4. Conclusion. L'intégrale, sur un segment, se calcule :

$$\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln N & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

— Si $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$, donc $N^{1-\alpha} \leq 1$ et

$$\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1 - N^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$

L'inégalité de gauche donne alors $S_N \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ pour tout $N \geq 2$. La suite (S_N) est croissante, car les termes de la série sont positifs, et majorée : elle converge. La série converge.

— Si $0 < \alpha \leq 1$, l'inégalité de droite donne $S_N \geq \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. Or cette intégrale tend vers $+\infty$ quand $N \to +\infty$: elle vaut $\ln N$ si $\alpha = 1$, et $\frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ avec $1-\alpha > 0$ si $\alpha < 1$. Donc $S_N \to +\infty$ et la série diverge.

On retrouve bien : la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque

La même méthode permet aussi d'obtenir des *équivalents* de sommes partielles. Rien ne change aux points 1 à 3 ; c'est le point 4 qui est différent : au lieu de majorer ou minorer, on divise l'encadrement par l'équivalent candidat et on vérifie que les deux membres extrêmes tendent vers 1.
Attention : il n'existe pas de théorème disant qu'un encadrement fournit directement un équivalent. C'est bien la division par l'équivalent candidat, suivie du théorème d'encadrement appliqué au quotient, qui justifie le résultat.

Exemple 3.3 (Équivalent de $\ln(N!)$)

Montrons que $\ln(N!) \sim N \ln N$ quand $N \to +\infty$.

On remarque d'abord que $\ln(N!) = \sum_{k=1}^{N} \ln k$. On applique la méthode à la fonction $f : t \mapsto \ln t$, qui est continue et *croissante* sur $[1, +\infty[$.

1. Encadrement sur $[k, k+1]$. Soit $k \geq 1$ un entier. Comme f est croissante, pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\ln k \leq \ln t \leq \ln(k+1).$$

2. Croissance de l'intégrale. En intégrant sur $[k, k+1]$, qui est de longueur 1 :

$$\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, \mathrm{d}t \leq \ln(k+1).$$

3. Sommation et relation de Chasles. Soit $N \geq 2$. En sommant pour k de 1 à $N-1$ et en recollant les intégrales :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \ln k \leq \int_1^N \ln t \, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k+1).$$

La somme de gauche vaut $\ln(N!) - \ln N$, et celle de droite vaut, par changement d'indice, $\sum_{j=2}^{N} \ln j = \ln(N!)$. Donc, pour tout $N \geq 2$:

$$\ln(N!) - \ln N \leq \int_1^N \ln t \, \mathrm{d}t \leq \ln(N!).$$

4. Conclusion. Une intégration par parties donne :

$$\int_1^N \ln t \, \mathrm{d}t = [t \ln t - t]_1^N = N \ln N - N + 1.$$

L'encadrement se réécrit donc, pour tout $N \geq 2$:

$$N \ln N - N + 1 \leq \ln(N!) \leq N \ln N - N + 1 + \ln N.$$

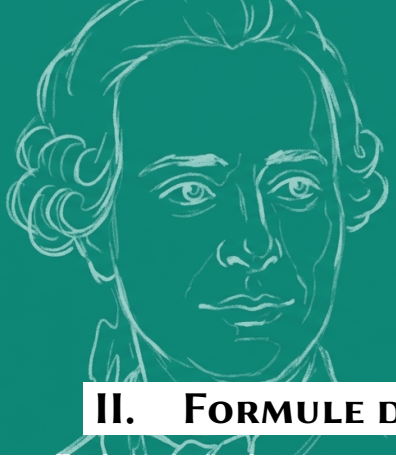
Divisons par $N \ln N$, qui est strictement positif pour $N \geq 2$:

$$1 - \frac{1}{\ln N} + \frac{1}{N \ln N} \leq \frac{\ln(N!)}{N \ln N} \leq 1 - \frac{1}{\ln N} + \frac{1}{N \ln N} + \frac{1}{N}.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers 1 quand $N \to +\infty$. Par le théorème d'encadrement, $\frac{\ln(N!)}{N \ln N} \to 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\ln(N!) \sim N \ln N.}$$

L'encadrement obtenu au point 4 est en fait plus précis : il donne $\ln(N!) = N \ln N - N + O(\ln N)$.



