

DM 1

À rendre le 15/09/2026

Exercice 1 – CCINP TPC 2022 (Exercice 2)

Pour l'ensemble de l'exercice, on considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt.$$

1. Calculs préliminaires

(a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1}.$$

(b) Soit la fonction $\Phi : t \mapsto \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$. Calculer sa dérivée.

(c) En utilisant les questions précédentes, montrer que :

$$u_1 = \alpha \ln(2) + \beta \pi.$$

Préciser les valeurs de α et de β .

2. Étude de la suite (u_n)

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

(b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

(c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on ne demande pas de calculer.

3. Étude de la série $\sum u_n$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{1}{(1+t^3)^n}.$$

(b) Établir le résultat :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.

4. Étude de la série $\sum \frac{u_n}{n}$

(a) En écrivant $\frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{(1+t^3)^n} \cdot 1$, effectuer une intégration par parties dans l'expression de u_n et montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) , telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a_n + b_n (u_n - u_{n+1}).$$

Identifier les expressions de a_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) **Pour les 5/2 :** En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-x)$, établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

Pour les 3/2 : On se propose d'établir le même résultat sans utiliser les séries entières.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^{1/2} x^{n-1} dx$.

(ii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Établir :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n2^n} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^N}{1-x} dx.$$

(iii) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^N}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^N(N+1)},$$

puis déterminer la limite de cette intégrale quand $N \rightarrow +\infty$.

(iv) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

(c) Déduire des questions 4a et 4b que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge et calculer sa somme. On exprimera le résultat en fonction de ℓ défini à la question 2c.

5. **Pour les 5/2 :** On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En utilisant les résultats des questions 1a et 1b, déterminer la valeur de v_1 .

(c) En comparant les termes généraux u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

(d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} v_n.$$

On pourra utiliser une intégration par parties similaire à celle de la question 4a.

(e) En déduire le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad v_n = \frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-4)}{3^n \times (n-1)!} \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

DM 1 – CORRECTION

Exercice 1 – CCINP TPC 2022 (Exercice 2)

1. Calculs préliminaires

- (a) On part de la factorisation $1 + t^3 = (1 + t)(t^2 - t + 1)$, dont le second facteur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (son discriminant vaut $1 - 4 = -3 < 0$).

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on réduit le membre de droite au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1} &= \frac{a(t^2-t+1) + (b(2t-1) + c)(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)} \\ &= \frac{(a+2b)t^2 + (-a+b+c)t + (a-b+c)}{1+t^3}. \end{aligned}$$

Comme $1 + t^3 \neq 0$ pour $t \neq -1$, l'égalité demandée équivaut à :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad (a+2b)t^2 + (-a+b+c)t + (a-b+c) - 1 = 0.$$

Le polynôme du membre de gauche admet une infinité de racines : il est donc nul, et l'égalité équivaut à la nullité de ses coefficients, c'est-à-dire au système :

$$\begin{cases} a+2b=0, \\ -a+b+c=0, \\ a-b+c=1. \end{cases}$$

La première équation donne $a = -2b$; en reportant dans la deuxième, $3b + c = 0$, soit $c = -3b$; la troisième devient alors $-2b - b - 3b = 1$, d'où $b = -\frac{1}{6}$, puis $a = \frac{1}{3}$ et $c = \frac{1}{2}$.

D'où :

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

- (b) La fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(t) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{(2t-1)^2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3 + (2t-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{4t^2 - 4t + 4} = \frac{\sqrt{3}}{2(t^2 - t + 1)}.$$

D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2(t^2 - t + 1)}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{t^2 - t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Phi'(t).$$

- (c) En intégrant sur $[0, 1]$ la décomposition de la question 1a :

$$u_1 = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1}.$$

Traitons les trois intégrales séparément.

$$- \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

— Le numérateur $2t - 1$ est la dérivée du dénominateur $t^2 - t + 1$, qui ne s'annule pas :

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt = [\ln(t^2-t+1)]_0^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

— D'après la question 1b :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\Phi(t)]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

car $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ et $\arctan$ est impaire.

