



5

Normes

Hermann Minkowski (1864 – 1909)

Le but de ce chapitre est de formaliser la notion de norme sur des espaces plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous pourrons alors parler de distance entre deux vecteurs, deux matrices ou deux fonctions, et surtout définir la limite de suites non numériques. Nous verrons que la plupart des espaces portent plusieurs normes : se posent alors les questions de leurs relations entre elles et du choix de l'une plutôt que de l'autre. Nous verrons sur des exemples que ce choix est tantôt sans conséquence, tantôt décisif.

Programme officiel

Espaces vectoriels normés

- a) Normes
- b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
- c) Comparaison des normes

I. NORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL

1. Généralités

Définition 5.1 (Norme)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une norme sur E est une fonction $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. N est homogène : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
2. N vérifie l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$;
3. N vérifie l'axiome de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Exemple 5.2 (La valeur absolue et le module)

Sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$, la valeur absolue est une norme : pour tous $\lambda, x \in \mathbb{R}$, $|\lambda x| = |\lambda| |x|$; pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$; et $|x| = 0$ entraîne $x = 0$. De même, sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, le module est une norme : ce sont les trois mêmes propriétés, connues depuis la première année, cette fois pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Remarque

Les trois axiomes de la définition ne sont rien d'autre que les propriétés de la valeur absolue et du module dont on se sert en permanence pour majorer. Une norme est donc un substitut de la valeur absolue sur un espace vectoriel quelconque, et $\|x\|$ se lit « norme du vecteur x ».

Exemple 5.3 (La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

c'est-à-dire la longueur du vecteur x au sens de la géométrie usuelle.

C'est bien une norme au sens que l'on vient de définir. L'homogénéité vient de ce que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2} = \sqrt{\lambda^2} \|x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2.$$

Pour la séparation, si $\|x\|_2 = 0$, alors $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$; c'est une somme de termes positifs, donc ils sont tous nuls et $x = 0$. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate; nous la démontrerons plus loin, $\|\cdot\|_2$ étant la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

On note en général une norme $\|\cdot\|$ plutôt que N , et un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé, ce que l'on note $(E, \|\cdot\|)$.

Remarque

Nous disposons donc d'une norme sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}^n$: dans ces trois cas, la longueur d'un vecteur allait de soi et la définition ne fait que l'enregistrer. Tout l'intérêt de cette définition est qu'elle s'applique aussi à des espaces où cette longueur n'a a priori aucun sens géométrique : les matrices, les suites, les fonctions. Munir ces espaces de normes, puis en tirer les notions de distance, de convergence et de continuité, est l'objet du reste du chapitre.

Exemple 5.4 (Une norme sur $\mathbb{C}^2$)

Sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, posons, pour $u = (a, b) \in \mathbb{C}^2$,

$$N(u) = \sqrt{\bar{a}a + \bar{b}b}.$$

Comme $\bar{a}a = |a|^2$, cela s'écrit aussi $N(u) = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

C'est une norme sur $\mathbb{C}^2$. L'homogénéité vient de ce que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$N(\lambda u) = \sqrt{|\lambda a|^2 + |\lambda b|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 (|a|^2 + |b|^2)} = |\lambda| N(u).$$

Pour la séparation, si $N(u) = 0$, alors $|a|^2 + |b|^2 = 0$; c'est une somme de termes positifs, donc $|a| = |b| = 0$ et $u = 0$.

Pour l'inégalité triangulaire, écrivons les coordonnées en parties réelle et imaginaire : $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$. Comme $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2$ et $|b|^2 = b_1^2 + b_2^2$,

$$N(u) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2} = \|(a_1, a_2, b_1, b_2)\|_2.$$

Soit alors $v = (c, d) \in \mathbb{C}^2$, avec $c = c_1 + ic_2$ et $d = d_1 + id_2$. Les parties réelle et imaginaire de $a + c$ sont $a_1 + c_1$ et $a_2 + c_2$, et de même pour $b + d$; la formule ci-dessus, appliquée à $u + v$, donne donc

$$N(u+v) = \|(a_1 + c_1, a_2 + c_2, b_1 + d_1, b_2 + d_2)\|_2 = \|(a_1, a_2, b_1, b_2) + (c_1, c_2, d_1, d_2)\|_2.$$

L'inégalité triangulaire de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$ donne alors

$$N(u+v) \leq \|(a_1, a_2, b_1, b_2)\|_2 + \|(c_1, c_2, d_1, d_2)\|_2 = N(u) + N(v).$$

Proposition 5.5 (Seconde inégalité triangulaire)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Pour tous $x, y \in E$:

$$||x| - |y|| \leq \|x - y\|.$$

Démonstration

Soient $x, y \in E$. En écrivant $x = (x - y) + y$, l'inégalité triangulaire donne

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

L'homogénéité donne $\|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\|$, donc l'inégalité précédente, appliquée en échangeant x et y , s'écrit

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

Le réel $\|x - y\|$ majore ainsi $\|x\| - \|y\|$ et son opposé : il majore donc leur valeur absolue. $\square$

Remarque

C'est l'analogue de l'inégalité $||a| - |b|| \leq |a - b|$ connue sur $\mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire sert à majorer $\|x + y\|$; celle-ci sert à minorer une norme, en contrôlant l'écart entre $\|x\|$ et $\|y\|$ par $\|x - y\|$.

Définition 5.6 (Distance associée)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. On appelle distance associée à $\|\cdot\|$ sur E l'application :

$$d: \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$$

Proposition 5.7 (Propriétés de la distance associée)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$. Alors, pour tous $x, y, z \in E$:

1. séparation : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2. symétrie : $d(y, x) = d(x, y)$;
3. inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Démonstration

Soient $x, y, z \in E$.

Si $x = y$, alors $d(x, y) = \|0_E\| = \|0 \cdot 0_E\| = 0$ par homogénéité. Réciproquement, si $d(x, y) = \|x - y\| = 0$, l'axiome de séparation de la norme donne $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$.

Comme $y - x = (-1)(x - y)$, l'homogénéité donne $d(y, x) = |-1| \|x - y\| = d(x, y)$.

Enfin $x - z = (x - y) + (y - z)$, donc l'inégalité triangulaire de la norme donne

$$d(x, z) = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

$\square$

2. Exemples de référence

Définition 5.8 (Normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Ce sont deux normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Ces deux applications sont bien définies et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$: une somme de réels positifs est positive, et la famille finie non vide $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ de réels positifs admet un plus grand élément. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Cas de $\|\cdot\|_1$. L'homogénéité vient de

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^n |\lambda| |x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| \|x\|_1.$$

Pour l'inégalité triangulaire, on somme les inégalités triangulaires du module $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$, valables pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Enfin, si $\|x\|_1 = 0$, c'est une somme nulle de termes positifs : tous ses termes sont nuls, donc $|x_k| = 0$ pour tout k , et $x = 0$.

Cas de $\|\cdot\|_\infty$. Le maximum étant atteint, fixons un indice $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{k_0}|$. Nous utiliserons les deux propriétés caractéristiques du maximum : d'une part $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ pour tout k ; d'autre part, si un réel M majore tous les $|x_k|$, alors $\|x\|_\infty \leq M$, puisque $\|x\|_\infty$ est l'un des $|x_k|$.

Montrons l'homogénéité. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|\lambda x_k| = |\lambda| |x_k| \leq |\lambda| \|x\|_\infty,$$

donc le réel $|\lambda| \|x\|_\infty$ majore tous les $|\lambda x_k|$ et $\|\lambda x\|_\infty \leq |\lambda| \|x\|_\infty$. Réciproquement, $|\lambda x_{k_0}|$ est l'un des $|\lambda x_k|$, donc

$$|\lambda| \|x\|_\infty = |\lambda| |x_{k_0}| = |\lambda x_{k_0}| \leq \|\lambda x\|_\infty.$$

Les deux inégalités donnent $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$.

Montrons l'inégalité triangulaire. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Ainsi $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore tous les $|x_k + y_k|$, donc $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Enfin, si $\|x\|_\infty = 0$, alors $|x_k| \leq 0$ pour tout k , donc $x_k = 0$ pour tout k et $x = 0$. □

Définition 5.9 (Norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{K}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $|x_k|^2 = x_k^2$, donc

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \langle x, x \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$: on reconnaît la norme euclidienne du début du chapitre. Ce n'est pas une particularité de $\mathbb{R}^n$: tout produit scalaire fournit une norme, de la même façon.

Définition 5.10 (Norme associée à un produit scalaire)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E , appelée norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration

L'application est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, car $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par bilinéarité, $\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle$, donc

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Pour l'inégalité triangulaire, on développe par bilinéarité et symétrie :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, d'où

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Les deux membres étant positifs, la croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ donne $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Enfin, si $\|x\| = 0$, alors $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$ puisque le produit scalaire est défini. $\square$

Remarque

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\|\cdot\|_2$ est encore une norme sur $\mathbb{C}^n$, mais elle n'est associée à aucun produit scalaire, et ce pour une raison de fond : il n'existe pas de produit scalaire sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E non nul. En effet, une forme bilinéaire symétrique φ sur E vérifierait, pour tout $x \in E$,

$$\varphi(ix, ix) = i^2 \varphi(x, x) = -\varphi(x, x),$$

de sorte que $\varphi(x, x)$ et $\varphi(ix, ix)$ ne peuvent être tous deux strictement positifs : aucune telle forme n'est définie positive.

Démonstration du cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{C}^n$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

L'homogénéité et la séparation se traitent directement. D'une part,

$$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda|^2 |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|_2.$$

D'autre part, si $\|x\|_2 = 0$, alors $\sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0$: c'est une somme nulle de termes positifs, donc $|x_k| = 0$ pour tout k et $x = 0$.

Pour l'inégalité triangulaire, écrivons les coordonnées en parties réelle et imaginaire : $x_k = a_k + ib_k$ et $y_k = c_k + id_k$, avec a_k, b_k, c_k et d_k réels. Comme $|x_k|^2 = a_k^2 + b_k^2$,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \|X\|_2, \quad \text{où } X = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

et de même $\|y\|_2 = \|Y\|_2$ avec $Y = (c_1, d_1, \dots, c_n, d_n)$. La partie réelle de $x_k + y_k$ est $a_k + c_k$ et sa partie imaginaire est $b_k + d_k$, donc la même formule appliquée à $x + y$ donne

$$\|x + y\|_2 = \|(a_1 + c_1, b_1 + d_1, \dots, a_n + c_n, b_n + d_n)\|_2 = \|X + Y\|_2.$$

L'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, déjà établie, donne alors

$$\|x + y\|_2 = \|X + Y\|_2 \leq \|X\|_2 + \|Y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

□

Remarque

La norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{C}^n$ est en fait associée à l'application

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k,$$

qui vérifie $\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2$. Ce n'est pas une forme bilinéaire, car $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$: c'est un produit hermitien, notion hors-programme qui généralise le produit scalaire aux espaces vectoriels complexes.