3

Techniques d'étude pour les séries numériques

II. Formule de Stirling

Théorème 3.4 (Formule de Stirling)

Quand $n \to +\infty$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Démonstration

La démonstration est rédigée dans un exercice de la section « Pour aller plus loin ». Elle se déroule en trois temps : on établit d'abord l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, on étudie ensuite les intégrales de Wallis, et l'on combine enfin les deux résultats pour obtenir $C = \sqrt{2\pi}$. □

Exemple 3.5

Donnons un équivalent de $\frac{n!}{n^n}$. La formule de Stirling s'écrit $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}$. En divisant par n^n, qui ne s'annule pas :

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n}.$$

Exemple 3.6 (Coefficient binomial central)

Donnons un équivalent de $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.
En appliquant la formule de Stirling à la suite extraite d'indice $2n$:

$$(2n)! \sim \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} = 2\sqrt{\pi n} \cdot \frac{4^n n^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}.$$

Par produit d'équivalents :

$$(n!)^2 \sim 2\pi n \cdot \frac{n^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}.$$

Comme $(n!)^2$ ne s'annule pas, on peut faire le quotient :

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2\sqrt{\pi n} \cdot 4^n}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exemple 3.7

Donnons un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$.
On ne peut pas élever un équivalent à la puissance $\frac{1}{n}$: l'exposant dépend de n. On

revient donc à la définition. Posons $r_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$, de sorte que :

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{\mathrm{e}}} = r_n^{1/n}.$$

La formule de Stirling donne $r_n \sim \sqrt{2\pi n}$, donc $\ln r_n = \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$ et $\frac{1}{n}\ln r_n \to 0$. Par continuité de l'exponentielle, $r_n^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln r_n} \to 1$, c'est-à-dire :

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{\mathrm{e}}.$$

Remarque

La formule de Stirling est surtout utile pour étudier les séries dont le terme général comporte des factorielles : elle en fournit un équivalent, que l'on compare ensuite aux séries de référence.

Exemple 3.8

Étudions la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n}$.

La formule de Stirling, divisée par n^n qui ne s'annule pas, donne $\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n}$ (voir le premier exemple ci-dessus), donc :

$$u_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

En particulier $u_n \not\to 0$: la série diverge grossièrement.

Exemple 3.9

Étudions la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{4^n (n!)^2}{n^2\,(2n)!}$.

On utilise l'équivalent du coefficient binomial central : comme $\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et que $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, on obtient par passage à l'inverse :

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}, \qquad \text{donc} \qquad u_n \sim \frac{4^n}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \frac{\sqrt{\pi}}{n^{3/2}}.$$

La série est à termes positifs et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc convergente. Par critère d'équivalence, la série converge.



3

Techniques d'étude pour les séries numériques

III. Règle de d'Alembert

Proposition 3.10 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls. On suppose que

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \to \ell \in [0, +\infty].$$

Alors :

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$), la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ($u_n \not\to 0$).
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration

Cas $\ell < 1$. Soit r tel que $\ell < r < 1$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq r.$$

Par récurrence, pour tout $n \geq N$:

$$|u_n| \leq |u_N| \cdot r^{n-N}.$$

Comme $0 < r < 1$, la série géométrique $\sum r^{n-N}$ converge, donc par comparaison, $\sum |u_n|$ converge.
Cas $\ell > 1$. Soit r tel que $1 < r < \ell$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq r > 1.$$

Par récurrence, $|u_n| \geq |u_N| \cdot r^{n-N} \to +\infty$. Le terme général ne tend pas vers 0 : il y a divergence grossière.
Cas $\ell = 1$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, mais dans les deux cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$. La règle ne permet donc pas de conclure. □

Remarque

La règle de d'Alembert est particulièrement adaptée aux séries dont le terme général fait intervenir des factorielles, des puissances ou des exponentielles, car le quotient u_{n+1}/u_n se simplifie alors aisément.