Finalement :

$$u_1 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

D'où :

$$u_1 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi, \quad \text{soit } \alpha = \frac{1}{3} \text{ et } \beta = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

2. Étude de la suite (u_n)

- (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. On a $t^3 \geq 0$, donc $1 + t^3 \geq 1 > 0$ et par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, $(1 + t^3)^n \geq 1$. En passant à l'inverse :

$$0 \leq \frac{1}{(1 + t^3)^n} \leq 1.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$ (segment de longueur 1) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 1.}$$

- (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. Comme $1 + t^3 \geq 1$, on a $(1 + t^3)^{n+1} \geq (1 + t^3)^n > 0$, donc :

$$\frac{1}{(1 + t^3)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1 + t^3)^n}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, $u_{n+1} \leq u_n$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

- (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 d'après la question 2a. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in [0, 1].}$

3. Étude de la série $\sum u_n$

- (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. Comme $0 \leq t \leq 1$, on a $t^3 \leq t$, donc $1 + t^3 \leq 1 + t$. Ces deux quantités étant strictement positives, l'élevation à la puissance n puis le passage à l'inverse donnent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1 + t)^n} \leq \frac{1}{(1 + t^3)^n}.$$

- (b) Soit $n \geq 2$. Une primitive de $t \mapsto (1 + t)^{-n}$ est $t \mapsto \frac{(1 + t)^{1-n}}{1 - n}$, d'où :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1 + t)^n} = \left[\frac{(1 + t)^{1-n}}{1 - n} \right]_0^1 = \frac{1}{n - 1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Comme $\frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{(1 + t)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

- (c) Posons $w_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1 + t)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3b, $w_n \sim \frac{1}{n}$, ces deux suites sont à termes positifs et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge : par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum w_n$ diverge.

Or, en intégrant sur $[0, 1]$ l'inégalité de la question 3a, $0 \leq w_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$

4. Étude de la série $\sum \frac{u_n}{n}$ (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour $t \in [0, 1]$:

$$g(t) = \frac{1}{(1+t^3)^n}, \quad h(t) = t.$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec $g'(t) = \frac{-3nt^2}{(1+t^3)^{n+1}}$ et $h'(t) = 1$.

L'intégration par parties donne :

$$u_n = \int_0^1 g(t)h'(t) dt = [g(t)h(t)]_0^1 - \int_0^1 g'(t)h(t) dt = \frac{1}{2^n} + 3n \int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt.$$

Or, en écrivant $t^3 = (1+t^3) - 1$:

$$\frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^3)^n} - \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}},$$

dont l'intégrale sur $[0, 1]$ vaut $u_n - u_{n+1}$. On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{2^n} + 3n (u_n - u_{n+1}), \quad \text{soit } a_n = \frac{1}{2^n} \text{ et } b_n = 3n.$$

(b) **Pour les 5/2 :**

Pour tout réel x tel que $|x| < 1$, on dispose du développement en série entière :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

de rayon de convergence 1. Comme $|\frac{1}{2}| < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2.$$

Pour les 3/2 :(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et :

$$\int_0^{1/2} x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{n2^n}.$$

(ii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La somme est *finie* : la linéarité de l'intégrale s'applique et, pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$x \neq 1$ donne $\sum_{n=1}^N x^{n-1} = \frac{1-x^N}{1-x}$. D'où :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n2^n} = \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^N x^{n-1} dx = \int_0^{1/2} \frac{1-x^N}{1-x} dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} - \int_0^{1/2} \frac{x^N}{1-x} dx.$$

Or $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = [-\ln(1-x)]_0^{1/2} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$, ce qui donne l'égalité voulue.