Remarque

Nous disposons maintenant de trois normes sur $\mathbb{K}^n$, et elles ne coïncident pas : pour $x = (1, 1) \in \mathbb{K}^2$,

$$\|x\|_1 = 2, \quad \|x\|_2 = \sqrt{2}, \quad \|x\|_\infty = 1.$$

On peut donc se demander s'il en existe d'autres. Ces trois normes sont en fait les premiers représentants d'une famille de normes que l'on sait construire sur $\mathbb{K}^n$ pour tout réel $p \geq 1$.

Définition 5.11 (Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel tel que $p \geq 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

C'est une norme sur $\mathbb{K}^n$. Les valeurs $p = 1$ et $p = 2$ redonnent les deux normes déjà rencontrées.

Démonstration partielle

L'homogénéité et la séparation ne posent pas de difficulté. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda|^p |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p,$$

et si $\|x\|_p = 0$, alors $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = 0$: c'est une somme nulle de termes positifs, donc $|x_k| = 0$ pour tout k et $x = 0$.

Toute la difficulté est dans l'inégalité triangulaire, qui porte le nom d'inégalité de Minkowski et se déduit de la convexité de $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Remarque

La valeur $p = +\infty$ n'est pas autorisée dans la définition ci-dessus : $+\infty$ n'est pas un réel et l'expression qui définit $\|x\|_p$ n'a alors aucun sens. La notation $\|\cdot\|_\infty$ est pourtant cohérente, car il s'agit bien du cas limite de la famille.

Proposition 5.12 (Cas limite $p \rightarrow +\infty$)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{K}^n$. Alors :

$$\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty.$$

Démonstration

Posons $M = \|x\|_\infty$ et soit $p \geq 1$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|x_k| \leq M$, donc $|x_k|^p \leq M^p$ par croissance de $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$; de plus M^p est l'un des $|x_k|^p$. En sommant,

$$M^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq nM^p,$$

puis, en élevant à la puissance $\frac{1}{p}$, qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$M \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} M.$$

Or $n^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{\ln n}{p}} \rightarrow 1$ lorsque $p \rightarrow +\infty$, donc $n^{\frac{1}{p}} M \rightarrow M$. Par encadrement, $\|x\|_p \rightarrow M = \|x\|_\infty$. $\square$

Remarque

La construction ne s'étend pas à $p \in]0, 1[$: l'homogénéité et la séparation restent vraies, mais l'inégalité triangulaire tombe en défaut. Prenons en effet $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$ dans $\mathbb{K}^2$: on a $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$, tandis que

$$\|x + y\|_p = \|(1, 1)\|_p = (1 + 1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\frac{1}{p} > 1$, on a $2^{\frac{1}{p}} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$.

Exemple 5.13 (Normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

En rangeant les coefficients d'une matrice en une seule liste, on identifie $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{np}$. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les normes 1, 2 et ∞ se lisent alors sur les coefficients :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}|.$$

Ce sont bien des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: ce sont les normes correspondantes de $\mathbb{K}^{np}$ lues à travers cette identification.

Remarque

Dans le cas réel, la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ s'exprime élégamment à l'aide de la trace. En effet, les coefficients diagonaux de $A^\top A$ valent

$$(A^\top A)_{j,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2,$$

donc en sommant sur j ,

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2 = \text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(AA^\top),$$

la dernière égalité provenant de $\text{tr}(BC) = \text{tr}(CB)$.

Définition 5.14 (Norme sur un espace de fonctions bornées)

Soit D un ensemble non vide. Pour toute fonction bornée $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in D\}.$$

Cela définit une norme sur l'espace $\mathcal{B}(D, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

L'ensemble $\mathcal{B}(D, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^D$: il contient la fonction nulle ; si f et g sont bornées, il existe M_f et M_g tels que $|f(t)| \leq M_f$ et $|g(t)| \leq M_g$ pour tout $t \in D$, d'où $|(f+g)(t)| \leq M_f + M_g$; et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $|(\lambda f)(t)| \leq |\lambda| M_f$ pour tout $t \in D$. Soient donc $f, g \in \mathcal{B}(D, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'ensemble $\{|f(t)|, t \in D\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ majorée, donc admet une borne supérieure : $\|f\|_\infty$ est bien définie, finie et positive.

Homogénéité. Posons $A = \{|f(t)|, t \in D\}$. Alors

$$\{|\lambda f(t)|, t \in D\} = \{|\lambda| |f(t)|, t \in D\} = |\lambda| A.$$

Pour toute partie non vide majorée A de $\mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{R}^+$, on a $\sup(kA) = k \sup(A)$. En effet, $k \sup(A)$ majore kA , car $a \leq \sup(A)$ pour tout $a \in A$; et réciproquement, si un réel M majore kA et si $k > 0$, alors $\frac{M}{k}$ majore A , donc $\sup(A) \leq \frac{M}{k}$, soit $k \sup(A) \leq M$; le cas $k = 0$ est immédiat. En appliquant ce résultat à $k = |\lambda|$,

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup(|\lambda| A) = |\lambda| \sup(A) = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

Inégalité triangulaire. Pour tout $t \in D$,

$$|(f+g)(t)| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ainsi $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|(f+g)(t)|, t \in D\}$, donc est supérieur ou égal à sa borne supérieure :

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Séparation. Si $\|f\|_\infty = 0$, alors, pour tout $t \in D$,

$$0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty = 0,$$

donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in D$, c'est-à-dire $f = 0$. $\square$

Remarque (du programme)

L'égalité

$$\sup(kA) = k \sup(A) \quad \text{pour } A \text{ partie non vide de } \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R}^+$$

peut être directement utilisée. L'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$ s'obtient donc en une ligne sur une copie, à condition de mentionner que le coefficient sorti est positif : en appliquant l'égalité à $k = |\lambda| \geq 0$,

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t \in D} |\lambda| |f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in D} |f(t)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

En revanche, aucun résultat du programme ne dispense de démontrer l'inégalité triangulaire : celle-ci se prouve en majorant $|f(t) + g(t)|$ pour chaque $t \in D$, puis en invoquant la définition de la borne supérieure.

Exemple 5.15 (Norme sur $C^0([0, 1], \mathbb{K})$)

L'ensemble $C^0([0, 1], \mathbb{K})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{K})$. Il contient la fonction nulle, et la somme ainsi que le produit par un scalaire de fonctions continues sont continus. De plus, si f est continue sur $[0, 1]$, la fonction $|f|$ est continue et à valeurs réelles sur ce segment : le théorème des bornes atteintes lui donne un maximum, donc f est bornée. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est ainsi définie sur $C^0([0, 1], \mathbb{K})$ par :

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|,$$

la borne supérieure étant atteinte d'après le même théorème.

Remarque (Autres normes sur C^0)

Soient $a < b$ deux réels. Pour $f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les fonctions intégrées sont continues sur le segment $[a, b]$, donc ces deux intégrales sont bien définies. Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur $C^0([a, b], \mathbb{K})$. L'homogénéité résulte de la linéarité de l'intégrale, le coefficient sorti étant positif ; la séparation, de ce que l'intégrale sur un segment d'une fonction continue positive est nulle seulement si cette fonction est nulle. L'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_1$ s'obtient en intégrant $|f+g| \leq |f| + |g|$; celle de $\|\cdot\|_2$ porte le nom d'inégalité de Minkowski. Nous retrouverons la norme $\|\cdot\|_1$ plus tard, dans un cadre plus général.

Exemple 5.16 (Norme à poids sur $C^0([0, 1])$)

Soit $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Pour $f \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$, on pose :

$$N(f) = \int_0^1 w(t) |f(t)| dt.$$

L'application N est une norme sur $C^0([0, 1], \mathbb{K})$.

Démonstration

Pour $f \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$, la fonction $t \mapsto w(t) |f(t)|$ est continue sur le segment $[0, 1]$: $N(f)$ est donc bien définie et positive. Soient $f, g \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Homogénéité. Par linéarité de l'intégrale et positivité de $|\lambda|$,

$$N(\lambda f) = \int_0^1 w(t) |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 w(t) |f(t)| dt = |\lambda| N(f).$$

Inégalité triangulaire. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$w(t) |f(t) + g(t)| \leq w(t) (|f(t)| + |g(t)|) = w(t) |f(t)| + w(t) |g(t)|.$$

En intégrant sur $[0, 1]$ et par croissance de l'intégrale,

$$N(f + g) \leq N(f) + N(g).$$

Séparation. Comme w est continue et strictement positive sur le segment $[0, 1]$, elle y admet un minimum $m > 0$. Si $N(f) = 0$, alors, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq m |f(t)| \leq w(t) |f(t)|,$$

donc, en intégrant, $m \|f\|_1 \leq N(f) = 0$, d'où $\|f\|_1 = 0$. La séparation de la norme $\|\cdot\|_1$ donne alors $f = 0$.

L'application N est donc une norme sur $C^0([0, 1], \mathbb{K})$. $\square$

3. Parties d'espaces vectoriels normés**Définition 5.17 (Boules et sphères)**

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$, soit $a \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}$. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$\mathring{B}(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}.$$

De même, on définit la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ et la sphère $S(a, r)$:

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}$$

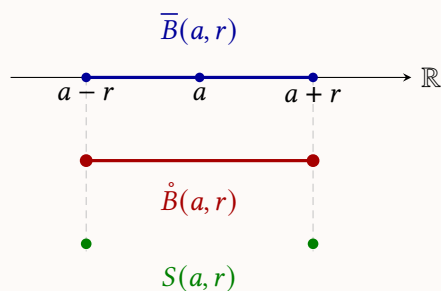
$$S(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| = r\}$$

Exemple 5.18 (Boules et sphères sur $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Sur $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, les boules et la sphère s'écrivent

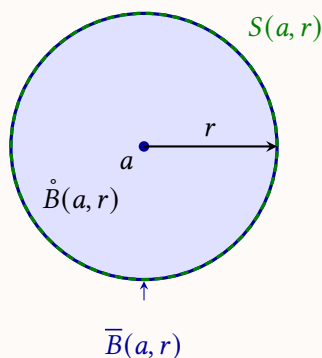
$$\mathring{B}(a, r) =]a - r, a + r[, \quad \overline{B}(a, r) = [a - r, a + r], \quad S(a, r) = \{a - r, a + r\}.$$

La boule ouverte est un intervalle ouvert, la boule fermée l'intervalle fermé de mêmes extrémités, et la sphère est formée de ces deux extrémités.