Exemple 3.11 (Série exponentielle)

Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Les termes de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ sont non nuls et :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

La série converge donc absolument, et ceci pour tout $x \in \mathbb{C}$ (le cas $x = 0$ étant immédiat).
C'est une seconde démonstration de la convergence de la série exponentielle, bien plus courte que celle par l'inégalité de Taylor–Lagrange. Notons toutefois qu'elle ne donne que la convergence : elle ne dit rien de la valeur e^x de la somme.

Exemple 3.12 (Séries géométriques dérivées)

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. On étudie la série $\sum_{n\geq p} \binom{n}{p} x^{n-p}$, dont les termes sont non nuls.
Comme $\frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n+1-p)!} = \frac{n+1}{n+1-p}$, on obtient :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{n+1-p}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|\,.$$

Si $|x| < 1$, la série converge absolument ; si $|x| > 1$, elle diverge grossièrement. Pour $|x| = 1$ la règle ne conclut pas, mais on n'en a pas besoin : $|u_n| = \binom{n}{p} \geq 1$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
Pour $p = 0$, on retrouve la série géométrique.

Exemple 3.13 (Contre-exemple : les séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

La règle de d'Alembert ne conclut donc *jamais* sur les séries de Riemann, quel que soit α. Or leur nature dépend bel et bien de α : elles convergent si et seulement si $\alpha > 1$. Le cas $\ell = 1$ ne contient donc réellement aucune information.

Exemple 3.14

Étudions la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+(-1)^n}}{3^n}$, dont les termes sont non nuls. Le quotient vaut :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{(n+1)+(-1)^{n+1}}}{2^{n+(-1)^n}} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2^{1+(-1)^{n+1}-(-1)^n}}{3} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{8}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ce quotient n'a pas de limite : la règle de d'Alembert ne s'applique pas. Elle ne s'applique d'ailleurs pas non plus « par morceaux » : la sous-suite des quotients d'indice impair tend vers $\frac{8}{3} > 1$, ce qui pourrait faire croire à une divergence.

Pourtant, pour tout n, $n + (-1)^n \leq n + 1$, donc :

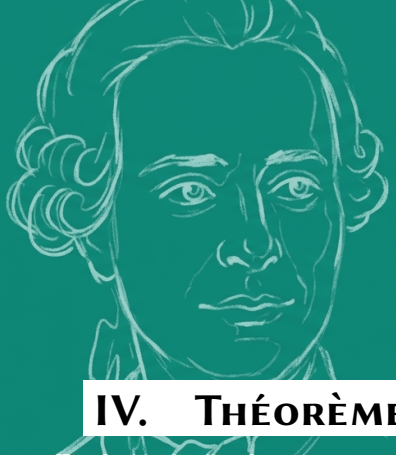
$$0 < \frac{2^{n+(-1)^n}}{3^n} \leq \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

terme général d'une série géométrique convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge.

Remarque

Ce dernier exemple montre ce que la règle de d'Alembert voit réellement. Sa démonstration n'utilise que la domination géométrique $|u_n| \leq |u_N|\, r^{n-N}$ valable à partir d'un certain rang : c'est le comportement géométrique de u_n à l'infini qui décide, et lui seul. La règle n'est qu'un moyen commode d'obtenir cette domination, et quand elle échoue on peut souvent l'établir directement.

Les premiers termes, eux, n'ont aucune influence. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \frac{100^n}{n!}$ converge, puisque son quotient vaut $\frac{100}{n+1} \to 0$, alors même que son terme général *croît* jusqu'au rang 99 pour y atteindre une valeur astronomique.



