
QUINZAINE DU 28/09 AU 11/10

1 Contenu du cours

Chapitre 3 - Techniques d'études pour les séries numériques (cours et TD)

1. Comparaison série-intégrale

Méthode, démonstration pour les séries de Riemann, obtention d'équivalents.

2. Formule de Stirling

Formule de Stirling, exemples d'applications, utilisation de l'équivalent de Stirling pour l'étude de la convergence de série.

3. Règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert, convergence de la série exponentielle, convergence des séries géométriques dérivées, étude de cas $\ell = 1$.

4. Théorème spécial des séries alternées

Énoncé, exemples, pas de critère d'équivalence avec les séries alternées.

5. Produit de Cauchy

Énoncé, application au calcul de séries géométriques dérivées, formule de morphisme de l'exponentielle.

Chapitre 4 - Compléments d'algèbre linéaire (cours et TD)

1. Produits et sommes d'espaces vectoriels

Définitions, dimensions, sommes directes, base adaptée à une décomposition en somme directe, base adaptée à un sous-espace.

2. Sous-espaces stables

Définition, exemples usuels, endomorphisme induit, matrice avec un sous-espace stable, cas d'une décomposition en somme directe de sous-espaces stables.

3. Matrices par blocs

Compatibilité avec les opérations d'addition, multiplication (matricielle) et transposition, déterminant par blocs pour les matrices triangulaires par blocs.

4. Trace

Définition, propriétés élémentaires, étude du noyau, trace d'un produit, invariant de similitude, trace d'un endomorphisme, le rang d'un projecteur est sa trace.

5. Interpolation de Lagrange

Théorème, polynômes interpolateurs de Lagrange, coordonnées dans la base de Lagrange, $\sum L_i = 1$, matrices et déterminant de Vandermonde, application à la liberté des $t \mapsto e^{a_i t}$.

2 Questions de cours

- Déterminer un équivalent de $\sum_{n=1}^N \ln(n)$ par comparaison série-intégrale.
- Application de la formule de Stirling à une étude de convergence de série. Exemple du cours : $\sum_{n \geq 1} \frac{4^n (n!)^2}{n^2 (2n)!}$.
- Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Converge-t-elle absolument ?
- Calculer $\sum_{k \geq 0} (k+1)q^k$ pour $|q| < 1$ en utilisant un produit de Cauchy.
- Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v si u et v commutent.
- Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.