Exemple 5.19 (Boules et sphères sur $\mathbb{C}$ muni de $|\cdot|$)

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Sur $\mathbb{C}$ muni du module, la boule ouverte $\mathring{B}(a, r)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r , la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est le disque fermé correspondant, et la sphère $S(a, r)$ est le cercle de centre a et de rayon r .



Remarque

La sphère $S(a, r)$ est le bord de la boule : c'est la partie de la boule fermée qui n'appartient pas à la boule ouverte, autrement dit

$$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus \mathring{B}(a, r).$$

La boule ouverte ne contient donc aucun point de son bord, tandis que la boule fermée les contient tous.

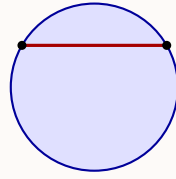
Définition 5.20 (Parties convexes d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel et soit D une partie de E . Pour $x, y \in E$, on appelle segment d'extrémités x et y l'ensemble :

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}.$$

On dit que D est convexe lorsque, pour tout $(x, y) \in D^2$, le segment $[x, y]$ est inclus dans D , autrement dit :

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in D.$$

Exemple 5.21 (Parties convexes et non convexes de $\mathbb{R}^2$)

convexe



non convexe

Exemple 5.22

Les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes.

Démonstration

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, soit $a \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}$. Si $r \leq 0$, la boule ouverte est vide et la boule fermée est vide ou réduite à $\{a\}$: l'affirmation est immédiate. Supposons donc $r > 0$, et montrons que $\mathring{B}(a, r)$ est convexe ; le cas de $\overline{B}(a, r)$ se traite de la même façon. Soient donc $x, y \in \mathring{B}(a, r)$ et $t \in [0, 1]$. Par homogénéité et inégalité triangulaire,

$$\|(1-t)x + ty - a\| = \|(1-t)(x - a) + t(y - a)\| \leq (1-t)\|x - a\| + t\|y - a\|.$$

Comme $\|x - a\| < r$ et $\|y - a\| < r$, il vient

$$\|(1-t)x + ty - a\| < (1-t)r + tr = r,$$

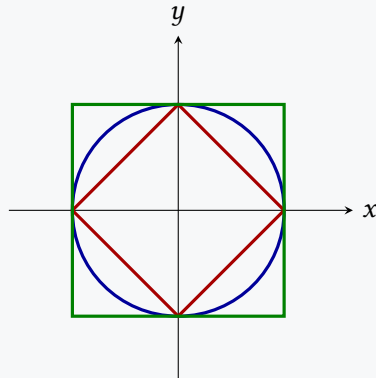
donc $(1-t)x + ty \in \mathring{B}(a, r)$. La boule ouverte est donc convexe. Si maintenant $x, y \in \overline{B}(a, r)$, les mêmes calculs avec des inégalités larges donnent $\|(1-t)x + ty - a\| \leq r$, donc $(1-t)x + ty \in \overline{B}(a, r)$. $\square$

Remarque

La démonstration n'utilise que les axiomes d'une norme : les boules sont convexes dans tout espace vectoriel normé, quelle que soit la norme choisie.

Remarque

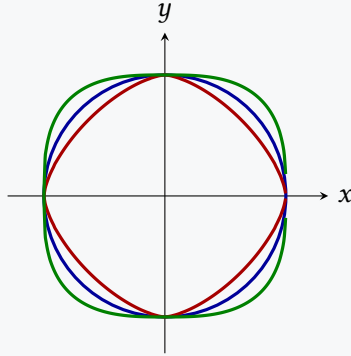
Les boules et les sphères sont des ensembles simples, qui servent de référence pour représenter une norme. Elles permettent aussi de visualiser les différences entre les normes : ci-dessous, les sphères unité de $\|\cdot\|_1$ (en rouge), de $\|\cdot\|_2$ (en bleu) et de $\|\cdot\|_\infty$ (en vert) dans $\mathbb{R}^2$.



Chacune de ces trois parties est convexe, comme nous venons de le voir.

Remarque

On a défini plus tôt $\|\cdot\|_p$ pour tout réel $p \geq 1$. La figure superpose les sphères unité de $\|\cdot\|_{1,5}$ (en rouge), de $\|\cdot\|_2$ (en bleu) et de $\|\cdot\|_3$ (en vert) dans $\mathbb{R}^2$.



Lorsque p croît de 1 à $+\infty$, la sphère unité passe du losange au carré, en passant par le cercle pour $p = 2$. Ce que la figure suggère est exact : seule la norme $\|\cdot\|_2$ est isotrope, c'est-à-dire invariante par rotation, sans direction privilégiée. Pour $p \neq 2$, certaines directions jouent au contraire un rôle particulier.

Remarque

Les boules et les sphères ont enfin un intérêt plus général : la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est l'ensemble des x tels que $\|x - a\| \leq r$, ce qui étend à un espace vectoriel normé quelconque la condition $|x - a| \leq r$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. C'est cette écriture qui permettra de définir les suites et les fonctions bornées, puis, plus tard, la notion de limite.

Définition 5.23 (Partie bornée)

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit D une partie de E . On dit que D est bornée s'il existe $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$ tels que $D \subset \overline{B}(a, r)$.

Proposition 5.24 (Caractérisation des parties bornées)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit D une partie de E . Alors D est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \|x\| \leq M.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que $D \subset \overline{B}(a, r)$. Pour tout $x \in D$,

$$\|x\| = \|(x - a) + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq r + \|a\|.$$

En posant $M = r + \|a\| + 1 > 0$, on a bien $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in D$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si un tel M existe, alors $D \subset \overline{B}(0, M)$, puisque $\|x - 0\| = \|x\| \leq M$ pour tout $x \in D$.

□

Remarque

Sur $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, les parties bornées sont exactement les parties minorées et majorées.

Démonstration

- $\Rightarrow$ Si $D \subset \mathbb{R}$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in D$, c'est-à-dire $-M \leq x \leq M$: D est minorée et majorée.
- $\Leftarrow$ Si D est minorée par m et majorée par M' , alors $m \leq x \leq M'$ pour tout $x \in D$, donc $|x| \leq \max(|m|, |M'|, 1)$; cette borne est positive et convient.

□

Remarque

Cette définition prolonge la notion de partie bornée déjà connue sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. C'est l'analogue direct, pour les parties de $\mathbb{C}$, de la caractérisation donnée sur $\mathbb{R}$: muni du module, $D \subset \mathbb{C}$ est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $|z| \leq M$ pour tout $z \in D$.

Proposition 5.25 (Réunion et intersection de parties bornées)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- La réunion d'une famille finie de parties bornées de E est bornée.
- L'intersection d'une famille non vide de parties bornées de E est bornée, même si cette famille est infinie.

Démonstration

- Soient $D_1, \dots, D_n$ des parties bornées. Pour chaque i , il existe $M_i > 0$ tel que $\|x\| \leq M_i$ pour tout $x \in D_i$. Posons $M = \max(M_1, \dots, M_n) > 0$. Pour tout $x \in D_1 \cup \dots \cup D_n$, il existe i tel que $x \in D_i$, donc $\|x\| \leq M_i \leq M$, et la réunion est bornée.
- Soit $(D_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties bornées, et soit $i_0 \in I$. Une partie d'une partie bornée est bornée, donc $\bigcap_{i \in I} D_i \subset D_{i_0}$ est bornée.

□

Remarque

Le caractère borné dépend de la norme choisie. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} < x \leq 2. \end{cases}$$

Chaque f_n est continue, nulle en dehors de $[0, \frac{2}{n}]$, et son graphe forme un triangle de hauteur n et de base $\frac{2}{n}$. Soit $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset C^0([0, 2], \mathbb{R})$.

- Pour $\|\cdot\|_1$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^2 |f_n(t)| dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1,$$

donc $A \subset \overline{B}(0, 1)$: A est bornée.

- Pour $\|\cdot\|_\infty$, $\|f_n\|_\infty = n$, qui tend vers $+\infty$: A n'est pas bornée.

Une même partie de $C^0([0, 2], \mathbb{R})$ peut donc être bornée pour une norme et pas pour une autre.

Définition 5.26 (Suite bornée)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que (u_n) est bornée si l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E .

Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

C'est l'analogie exacte de la définition des suites numériques bornées. Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la condition $\|u_n\| \leq M$ s'écrit $|u_n| \leq M$.

Définition 5.27 (Fonction bornée)

Soient I un ensemble non vide et $f: I \rightarrow E$. On dit que f est bornée si $f(I)$ est une partie bornée de E .

Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M$ pour tout $x \in I$.

Remarque

Lorsque l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{K}$, cette définition coïncide avec celle des fonctions numériques bornées : $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.

II. CONVERGENCE DE SUITES DANS UN ESPACE NORMÉ

1. Généralités

Définition 5.28 (Convergence d'une suite)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in E$. On dit que (x_n) converge vers ℓ si :

$$\|x_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans ce cas, on note $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Remarque

Cette définition prolonge celle des suites numériques. Écrivons en effet la convergence $\|x_n - \ell\| \rightarrow 0$ avec des quantificateurs : (x_n) converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|x_n - \ell\| \leq \epsilon.$$

Pour une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ et un scalaire $\ell \in \mathbb{K}$, la convergence s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Les deux énoncés sont identiques, à ceci près que la valeur absolue ou le module y est remplacé par la norme. L'analogie avec les suites numériques est donc exacte : la convergence dans un espace vectoriel normé est la même notion que la convergence dans $\mathbb{K}$, étendue à un espace vectoriel quelconque.

Remarque

- (x_n) est dite convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
- (x_n) est dite divergente si elle n'est pas convergente.
- *A priori*, la nature d'une suite dépend de la norme choisie (et il y a effectivement des cas pathologiques que nous verrons).
- De la même façon, l'éventuelle limite peut dépendre de la norme choisie.