3

Techniques d'étude pour les séries numériques

IV. Théorème spécial des séries alternées

Définition 3.15 (Série alternée)

On dit qu'une série $\sum u_n$ est *alternée* si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant, c'est-à-dire si les termes de la suite (u_n) alternent en signe.
On peut alors écrire $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout n (ou $a_n \leq 0$ pour tout n).

Théorème 3.16 (Séries alternées)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que :

1. (a_n) est décroissante,
2. $a_n \to 0$.

Alors :

1. La série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
2. Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.
3. Le reste R_n est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} a_{n+1}$.

Démonstration

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ les sommes partielles.
Étude des sous-suites paires et impaires. On a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} = -(a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq 0$$

car (a_n) est décroissante. Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.
De même :

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0.$$

Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.
Encadrement. On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0$, donc $S_{2n+1} \leq S_{2n}$ pour tout n. En combinant avec la monotonie :

$$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$$

pour tout $n \geq 0$. Les deux suites sont donc monotones et bornées, elles convergent.
Convergence vers une même limite. On a $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$. Donc les deux sous-suites convergent vers la même limite S, et par conséquent $S_n \to S$. La série converge.
Majoration du reste. On a $R_n = S - S_n$. Comme $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n, si $n = 2p$ est pair :

$$R_{2p} = S - S_{2p} \leq 0 \quad \text{et} \quad \left|R_{2p}\right| = S_{2p} - S \leq S_{2p} - S_{2p+1} = a_{2p+1}.$$

Si $n = 2p + 1$ est impair :

$$R_{2p+1} = S - S_{2p+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad \left|R_{2p+1}\right| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = a_{2p+2}.$$

Dans tous les cas, $|R_n| \leq a_{n+1}$ et R_n est du signe de $(-1)^{n+1} a_{n+1}$. □

Exemple 3.17 (Série harmonique alternée)

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ est une série alternée. La suite $a_n = 1/n$ est positive, décroissante et tend vers 0, donc le théorème des séries alternées s'applique : la série converge.

En revanche, elle ne converge pas absolument : la série des valeurs absolues est la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, qui diverge. Rappelons le vocabulaire : une série qui converge sans converger absolument est dite *semi-convergente*. La série harmonique alternée en est l'exemple le plus simple, et c'est aussi elle qui montre que la réciproque du théorème « toute série absolument convergente converge » est fausse.

De plus, le reste R_n vérifie $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$: par exemple, en prenant $n = 99$ termes, l'erreur est inférieure à $1/100 = 0{,}01$.

Enfin, sa somme vaut $\ln 2$, ce que l'on démontre ci-dessous.

Somme de la série harmonique alternée

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ les sommes partielles. L'idée est de reconnaître $\frac{1}{k}$ comme l'intégrale de x^{k-1} sur $[0,1]$, ce qui transforme la somme partielle en une somme géométrique.

Soit $n \geq 1$. Pour tout $x \in [0,1]$, la somme géométrique de raison $-x \neq 1$ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x}.$$

Intégrons cette égalité sur le segment $[0,1]$. À gauche, par linéarité :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = S_n.$$

À droite, en séparant les deux termes :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 - R_n = \ln 2 - R_n, \qquad \text{où } R_n = \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

On a donc $S_n = \ln 2 - R_n$ pour tout $n \geq 1$.

Il reste à majorer R_n. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 + x \geq 1$, donc $\left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right| \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$|R_n| \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $S_n \to \ln 2$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.}$$

Notons que $R_n = \ln 2 - S_n$ est exactement le reste de la série : la majoration obtenue ici est donc la même que celle donnée par le théorème spécial des séries alternées. □

Exemple 3.18

Étudions la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$. On pose $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+100}$, qui est positif.

La suite (a_n) n'est *pas* décroissante : $a_1 = \frac{1}{101}$ est bien plus petit que $a_{100} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$.