- (iii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $1 - x \geq \frac{1}{2} > 0$, donc $\frac{1}{1-x} \leq 2$, et $x^N \geq 0$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^N}{1-x} dx \leq 2 \int_0^{1/2} x^N dx = 2 \times \frac{1}{(N+1)2^{N+1}} = \frac{1}{2^N(N+1)}.$$

Comme $\frac{1}{2^N(N+1)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, le théorème d'encadrement donne $\int_0^{1/2} \frac{x^N}{1-x} dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

- (iv) D'après (ii) et (iii), la suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n2^n}$ converge vers $\ln 2$ quand $N \rightarrow +\infty$, ce qui est exactement la définition de la convergence de la série et de la valeur de sa somme :

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2.}$$

- (c) En divisant la relation de la question 4a par n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n2^n} + 3(u_n - u_{n+1}).$$

Sommons pour n allant de 1 à N ; la seconde somme est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n2^n} + 3(u_1 - u_{N+1}).$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, la première somme tend vers $\ln 2$ (question 4b) et $u_{N+1} \rightarrow \ell$ (question 2c). Les sommes partielles de $\sum \frac{u_n}{n}$ convergent donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = \ln 2 + 3(u_1 - \ell) = \ln 2 + 3\left(\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) - 3\ell.$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = 2\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 3\ell.}$$

5. Pour les 5/2 :

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus :

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}.$$

Comme $3n \geq 3 > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n}}$ converge (intégrale de Riemann). Par le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ converge, et l'intégrale sur $[0, 1]$ est celle d'une fonction continue sur un segment. Ainsi :

$$\boxed{v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \text{ est bien définie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- (b) Soit $A > 0$. En intégrant sur $[0, A]$ la décomposition de la question 1a et en utilisant la question 1b :

$$\int_0^A \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln(1+A) - \frac{1}{6} \ln(A^2 - A + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} (\Phi(A) - \Phi(0)).$$

Les deux premiers termes se regroupent :

$$\frac{1}{3} \ln(1+A) - \frac{1}{6} \ln(A^2 - A + 1) = \frac{1}{6} \ln \frac{(1+A)^2}{A^2 - A + 1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \ln 1 = 0,$$

car $\frac{(1+A)^2}{A^2 - A + 1} \rightarrow 1$. Par ailleurs $\Phi(A) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\Phi(0) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\Phi(A) - \Phi(0)) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

D'où :

$$v_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction intégrée est positive, donc :

$$v_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \geq u_n \geq 0.$$

Or $\sum u_n$ diverge (question 3c) et les deux séries sont à termes positifs : par comparaison,

la série $\sum v_n$ diverge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$. La même intégration par parties qu'à la question 4a, menée sur $[0, A]$, donne :

$$\int_0^A \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n \int_0^A \left(\frac{1}{(1+t^3)^n} - \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} \right) dt.$$

Comme $n \geq 1$, $\frac{A}{(1+A^3)^n} \sim \frac{1}{A^{3n-1}} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$, car $3n-1 \geq 2 > 0$. Les intégrales définissant v_n et v_{n+1} convergent (question 5a), donc on peut faire tendre A vers $+\infty$:

$$v_n = 3n(v_n - v_{n+1}).$$

D'où $3n v_{n+1} = 3n v_n - v_n = (3n-1)v_n$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} v_n.$$

(e) Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k > 0$ (intégrale convergente d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle) : on peut donc écrire le produit télescopique des relations précédentes pour k allant de 1 à $n-1$:

$$v_n = v_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = v_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k} = v_1 \times \frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-4)}{3^{n-1} \times (n-1)!},$$

car $\prod_{k=1}^{n-1} (3k-1) = 2 \times 5 \times \cdots \times (3(n-1)-1)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} 3k = 3^{n-1} (n-1)!$.

En remplaçant $v_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ et en absorbant le facteur 3 du dénominateur :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad v_n = \frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-4)}{3^n \times (n-1)!} \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$