Exemple 5.29

Dans $\mathbb{R}^2$, posons $u_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ et $\ell = (0, 1)$. Alors $u_n - \ell = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$, donc

$$\begin{aligned}\|u_n - \ell\|_1 &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}, \\ \|u_n - \ell\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}, \\ \|u_n - \ell\|_\infty &= \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Ces trois quantités tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exemple 5.30

Dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Chaque f_n est continue sur $[0, 1]$, positive et majorée par 1.

Pour $\|\cdot\|_1$. La fonction f_n est nulle sur $[\frac{1}{n}, 1]$, donc

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \left[t - \frac{nt^2}{2} \right]_0^{1/n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La suite (f_n) converge donc vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$.

Pour $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 1$ et $0 \leq f_n(t) \leq 1$ sur $[0, 1]$, donc $\|f_n\|_\infty = 1$. La suite $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0, et (f_n) ne converge donc pas vers la fonction nulle. Montrons qu'elle ne converge vers aucune fonction $g \in E$. Si $f_n \rightarrow g$ pour $\|\cdot\|_\infty$, alors, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|f_n(t) - g(t)| \leq \|f_n - g\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

donc $f_n(t) \rightarrow g(t)$ pour tout t . Or $f_n(0) = 1$ pour tout n , d'où $g(0) = 1$; et, pour $t > 0$, $f_n(t) = 0$ dès que $n \geq \frac{1}{t}$, d'où $g(t) = 0$. La fonction g serait discontinue en 0, ce qui contredit $g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Ainsi (f_n) diverge pour $\|\cdot\|_\infty$.

La nature de cette suite dépend donc de la norme choisie.

Proposition 5.31 (Convergence composante par composante dans $\mathbb{K}^d$)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^d$ et $\ell \in \mathbb{K}^d$. On écrit $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,d})$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d)$. La suite (x_n) converge vers ℓ pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, la suite $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k dans $\mathbb{K}$ muni de $|\cdot|$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - \ell\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} |x_{n,k} - \ell_k|.$$

Sens direct. Supposons que $x_n \rightarrow \ell$ pour $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire $\|x_n - \ell\|_\infty \rightarrow 0$. Pour chaque

$k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |x_{n,k} - \ell_k| \leq \|x_n - \ell\|_\infty.$$

Le membre de droite tend vers 0, donc, par encadrement, $|x_{n,k} - \ell_k| \rightarrow 0$, c'est-à-dire $x_{n,k} \rightarrow \ell_k$. *Sens réciproque.* Supposons que $x_{n,k} \rightarrow \ell_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque k , il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_k$, $|x_{n,k} - \ell_k| \leq \epsilon$. Posons $N = \max(N_1, \dots, N_d)$. Pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_k$ pour tout k , donc

$$\|x_n - \ell\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} |x_{n,k} - \ell_k| \leq \epsilon.$$

Ainsi $x_n \rightarrow \ell$ pour $\|\cdot\|_\infty$. □

Exemple 5.32

Identifions $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^4$ en rangeant les coefficients en une liste. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que $A = I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $N^2 = 0$, la formule du binôme donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (I_2 + N)^n = I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient d'indice $(1, 2)$ de A^n vaut n et ne converge pas. Si (A^n) convergerait vers une matrice L pour $\|\cdot\|_\infty$, la proposition précédente donnerait la convergence de chaque coefficient vers le coefficient correspondant de L , ce qui est faux pour le coefficient $(1, 2)$. La suite (A^n) diverge donc pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exemple 5.33

Toujours dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ identifié à $\mathbb{K}^4$, posons

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} & \frac{(-1)^n}{n} \\ \frac{1}{n^2} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Chacun des quatre coefficients est une suite numérique convergente :

$$1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1, \quad \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1.$$

D'après la proposition précédente, la suite (B_n) converge donc vers $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

2. Propriétés

Proposition 5.34 (Unicité de la limite)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell, \ell' \in E$ tels que, pour cette même norme :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'.$$

Alors $\ell = \ell'$.

Démonstration

Soient ℓ et ℓ' deux limites de (x_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$0 \leq \|\ell - \ell'\| = \|(\ell - x_n) + (x_n - \ell')\| \leq \|\ell - x_n\| + \|x_n - \ell'\|.$$

Les deux termes du membre de droite tendent vers 0, donc leur somme aussi, et, par encadrement, $\|\ell - \ell'\| = 0$. L'axiome de séparation de la norme donne alors $\ell - \ell' = 0_E$, c'est-à-dire $\ell = \ell'$. $\square$

Remarque

Nous avons vu que la nature d'une suite peut dépendre de la norme choisie : une même suite peut converger pour une norme et diverger pour une autre. La limite éventuelle dépend donc elle aussi de la norme, et il faut préciser celle-ci dès que l'on parle de convergence.

L'unicité démontrée ci-dessus doit se lire de la même façon : elle est *relative à une norme donnée*. Elle suppose que (x_n) converge vers ℓ et vers ℓ' *pour cette même norme*, et interdit alors $\ell \neq \ell'$. Elle ne dit rien d'une convergence « dans l'absolu », qui n'aurait pas de sens ici : pour une autre norme, la suite pourrait même ne pas converger.

A priori, rien n'interdit d'ailleurs que deux normes différentes conduisent à deux limites différentes.

Remarque

Pour une norme fixée pour laquelle (x_n) converge, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ sa limite, cette notation sous-entendant que la convergence a été préalablement justifiée.

Proposition 5.35 (Une suite convergente est bornée)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergente pour $\|\cdot\|$ est bornée pour $\|\cdot\|$.

Démonstration

Supposons que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, c'est-à-dire $\|x_n - \ell\| \rightarrow 0$. La suite numérique $(\|x_n - \ell\|)$ est convergente, donc bornée : il existe $M > 0$ tel que $\|x_n - \ell\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$\|x_n\| = \|(x_n - \ell) + \ell\| \leq \|x_n - \ell\| + \|\ell\| \leq M + \|\ell\|.$$

En posant $M' = M + \|\ell\| + 1 > 0$, on a $\|x_n\| \leq M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (x_n) est bornée. $\square$

Remarque

L'implication précédente porte sur une *même* norme : si (x_n) converge pour une norme $\|\cdot\|$, elle est bornée pour cette même norme. Elle ne permet pas de conclure au caractère borné pour une autre norme.

Reprenons la suite (f_n) donnée plus haut. Pour $\|\cdot\|_1$, elle converge vers la fonction nulle, donc elle y est bornée. Pour $\|\cdot\|_\infty$, elle ne converge pas, bien qu'elle y soit bornée puisque $\|f_n\|_\infty = 1$. La convergence et le caractère borné doivent donc bien être considérés pour une même norme.

Remarque

La réciproque de la proposition est fausse : une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Exemple 5.36

Identifions $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^4$ et posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul donne $A^2 = -I_2$, d'où

$$A^2 = -I_2, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = I_2.$$

La suite (A^n) est donc périodique de période 4 : elle ne prend que les quatre valeurs $I_2, A, -I_2$ et $-A$. Chacune a tous ses coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$, donc $\|A^n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (A^n) est bornée.

Elle ne converge pas pour autant. Le coefficient d'indice $(1, 1)$ de A^n vaut

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

Il est égal à 1 pour une infinité d'indices et à -1 pour une infinité d'indices : il ne converge pas. D'après le critère de convergence composante par composante, la suite (A^n) diverge donc pour $\|\cdot\|_\infty$.

C'est une suite bornée mais non convergente.

Proposition 5.37 (Combinaison linéaire de suites convergentes)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' , et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors la suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Démonstration

Par homogénéité et inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(\alpha x_n + \beta y_n) - (\alpha\ell + \beta\ell')\| = \|\alpha(x_n - \ell) + \beta(y_n - \ell')\| \leq |\alpha| \|x_n - \ell\| + |\beta| \|y_n - \ell'\|.$$

Les deux termes du membre de droite tendent vers 0, donc leur somme aussi. Par encadrement, $\|(\alpha x_n + \beta y_n) - (\alpha\ell + \beta\ell')\| \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha\ell + \beta\ell'$. $\square$

Proposition 5.38 (Produit par une suite de scalaires)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $(\lambda_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{K}$ et (x_n) une suite de E convergeant vers $\ell \in E$. Alors la suite $(\lambda_n x_n)$ converge vers $\lambda\ell$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n x_n - \lambda\ell = \lambda_n(x_n - \ell) + (\lambda_n - \lambda)\ell,$$

donc, par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$\|\lambda_n x_n - \lambda\ell\| \leq |\lambda_n| \|x_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda| \|\ell\|.$$

La suite numérique (λ_n) converge, donc elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $|\lambda_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda\ell\| \leq M \|x_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda| \|\ell\|,$$

et les deux termes du membre de droite tendent vers 0. Par encadrement, $\|\lambda_n x_n - \lambda \ell\| \rightarrow 0$. $\square$

Remarque

La proposition précédente ne fait intervenir que des scalaires *fixes*; celle-ci autorise des coefficients qui varient avec n . C'est elle qui permet de passer à la limite dans une écriture du type $\alpha_n a + \beta_n b$, où a et b sont des vecteurs fixés et où (α_n) et (β_n) sont des suites numériques convergentes.

Proposition 5.39 (Suites extraites)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute suite extraite d'une suite convergente de E est convergente.

De plus, la limite de la suite extraite est la limite de la suite de départ.

Démonstration

Soit (x_n) une suite convergente de limite ℓ , et soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite, où $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. Nous utiliserons la propriété, immédiate par récurrence, que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $\epsilon > 0$. Comme $x_n \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - \ell\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Pour $n \geq N$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N$, donc

$$\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \epsilon.$$

Ainsi $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

$\square$

III. COMPARAISON DES NORMES

1. Normes équivalentes

Définition 5.40 (Normes équivalentes)

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $N_1 \leq \alpha N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$.

Remarque

S'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$, on dit que N_2 est *plus fine* que N_1 . Cette terminologie peut surprendre : l'inégalité signifie que N_2 est plus grande que N_1 , à un facteur près. Mais une norme plus grande sépare mieux les vecteurs : elle distingue ce que N_1 confond, d'où le terme « plus fine ».

Remarque

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si N_1 est plus fine que N_2 et N_2 est plus fine que N_1 .