Étudions donc la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+100}$, dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+100) - \sqrt{x}}{(x+100)^2} = \frac{(x+100) - 2x}{2\sqrt{x}\,(x+100)^2} = \frac{100 - x}{2\sqrt{x}\,(x+100)^2}.$$

Ainsi f est croissante sur $]0, 100]$ et décroissante sur $[100, +\infty[$. La suite (a_n) n'est donc décroissante qu'à partir du rang 100. Par ailleurs $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
Appliquons le théorème spécial des séries alternées à la série $\sum_{n\geq 100} (-1)^n a_n$. En posant $b_k = a_{k+100}$, la suite $(b_k)_{k\geq 0}$ est positive, décroissante et tend vers 0, et $(-1)^{k+100} b_k = (-1)^k b_k$: le théorème s'applique et cette série converge. Comme modifier ou retirer un nombre fini de termes ne change pas la nature d'une série, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$ converge.
Elle ne converge pas absolument : $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, donc divergente. La série est semi-convergente.

Remarque

Attention. Les théorèmes de comparaison (domination, équivalence) supposent tous que les séries sont à termes de signe constant. Sur une série alternée, ils sont *faux* : deux séries alternées dont les termes généraux sont équivalents peuvent être de natures différentes.
Prenons en effet, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

On a $\frac{v_n}{u_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \to 1$, donc $v_n \sim u_n$. Pourtant $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Justification du contre-exemple

La série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge par le théorème spécial des séries alternées : $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0.
Pour $\sum v_n$, multiplions numérateur et dénominateur par $\sqrt{n} - (-1)^n$. Comme $((-1)^n)^2 = 1$, le dénominateur devient $n - 1$, qui est non nul pour $n \geq 2$:

$$v_n = \frac{(-1)^n\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)}{n-1} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

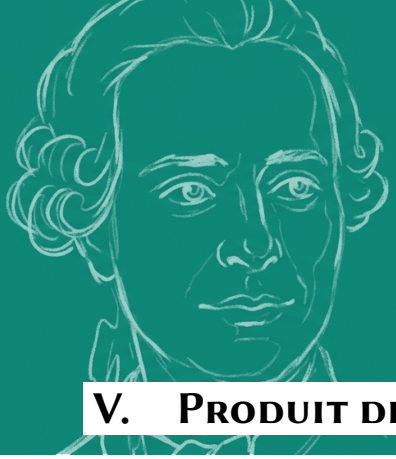
Cette écriture est exacte, et non un développement asymptotique.
Le premier terme est celui d'une série convergente. En effet, posons $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ pour $n \geq 2$. Cette suite est positive, tend vers 0, et elle est décroissante car la fonction $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ vérifie sur $]1, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - 2x}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2} < 0.$$

Le théorème spécial des séries alternées s'applique donc à $\sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$, qui converge.

Le second terme, lui, est celui d'une série divergente : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}$ est la série harmonique.

Si $\sum v_n$ convergeait, alors, par différence de deux séries convergentes, $\sum \left(\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - v_n \right) = \sum \frac{1}{n-1}$ convergerait aussi : c'est absurde. Donc $\sum v_n$ diverge. □



3 Techniques d'étude pour les séries numériques

V. Produit de Cauchy

Définition 3.19 (Produit de Cauchy)

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes complexes. On appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i\, b_j.$$

Remarque

C'est la formule que l'on obtient en développant formellement le produit $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$ et en regroupant les termes $a_i b_j$ selon la valeur de $i + j$. Rien ne garantit a priori qu'un tel regroupement soit licite : c'est précisément l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.20 (Produit de Cauchy)

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes complexes **absolument convergentes**. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergent et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Démonstration (hors-programme)

Notons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ les sommes partielles, A et B les sommes des deux séries, et enfin $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ et $\beta = \sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|$, qui sont des réels par hypothèse.