Proposition 5.41 (Propriétés de l'équivalence des normes)

Soient N_1 , N_2 et N_3 trois normes sur un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. réflexivité : N_1 est équivalente à N_1 ;
2. symétrie : si N_1 est équivalente à N_2 , alors N_2 est équivalente à N_1 ;
3. transitivité : si N_1 est équivalente à N_2 et si N_2 est équivalente à N_3 , alors N_1 est équivalente à N_3 .

Démonstration

Pour la réflexivité, les constantes $\alpha = \beta = 1$ conviennent, car $N_1 \leq N_1$.

Pour la symétrie, la définition est déjà symétrique en N_1 et N_2 : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifient $N_1 \leq \alpha N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$, alors les constantes β et α conviennent pour le couple (N_2, N_1) .

Pour la transitivité, soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $N_1 \leq \alpha N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$, et soient $\gamma, \delta > 0$ tels que $N_2 \leq \gamma N_3$ et $N_3 \leq \delta N_2$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \leq \alpha \gamma N_3(x) \quad \text{et} \quad N_3(x) \leq \delta N_2(x) \leq \delta \beta N_1(x).$$

Comme $\alpha\gamma > 0$ et $\delta\beta > 0$, les normes N_1 et N_3 sont équivalentes. □

Remarque

Ces trois propriétés sont celles qui définissent, hors programme, une *relation d'équivalence* : l'équivalence des normes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E . Cela justifie le vocabulaire et autorise les raisonnements habituels : pour comparer deux normes, on peut passer par une troisième, et il suffit souvent de comparer chaque norme à une norme de référence.

2. Deux exemples**Proposition 5.42 (Normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont donc équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Le maximum $\|x\|_\infty$ est l'un des $|x_k|$, et tous les termes de la somme $\sum_{k=1}^n |x_k|$ sont positifs : cette somme est donc supérieure à celui de ses termes qui vaut $\|x\|_\infty$, d'où

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1.$$

Réciproquement, $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$; en sommant ces n inégalités,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq n \|x\|_\infty.$$

Les deux inégalités sont exactement celles de la définition, avec $\alpha = n$ et $\beta = 1$. $\square$

Remarque

Les deux constantes sont les meilleures possibles. Pour $x = (1, 0, \dots, 0)$, on a $\|x\|_\infty = \|x\|_1 = 1$: aucune constante strictement inférieure à 1 ne convient dans $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Pour $x = (1, 1, \dots, 1)$, on a $\|x\|_\infty = 1$ et $\|x\|_1 = n$: la constante n ne peut pas être diminuée.

Remarque

En identifiant $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{np}$ comme on l'a fait plus haut, la même proposition donne l'équivalence de $\|\cdot\|_1$ et de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, cette fois avec la constante np .

Proposition 5.43 (Comparaison sur $C^0([0, 1], \mathbb{K})$)

Pour toute fonction $f \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty.$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ est donc plus fine que $\|\cdot\|_1$.

Démonstration

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$. Le segment $[0, 1]$ étant de longueur 1, la croissance de l'intégrale donne

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

□

Remarque

Ici, la comparaison ne vaut que dans un sens, et nous verrons à la fin de cette section qu'il n'existe *aucune* constante $\beta > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq \beta \|f\|_1$ pour toute fonction f : ces deux normes ne sont pas équivalentes. C'est une différence de fond avec le cas de $\mathbb{K}^n$, où les deux inégalités étaient disponibles.

3. Invariance du caractère borné et de la convergence**Proposition 5.44 (Invariance du caractère borné)**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et soit (x_n) une suite de E . Alors (x_n) est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2 .

Démonstration

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $N_1 \leq \alpha N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$.

Si (x_n) est bornée pour N_1 , il existe $M > 0$ tel que $N_1(x_n) \leq M$ pour tout n , donc $N_2(x_n) \leq \beta M$ pour tout n : la suite est bornée pour N_2 . L'implication réciproque s'obtient en échangeant les rôles de N_1 et N_2 . □

Proposition 5.45 (Invariance de la convergence)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et soit (x_n) une suite de E . Alors (x_n) est convergente pour N_1 si et seulement si elle est convergente pour N_2 .

De plus, dans ce cas, les limites sont les mêmes.

Démonstration

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $N_1 \leq \alpha N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$, et soit $\ell \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq N_2(x_n - \ell) \leq \beta N_1(x_n - \ell).$$

Si $x_n \rightarrow \ell$ pour N_1 , le membre de droite tend vers 0, donc $N_2(x_n - \ell) \rightarrow 0$ par encadrement : $x_n \rightarrow \ell$ pour N_2 . Une suite convergente pour N_1 l'est donc pour N_2 , avec la même limite. L'implication réciproque s'obtient en échangeant les rôles de N_1 et N_2 . □

Remarque

L'équivalence des normes est donc la notion adaptée pour transporter les propriétés essentielles rencontrées jusqu'ici : deux normes équivalentes ont les mêmes suites bornées et les mêmes suites convergentes, avec les mêmes limites.

Remarque

Sur $\mathbb{K}^n$, on peut ainsi mener indifféremment les calculs de convergence et de caractère borné avec $\|\cdot\|_1$ ou avec $\|\cdot\|_\infty$: on choisit à chaque fois la plus commode, puis on transporte la conclusion à l'autre.

Exemple 5.46

Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^2$ telle que $\|u_p\|_1 = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle ne converge pas vers $(0, 0)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

C'est $\|\cdot\|_1$ qui est ici la plus commode : pour elle, la distance de u_p à l'origine vaut

$$\|u_p - (0, 0)\|_1 = \|u_p\|_1 = 1,$$

quantité qui ne tend pas vers 0. La suite (u_p) ne converge donc pas vers $(0, 0)$ pour $\|\cdot\|_1$, et l'équivalence des deux normes interdit alors la convergence vers $(0, 0)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

4. Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes**Remarque**

Si une suite n'a pas la même nature pour deux normes, alors nécessairement ces deux normes ne sont pas équivalentes : c'est la contraposée de la proposition précédente. C'est le cas de la suite (f_n) donnée plus haut, qui converge pour $\|\cdot\|_1$ et diverge pour $\|\cdot\|_\infty$. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, alors même que la comparaison $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$ établie plus haut est vraie.

Remarque

La réciproque est également vraie : si deux normes ne sont pas équivalentes, alors il existe une suite qui est convergente pour l'une mais pas pour l'autre.

Démonstration

Supposons N_1 et N_2 non équivalentes. Alors l'une au moins des deux comparaisons fait défaut. Quitte à échanger N_1 et N_2 , supposons qu'il n'existe aucune constante $\alpha > 0$ telle que $N_1 \leq \alpha N_2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $N_1(x_n) > n^2 N_2(x_n)$; en particulier $x_n \neq 0$.

Posons $u_n = \frac{\sqrt{n}}{N_1(x_n)} x_n$. D'une part,

$$N_1(u_n) = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad N_2(u_n) = \frac{\sqrt{n} N_2(x_n)}{N_1(x_n)} < \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ainsi $N_2(u_n) \rightarrow 0$, donc (u_n) converge vers 0 pour N_2 . En revanche, $N_1(u_n) \rightarrow +\infty$, donc (u_n) n'est pas bornée pour N_1 ; d'après la proposition « une suite convergente est bornée », elle ne converge pas pour N_1 . La suite (u_n) est ainsi convergente pour N_2 mais pas pour N_1 . $\square$

Remarque

Le cas de $\mathbb{K}^n$ et celui de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ s'opposent donc : sur le premier, les deux normes usuelles sont équivalentes et le choix de l'une ou de l'autre est sans conséquence ; sur le second, elles ne le sont pas et la nature d'une suite dépend effectivement de la norme retenue. Nous verrons au chapitre consacré aux fonctions sur un espace

vectorel normé que la dimension est ce qui sépare ces deux situations.

EXERCICES

Exercice 5.1 ◦ _____ Correction p. 35

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x = (1, -2, 2)$ et $y = (3, 0, -4)$. Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$, puis les mêmes normes de y et de $x + y$. Vérifier sur ces valeurs l'inégalité triangulaire pour chacune des trois normes.
2. Calculer la distance de x à y pour chacune de ces trois normes.
3. Dans $\mathbb{C}^2$, calculer $\|z\|_1$, $\|z\|_2$ et $\|z\|_\infty$ pour $z = (1 + i, -2i)$.
4. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soit $x \in E$ non nul. Montrer que $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$. Expliciter ce vecteur pour le vecteur x de la question 1 et chacune des trois normes.
5. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, et soient $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto t^2$. Calculer $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$, puis les mêmes normes de g et de $f - g$.

Exercice 5.2 • _____ Correction p. 36

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x|, |x + y|)$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la boule unité fermée de centre 0 pour N . Montrer qu'elle contient celle de $\|\cdot\|_1$, mais qu'elle n'est pas contenue dans celle de $\|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que $N \leq 2\|\cdot\|_\infty$ et que $\|\cdot\|_\infty \leq 2N$.
4. En déduire que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, puis qu'une suite de $\mathbb{R}^2$ converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5.3 ◦ _____ Correction p. 37

1. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule fermée de centre $(1, -1)$ et de rayon 2, d'abord pour $\|\cdot\|_1$, puis pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, déterminer lesquelles sont bornées et lesquelles sont convexes :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 3\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}.$$

3. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, soit $f \in E$ et soit $r > 0$. Décrire géométriquement la boule fermée de centre f et de rayon r .
4. Mêmes questions qu'en 2 pour les parties suivantes de E :

$$\mathcal{F} = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 2\}, \quad \mathcal{G} = \{f \in E : \|f\|_\infty = 1\},$$

$$\mathcal{H} = \{f \in E : f(0) = 0\}, \quad \mathcal{I} = \left\{f \in E : \int_0^1 f(t) dt = 1\right\}.$$

Exercice 5.4 • Correction p. 38

1. Étudier la convergence, dans $\mathbb{R}^3$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \left(\frac{2n+1}{n+3}, \frac{(-1)^n}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right).$$

2. Étudier la convergence, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^4$ et muni de $\|\cdot\|_\infty$, de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{\sin n}{n} \\ \frac{1}{2^n} & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que la suite de $\mathbb{R}^2$ définie par $v_n = ((-1)^n, \frac{1}{n})$ diverge.
4. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la suite de fonctions $f_n : t \mapsto \frac{nt}{n+1}$ converge vers $f : t \mapsto t$.
5. Soit $g_n : t \mapsto t^n$. Calculer $\|g_n\|_1$ et $\|g_n\|_\infty$. La suite (g_n) converge-t-elle vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$? pour $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 5.5 •• Correction p. 39

Soit E l'espace des suites complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées et telles que $u_0 = 0$. On définit $\|\cdot\|_\infty$ et N par : pour tout $u \in E$, $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

- Montrer que ce sont des normes sur E .
- Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N \leq k \|\cdot\|_\infty$. Quel est le plus petit k possible ?
- Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 5.6 • Correction p. 42

Montrer que $A \mapsto \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'elle vérifie

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 5.7 • Correction p. 44

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $N : P \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ définit une norme sur E .

Exercice 5.8 ••• Correction p. 45

CCP 2017 PC exo 1 extrait.

Pour $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\|M\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} |m_{i,j}|$.

- On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - On note $N = A - I_3$, déterminer N^k pour $k \in \mathbb{N}$.
 - En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_\infty$.
- Montrer que $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \mapsto \|M\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.
 - Montrer que pour $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, on a $\|MN\|_\infty \leq q \|M\|_\infty \|N\|_\infty$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) une matrice ayant une valeur propre¹ λ telle que $|\lambda| > 1$. De b, déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\|_\infty$.

1. M admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'il existe $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

4. Soit $N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) telle que $N^p = 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})}$ et $N^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda I_d + N)^n\|_\infty$.

Exercice 5.9 ●● _____ Correction p. 49

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_1$ (vers 0) et diverge pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 5.10 ● _____ Correction p. 50

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \rightarrow E$ une application k -lipschitzienne, c'est-à-dire telle que $\forall (x, y) \in E^2, N(f(x) - f(y)) \leq k N(x - y)$.

1. Montrer que f admet au plus un point fixe si $k < 1$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f admet un point fixe $\ell \in E$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$.
 - (b) Si $k < 1$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Exercice 5.11 ●● _____ Correction p. 51

On considère, dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite (X_n) définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \text{ avec } X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ quelconque, et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{3}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (X_n) vérifie une relation matricielle de la forme $X_{n+1} = AX_n + B$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|_\infty \leq k \|X\|_\infty$ où k est un réel de $]0; 1[$.
3. Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. En déduire que la suite (X_n) est convergente, de limite L .

Exercice 5.12 ●● _____ Correction p. 53

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|$ de l'exercice 5.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour cette norme. Montrer alors que $P^2 = P$ et $AP = P = PA$.

Exercice 5.13 ● _____ Correction p. 54

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit (x_n) une suite d'éléments de E .

1. On suppose que (x_n) converge vers $\ell \in E$. Montrer que la suite réelle $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.
2. Réciproquement, soit $a \in E$ tel que $\|x_n\| \rightarrow \|a\|$. La suite (x_n) converge-t-elle nécessairement vers a ?
3. Montrer que si $\|x_n\| \rightarrow 0$, alors (x_n) converge vers 0_E .

Exercice 5.14 ●● Correction p. 54

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de E . Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\|, a \in A\}.$$

1. Justifier que $d(x, A)$ est bien défini pour tout $x \in E$.
2. Montrer que, pour tous $x, y \in E$,

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A),$$

puis en déduire que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.

3. On prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $A = \mathbb{R} \times \{0\}$. Calculer $d(x, A)$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $d(x, A) = 0$ si $x \in A$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5.15 ●● Correction p. 55

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

1. Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

2. En déduire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que la norme qui lui est associée est la norme $\|\cdot\|_2$ du cours.
3. En déduire que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\text{tr}(A^T B)| \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.
4. Montrer que toute norme associée à un produit scalaire vérifie l'identité

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

En déduire que ni $\|\cdot\|_1$ ni $\|\cdot\|_\infty$ n'est associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.16 ● Correction p. 56

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N_1(x, y) = \sqrt{|xy|}, \quad N_2(x, y) = |x| + y^2, \quad N_3(x, y) = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2.$$

Pour chacune de ces trois applications, déterminer lesquels des trois axiomes d'une norme sont vérifiés, et donner un contre-exemple pour les autres.

Exercice 5.17 ● Correction p. 57

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

1. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.
2. Montrer que $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ (*indication : appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $(1, \dots, 1)$*), puis que $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.
3. En déduire que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.
4. Pour chacune des quatre inégalités des questions 1 et 2, donner un vecteur pour lequel il y a égalité.

Exercice 5.18 ● Correction p. 58

On reprend la norme N de l'exercice 5.6, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$, et on note $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\|_\infty \leq N(A) \leq n \|A\|_\infty$.

2. En déduire qu'une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$, et que les limites sont alors les mêmes.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que chacun des n^2 coefficients de A^p converge lorsque $p \rightarrow +\infty$, et on note P la matrice de ces limites. Montrer que $P^2 = P$.

Exercice 5.19 ●● Correction p. 58

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $w \in E$ et $f \in E$, on pose

$$N_w(f) = \int_0^1 w(t) |f(t)| dt.$$

1. On suppose w strictement positive sur $[0, 1]$. Montrer que N_w et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.
2. On prend désormais $w : t \mapsto t$, qui s'annule en 0. Montrer que N_w est encore une norme sur E .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \mapsto \max(0, 1 - nt)$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $N_w(f_n)$.
4. En déduire que N_w et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 5.20 ●● Correction p. 59

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on note B_1 , B_2 et B_∞ les boules unité fermées de centre 0 associées respectivement à $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$.
2. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et soit $\alpha > 0$. On note B' la boule unité fermée de centre 0_E pour N' , et B_α la boule fermée de centre 0_E et de rayon α pour N . Montrer que $N \leq \alpha N'$ si et seulement si $B' \subset B_\alpha$.
3. Retrouver, à l'aide de la question 2, les inégalités de comparaison correspondant aux inclusions de la question 1.

Exercice 5.21 ● Correction p. 60

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que l'intersection d'une famille non vide de parties convexes de E est convexe. Montrer, par un exemple dans $\mathbb{R}^2$, que la réunion de deux parties convexes n'est pas toujours convexe.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0_E\}$, soit $a \in E$ et soit $r > 0$. Montrer que la sphère $S(a, r)$ n'est pas convexe.
3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F et C une partie convexe de E . Montrer que $u(C)$ est convexe.
4. Montrer que $C = \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) : \forall t \in [0, 1], f(t) \geq 0\}$ est une partie convexe de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 5.22 ● Correction p. 61

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soient A et B deux parties bornées de E et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ et $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$ sont bornées.
2. Donner une suite $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties bornées de $\mathbb{R}$ dont la réunion n'est pas bornée.
3. Soit D un ensemble non vide. Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$, alors fg est bornée et $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Exercice 5.23 ●● Correction p. 61

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, identifié à $\mathbb{C}^4$, de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b) pour que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et préciser alors sa limite.
3. La limite obtenue est-elle la matrice d'un projecteur ?

Exercice 5.24 ●●● Correction p. 62

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

1. Montrer que la suite (y_n) converge vers ℓ .
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5.25 ●● Correction p. 63

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit (x_n) une suite d'éléments de E .

1. On suppose que les suites (x_{2n}) , (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent. Montrer que (x_n) converge.
2. Montrer que l'hypothèse portant sur (x_{3n}) ne peut pas être supprimée.

Exercice 5.26 ●●● Correction p. 64

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients, nuls à partir d'un certain rang. On pose

$$N_c(P) = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|, \quad N_s(P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|, \quad N_\infty(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|,$$

cette dernière application étant une norme sur $\mathbb{R}[X]$ d'après l'exercice 5.7.

1. Montrer que N_c et N_s sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $N_\infty \leq N_s$ et que $N_c \leq N_s$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sum_{k=0}^n X^k$ et $R_n = (2X - 1)^n$. Calculer $N_c(Q_n)$, $N_s(Q_n)$ et $N_\infty(Q_n)$, puis $N_\infty(R_n)$ et $N_s(R_n)$.
4. En déduire que N_c , N_s et N_∞ sont deux à deux non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $N_s \leq (n+1)N_c$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t_0 < \dots < t_n$ des éléments de $[0, 1]$, et soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$N_s(P) \leq \left(\sum_{j=0}^n N_s(L_j) \right) N_\infty(P).$$

7. En déduire que N_c , N_s et N_∞ sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5.27 ●●● Correction p. 65

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $E_0 = \{f \in E : f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $f \mapsto \|f'\|_\infty$ n'est pas une norme sur E , mais en est une sur E_0 .

2. Montrer que N est une norme sur E .
3. Montrer que $\|f\|_\infty \leq N(f)$ pour toute $f \in E$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$. Majorer $\|f_n\|_\infty$ et calculer $N(f_n)$.
5. En déduire que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E .
6. Montrer que N et N' sont équivalentes.

Exercice 5.28 ● ● ● Correction p. 66

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soient $x, y \in E$.

1. Montrer que si $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.
2. Montrer que la réciproque est fautive : donner deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ réalisant l'égalité pour $\|\cdot\|_\infty$, puis deux autres pour $\|\cdot\|_1$.
3. On suppose dans cette question que la norme de E est associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que

$$\| \|y\| x - \|x\| y \|^2 = 2 \|x\| \|y\| (\|x\| \|y\| - \langle x, y \rangle),$$

puis que l'égalité $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ entraîne que x et y sont colinéaires.

4. On revient à une norme quelconque. On suppose $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x + y\| = 2$. Montrer que $\|tx + (1 - t)y\| = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.
5. En déduire que la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_2$ ne contient aucun segment non réduit à un point, et exhiber un tel segment contenu dans la sphère unité pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5.29 ● ● Correction p. 67

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer que $N_1 + N_2$ et $\max(N_1, N_2)$ sont des normes sur E , et qu'elles sont équivalentes.
2. Sur $E = \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = 3|x| + |y|$ et $N_2(x, y) = |x| + 3|y|$. Montrer que ce sont des normes, mais que $\min(N_1, N_2)$ n'en est pas une.
3. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $x \mapsto \|u(x)\|_F$ est une norme sur E si et seulement si u est injective.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $N_A : X \mapsto \|AX\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est inversible.
5. On suppose A inversible et on note N la norme de l'exercice 5.6. Montrer que $\|AX\|_\infty \leq N(A) \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis que N_A et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 5.30 ● ● ● Correction p. 68

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme N de l'exercice 5.6, qui vérifie $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

1. Soient $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant respectivement vers A et vers B . Montrer que la suite $(A_p B_p)$ converge vers AB .
2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(A_p^k)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers A^k .
3. Soit (A_p) une suite convergeant vers A et telle que $A_p^2 = A_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $A^2 = A$. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour une suite de matrices vérifiant $A_p^n = 0$.
4. Soit (A_p) une suite de matrices inversibles convergeant vers A et telle que (A_p^{-1}) converge vers une matrice B . Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.
5. Donner une suite de matrices inversibles convergeant vers une matrice non inversible. L'hypothèse portant sur (A_p^{-1}) dans la question 4 peut-elle être supprimée ?