Convergence absolue de $\sum c_n$. Par inégalité triangulaire, $|c_k| \leq \sum_{i+j=k} |a_i|\,|b_j|$. En sommant pour k de 0 à n, on somme les $|a_i|\,|b_j|$ sur le triangle $\{(i,j) : i + j \leq n\}$, qui est inclus dans le carré $[\![0, n]\!]^2$. Tous ces termes étant positifs :

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right) \leq \alpha\beta.$$

Les sommes partielles de $\sum |c_n|$ forment donc une suite croissante et majorée : elle converge, et $\sum c_n$ converge absolument.

Valeur de la somme. Avec les mêmes notations géométriques :

$$C_n = \sum_{i+j\le n} a_i b_j \qquad \text{et} \qquad A_n B_n = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} a_i b_j.$$

Le triangle étant inclus dans le carré, la différence porte sur $D_n = \{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 : i+j > n\}$:

$$A_n B_n - C_n = \sum_{(i,j)\in D_n} a_i b_j.$$

Or si $(i,j) \in D_n$, alors $2\max(i,j) \ge i+j > n$, donc $i > n/2$ ou $j > n/2$. En posant $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, l'ensemble D_n est donc inclus dans la réunion de $[\![p+1,n]\!] \times [\![0,n]\!]$ et de $[\![0,n]\!] \times [\![p+1,n]\!]$. Par inégalité triangulaire et positivité :

$$|A_n B_n - C_n| \le \left(\sum_{i=p+1}^{n} |a_i|\right)\beta + \alpha\left(\sum_{j=p+1}^{n} |b_j|\right) \le \beta \sum_{i=p+1}^{+\infty} |a_i| + \alpha \sum_{j=p+1}^{+\infty} |b_j|.$$

Les restes d'une série convergente tendent vers 0 et $p \to +\infty$: le majorant tend donc vers 0. Ainsi $C_n - A_n B_n \to 0$. Comme $A_n B_n \to AB$, on conclut que $C_n \to AB$. □

Exemple 3.21 (Série géométrique élevée au carré)

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$. La série $\sum_{n\ge 0} x^n$ est absolument convergente, de somme $\frac{1}{1-x}$. Son produit de Cauchy avec elle-même a pour terme général :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k\, x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^n = (n+1)x^n.$$

La série $\sum x^n$ étant absolument convergente, le théorème du produit de Cauchy donne donc, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En recommençant, le produit de Cauchy de $\sum x^n$ et de $\sum (n+1)x^n$ a pour terme général $\sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k x^{n-k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+2}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

On reconnaît les séries géométriques dérivées rencontrées plus haut, dont on n'avait établi que la nature : le produit de Cauchy en donne la somme. Par exemple, pour $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

Exemple 3.22 (L'équation fonctionnelle de l'exponentielle)

Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Les séries $\sum \frac{x^n}{n!}$ et $\sum \frac{y^n}{n!}$ sont absolument convergentes, de sommes e^x et e^y. Le terme général de leur produit de Cauchy est :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

la dernière égalité étant la formule du binôme de Newton. Les deux séries étant absolument convergentes, le théorème du produit de Cauchy donne alors :

$$e^x \, e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Autrement dit, la propriété fondamentale de l'exponentielle se lit directement sur son développement en série.

Remarque

L'hypothèse de convergence absolue n'est pas décorative. Prenons $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour $n \geq 0$. La série $\sum a_n$ converge par le théorème spécial des séries alternées, mais pas absolument (série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$).
Son produit de Cauchy avec elle-même vaut :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Or pour $0 \leq k \leq n$, on a $k+1 \leq n+1$ et $n-k+1 \leq n+1$, donc $\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq n+1$ et chaque terme de la somme est minoré par $\frac{1}{n+1}$. Comme il y a $n+1$ termes :

$$|c_n| \geq (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 1.$$

Le terme général ne tend pas vers 0 : le produit de Cauchy diverge grossièrement, alors même que les deux séries de départ convergent.