CORRECTIONS DES EXERCICES

Correction de l'exercice 5.1

Énoncé p. 28

1) On a $x + y = (4, -2, -2)$. Pour x , par exemple,

$$\|x\|_1 = 1 + 2 + 2 = 5, \quad \|x\|_2 = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad \|x\|_\infty = 2.$$

Les mêmes calculs donnent

$$\begin{aligned} \|y\|_1 &= 7, & \|y\|_2 &= 5, & \|y\|_\infty &= 4, \\ \|x + y\|_1 &= 8, & \|x + y\|_2 &= 2\sqrt{6}, & \|x + y\|_\infty &= 4. \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire est bien vérifiée dans les trois cas :

$$8 \leq 5 + 7 = 12, \quad 2\sqrt{6} \simeq 4,90 \leq 3 + 5 = 8, \quad 4 \leq 2 + 4 = 6.$$

2) La distance associée à une norme est $d(x, y) = \|x - y\|$. Ici $x - y = (-2, -2, 6)$, donc

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= 2 + 2 + 6 = 10, & d_\infty(x, y) &= \max(2, 2, 6) = 6, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{4 + 4 + 36} = 2\sqrt{11}. \end{aligned}$$

3) Les normes font intervenir les modules des coordonnées, et non leurs parties réelles et imaginaires : $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $|-2i| = 2$. Donc

$$\|z\|_1 = 2 + \sqrt{2}, \quad \|z\|_2 = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}, \quad \|z\|_\infty = \max(\sqrt{2}, 2) = 2.$$

4) Comme $x \neq 0_E$, on a $N(x) > 0$ par séparation, et le vecteur $\frac{x}{N(x)}$ est bien défini. Par homogénéité,

$$N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = \left|\frac{1}{N(x)}\right| N(x) = \frac{1}{N(x)} N(x) = 1.$$

Pour $x = (1, -2, 2)$, les trois vecteurs unitaires obtenus sont

$$\frac{1}{5}(1, -2, 2), \quad \frac{1}{3}(1, -2, 2), \quad \frac{1}{2}(1, -2, 2),$$

respectivement pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

5) Les fonctions f , g et $f - g : t \mapsto t(1 - t)$ sont positives sur $[0, 1]$, ce qui permet de supprimer les valeurs absolues. La fonction f est croissante sur $[0, 1]$, de même que g , donc leur maximum est atteint en 1 ; celui de $f - g$ est atteint en $\frac{1}{2}$ d'après l'étude du trinôme. On obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}, & \|f\|_2 &= \left(\int_0^1 t^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \|g\|_1 &= \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}, & \|g\|_2 &= \left(\int_0^1 t^4 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

et $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. Enfin

$$\|f - g\|_1 = \int_0^1 (t - t^2) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \|f - g\|_\infty = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

et, comme $\int_0^1 (t - t^2)^2 dt = \int_0^1 (t^2 - 2t^3 + t^4) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$,

$$\|f - g\|_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Correction de l'exercice 5.2

Énoncé p. 28

1) L'application N est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, comme maximum de deux réels positifs. Soient $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Homogénéité. On a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$, donc

$$N(\lambda u) = \max(|\lambda x|, |\lambda x + \lambda y|) = \max(|\lambda| |x|, |\lambda| |x + y|) = |\lambda| N(u),$$

le facteur positif $|\lambda|$ pouvant être sorti du maximum.

Inégalité triangulaire. D'une part

$$|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N(u) + N(u'),$$

et d'autre part

$$|(x + x') + (y + y')| \leq |x + y| + |x' + y'| \leq N(u) + N(u').$$

Le réel $N(u) + N(u')$ majore donc les deux quantités dont $N(u + u')$ est le maximum, d'où $N(u + u') \leq N(u) + N(u')$.

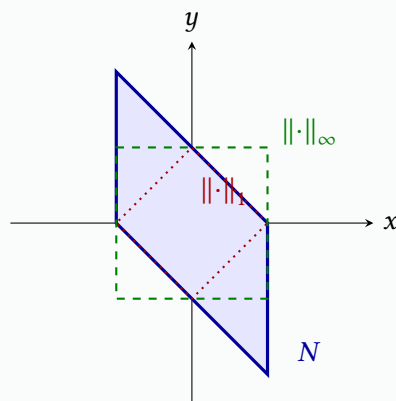
Séparation. Si $N(u) = 0$, alors $|x| \leq 0$ et $|x + y| \leq 0$, donc $x = 0$ puis $y = (x + y) - x = 0$, c'est-à-dire $u = (0, 0)$.

Ainsi N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) La condition $N(x, y) \leq 1$ s'écrit $|x| \leq 1$ et $|x + y| \leq 1$, c'est-à-dire

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 - x \leq y \leq 1 - x.$$

C'est le parallélogramme de sommets $(1, 0)$, $(1, -2)$, $(-1, 0)$ et $(-1, 2)$, représenté ci-dessous en trait plein. Les boules unité fermées de $\|\cdot\|_1$ (en pointillés) et de $\|\cdot\|_\infty$ (en tirets) y sont superposées.



Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x| \leq |x| + |y|$ et $|x + y| \leq |x| + |y|$, donc

$$N \leq \|\cdot\|_1.$$

Si $\|(x, y)\|_1 \leq 1$, il vient donc $N(x, y) \leq 1$: la boule unité de $\|\cdot\|_1$ est incluse dans celle de N . En revanche, le point $(1, 1)$ vérifie $\|(1, 1)\|_\infty = 1$ et $N(1, 1) = \max(1, 2) = 2 > 1$: il appartient à la boule unité de $\|\cdot\|_\infty$ mais pas à celle de N .

3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $|x| \leq \|(x, y)\|_\infty$ et

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2 \|(x, y)\|_\infty,$$

donc $N(x, y) \leq 2 \|(x, y)\|_\infty$ en passant au maximum.

Réciproquement, $|x| \leq N(x, y)$ et, en écrivant $y = (x + y) - x$,

$$|y| \leq |x + y| + |x| \leq 2N(x, y),$$

donc $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \leq 2N(x, y)$.

4) Les deux inégalités de la question 3 s'écrivent

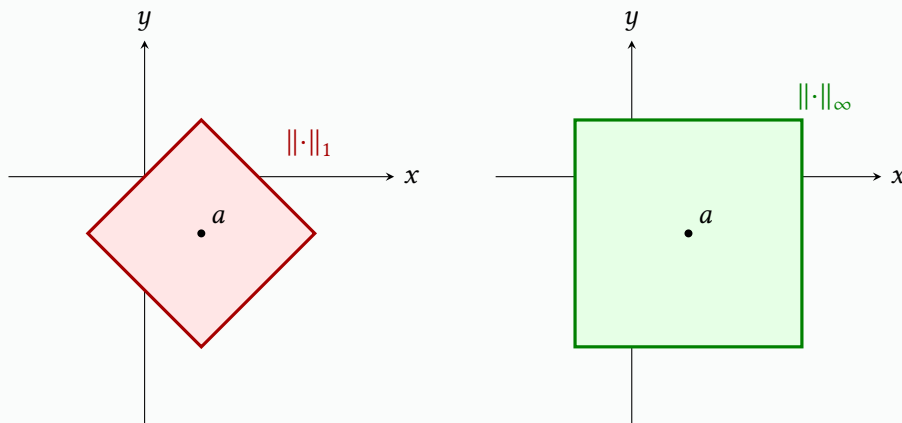
$$\frac{1}{2} \|\cdot\|_\infty \leq N \leq 2 \|\cdot\|_\infty,$$

ce qui est exactement la définition de l'équivalence, avec les constantes $\frac{1}{2} > 0$ et $2 > 0$. D'après la proposition d'invariance de la convergence par passage à une norme équivalente, une suite de $\mathbb{R}^2$ converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$, et les limites sont alors les mêmes.

Correction de l'exercice 5.3

Énoncé p. 28

1) La boule fermée de centre $a = (1, -1)$ et de rayon 2 est l'ensemble des (x, y) tels que $\|(x, y) - a\| \leq 2$. Pour $\|\cdot\|_1$, la condition s'écrit $|x - 1| + |y + 1| \leq 2$: c'est le carré de sommets $(3, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -3)$, dont les côtés font un angle de 45 degrés avec les axes. Pour $\|\cdot\|_\infty$, elle s'écrit $|x - 1| \leq 2$ et $|y + 1| \leq 2$: c'est le carré $[-1, 3] \times [-3, 1]$, de côtés parallèles aux axes.



2) La partie A est la boule fermée de centre 0 et de rayon 3 pour $\|\cdot\|_1$: elle est bornée, et convexe puisque toute boule l'est.

La partie B est l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Elle n'est pas bornée, car elle contient les points $(n, \frac{1}{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, dont la norme infinie vaut n . Elle n'est pas convexe :

les points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ lui appartiennent, mais le milieu du segment qu'ils déterminent est $(0, 0)$, qui vérifie $xy = 0 \neq 1$.

La partie C est une couronne. Elle est bornée : si $(x, y) \in C$, alors $x^2 + y^2 \leq 4$, donc $\|(x, y)\|_2 \leq 2$. Elle n'est pas convexe : les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ lui appartiennent, mais leur milieu $(0, 0)$ vérifie $x^2 + y^2 = 0 < 1$.

La partie D n'est pas bornée, car elle contient les points $(0, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est convexe : soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans D et soit $t \in [0, 1]$. L'identité

$$(1-t)x_1^2 + tx_2^2 - ((1-t)x_1 + tx_2)^2 = t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

donne $((1-t)x_1 + tx_2)^2 \leq (1-t)x_1^2 + tx_2^2$, donc

$$(1-t)y_1 + ty_2 \geq (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \geq ((1-t)x_1 + tx_2)^2,$$

et le point $(1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)$ appartient à D .

3) Une fonction $g \in E$ appartient à $\overline{B}(f, r)$ si et seulement si $\|g - f\|_\infty \leq r$, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t) - r \leq g(t) \leq f(t) + r.$$

C'est l'ensemble des fonctions continues dont le graphe reste dans le tube de demi-largeur r tracé autour du graphe de f .

4) La partie $\mathcal{F}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon 2 : elle est bornée et convexe.

La partie $\mathcal{G}$ est la sphère unité : elle est bornée, puisque $\|f\|_\infty = 1$ pour tout $f \in \mathcal{G}$. Elle n'est pas convexe : les fonctions constantes $f = 1$ et $g = -1$ lui appartiennent, mais leur milieu est la fonction nulle, de norme 0.

La partie $\mathcal{H}$ n'est pas bornée : elle contient les fonctions $t \mapsto nt$, de norme infinie n . Elle est convexe : c'est un sous-espace vectoriel de E , donc si $f(0) = g(0) = 0$ et $t \in [0, 1]$, la fonction $(1-t)f + tg$ s'annule encore en 0.

La partie $\mathcal{I}$ n'est pas bornée : les fonctions $f_n : s \mapsto 1 + n(s - \frac{1}{2})$ vérifient $\int_0^1 f_n = 1$ et $\|f_n\|_\infty = 1 + \frac{n}{2}$. Elle est convexe : si $\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1$ et $t \in [0, 1]$, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^1 ((1-t)f + tg) = (1-t) + t = 1.$$

Correction de l'exercice 5.4

Énoncé p. 29

1) D'après la proposition sur la convergence composante par composante, il suffit d'étudier chacune des trois coordonnées. On a

$$\frac{2n+1}{n+3} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2, \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et, comme $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 1$ par équivalent usuel,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

Les trois coordonnées convergent, donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (2, 0, e).$$

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ étant équivalentes sur $\mathbb{R}^3$, cette convergence a lieu pour les trois.

2) Les quatre coefficients sont des suites numériques convergentes :

$$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1, \quad \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \quad 3 \rightarrow 3,$$

la deuxième par encadrement, puisque $|\sin n| \leq 1$ donne $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. D'après la même proposition,

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Supposons que (v_n) converge vers $\ell = (\ell_1, \ell_2)$. D'après la proposition sur la convergence composante par composante, la suite réelle $((-1)^n)$ converge vers ℓ_1 . Or les suites extraites d'indices pairs et impairs sont constantes, égales à 1 et à -1 : comme toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, il viendrait $\ell_1 = 1$ et $\ell_1 = -1$, ce qui est absurde. Donc

la suite (v_n) diverge.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$f_n(t) - f(t) = t \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) = -\frac{t}{n+1},$$

donc $|f_n(t) - f(t)| = \frac{t}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, avec égalité en $t = 1$. Ainsi

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et la suite (f_n) converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$.

5) La fonction g_n est positive et croissante sur $[0, 1]$, donc son maximum est atteint en 1 :

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|g_n\|_\infty = g_n(1) = 1.$$

Comme $\|g_n - 0\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, la suite (g_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$. En revanche $\|g_n - 0\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0 : elle ne converge pas vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 5.5

Énoncé p. 29

1) Soit $u \in E$, alors la suite u est bornée, autrement dit, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M.$$

Donc les ensembles

$$\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \{|u_{n+1} - u_n|, n \in \mathbb{N}\}$$

sont des ensembles de réels (non vides et) bornés (puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M$), donc ont une borne supérieure, autrement dit les normes

$$\|u\|_\infty \quad \text{et} \quad N(u)$$

existent bien. Puis, pour tout $u \in E$,

$$N(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty \geq 0,$$

comme borne supérieure d'ensembles non vides de réels positifs.

Soit $u \in E$. Par définition, une borne supérieure est un majorant, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |u_n| \leq \|u\|_\infty \quad \text{et} \quad 0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq N(u).$$

Si $\|u\|_\infty = 0$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |u_n| \leq \|u\|_\infty = 0, \quad \text{donc} \quad u_n = 0.$$

Donc $u = 0$ (la suite nulle). Si $N(u) = 0$ alors de même on a

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc u est une suite constante, et comme $u_0 = 0$ (car $u \in E$), on a $u = 0$ (la suite nulle).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in E$. Alors

$$\|\lambda u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(\lambda u)_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda u_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda| |u_n| \stackrel{(\star)}{=} |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = |\lambda| \|u\|_\infty$$

(où l'égalité $(\star)$ se justifie car $|\lambda| \geq 0$).

Remarque

Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in E$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(\lambda u)_n| = |\lambda u_n| = |\lambda| |u_n| \leq |\lambda| \|u\|_\infty,$$

donc $|\lambda| \|u\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(\lambda u)_n|, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|\lambda u\|_\infty \leq |\lambda| \|u\|_\infty.$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\frac{1}{\lambda}$ au lieu de λ , et λu au lieu de u) donne :

$$\|u\|_\infty = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda u \right\|_\infty \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda u\|_\infty, \quad \text{soit} \quad |\lambda| \|u\|_\infty \leq \|\lambda u\|_\infty.$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la suite nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$\|\lambda u\|_\infty = |\lambda| \|u\|_\infty.$$

Puis, en utilisant ce qui précède (qui est valable pour toute suite bornée, et pas

seulement pour celles de E) :

$$\begin{aligned}
 N(\lambda u) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |(\lambda u)_{n+1} - (\lambda u)_n| \\
 &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda u_{n+1} - \lambda u_n| \\
 &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda(u_{n+1} - u_n)| \\
 &= \|\lambda(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = |\lambda| \|(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty \\
 &= |\lambda| N(u)
 \end{aligned}$$

Soit enfin $u \in E$ et $v \in E$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|(u+v)_n| = |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty,$$

donc $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(u+v)_n|, n \in \mathbb{N}\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n| = |u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n| \leq |u_{n+1} - u_n| + |v_{n+1} - v_n| \leq N(u) + N(v),$$

donc $N(u) + N(v)$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n|, n \in \mathbb{N}\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(u+v) \leq N(u) + N(v).$$

Conclusion : $\|\cdot\|_\infty$ et N sont bien des normes.

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2 \|u\|_\infty,$$

et comme une borne supérieure est le plus petit des majorants, on a alors

$$N(u) \leq 2 \|u\|_\infty.$$

Remarque

Pour u définie par $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = -1, u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, il y a égalité. Donc, 2 est la meilleure valeur possible pour k .

3) Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in E$,

$$\|u\|_\infty \leq \alpha N(u).$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $u^{(p)}$ la suite définie par

$$u_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \frac{1}{k}$$

(la somme vide valant 0, de sorte que $u_0^{(p)} = 0$).

Cette suite est croissante et stationnaire à partir du rang p , où elle vaut $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$: elle est donc bornée, et $u_0^{(p)} = 0$, donc $u^{(p)} \in E$. Ses accroissements valent

$$u_{n+1}^{(p)} - u_n^{(p)} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n+1 \leq p \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ils sont donc tous compris entre 0 et 1, et la valeur 1 est atteinte pour $n = 0$ (car $p \geq 1$). Ainsi

$$N(u^{(p)}) = 1 \quad \text{et} \quad \|u^{(p)}\|_{\infty} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k},$$

et l'inégalité supposée donne

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \leq \alpha.$$

Cela doit être vrai pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible, puisque

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

(la série harmonique est une série divergente à termes positifs).

Il n'existe donc aucun réel α tel que $\|\cdot\|_{\infty} \leq \alpha N$. La question 2 fournissant l'autre inégalité, on conclut :

les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et N ne sont pas équivalentes.

Remarque

Pour tout $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (par somme télescopique)

$$u_n = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k),$$

donc on a néanmoins

$$|u_n| \leq nN(u)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 5.6

Énoncé p. 29

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut définir $\|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ (on prend le maximum d'un nombre fini de réels, donc il existe) et c'est un réel positif.

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

— si $\|A\| = 0$, comme pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$0 \leq |a_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \leq \|A\| = 0,$$

alors on a

$$a_{i,j} = 0.$$

C'est vrai pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, donc

$$A = 0_n.$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda A\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |\lambda| |a_{i,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|$$

par propriété du max car $|\lambda| \geq 0$.

— Pour tous i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$,

$$|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|.$$

On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \quad \text{puis}$$

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| = \|A\| + \|B\|$$

C'est vrai pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc c'est vrai pour le max, d'où

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Conclusion :

$$A \mapsto \|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \text{ est bien une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Notons $C = AB$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la formule du produit matriciel, puis l'inégalité triangulaire, donnent :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n (|a_{i,k}| \|B\|) = \|B\| \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \\ &\leq \|B\| \|A\| \end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc c'est vrai pour le max, et donc

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Correction de l'exercice 5.7

Énoncé p. 29

Soit $P \in E$. $N(P)$ existe car P est continue sur le segment $[0, 1]$, donc borné (théorème des bornes atteintes). Puis,

$$N(P) \geq 0$$

comme borne supérieure d'un ensemble non vide de réels positifs.

Si $N(P) = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq |P(x)| \leq N(P) = 0, \quad \text{donc} \quad P(x) = 0.$$

Donc P a une infinité de racines (tout élément de $[0, 1]$), donc $P = 0$ (le polynôme nul).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors

$$N(\lambda P) = \sup_{x \in [0,1]} |(\lambda P)(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda P(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda| |P(x)| \stackrel{(\star)}{=} |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| = |\lambda| N(P),$$

où l'égalité $(\star)$ provient de ce que $|\lambda| \geq 0$.

Remarque

Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|(\lambda P)(x)| = |\lambda P(x)| = |\lambda| |P(x)| \leq |\lambda| N(P),$$

donc $|\lambda| N(P)$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(\lambda P)(x)|, x \in [0, 1]\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(\lambda P) \leq |\lambda| N(P).$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\frac{1}{\lambda}$ au lieu de λ , et λP au lieu de P) donne :

$$N(P) = N\left(\frac{1}{\lambda} \lambda P\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda P), \quad \text{soit} \quad |\lambda| N(P) \leq N(\lambda P).$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la fonction nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$N(\lambda P) = |\lambda| N(P).$$

Soit P et $Q \in E$, alors pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|(P + Q)(x)| = |P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq N(P) + N(Q).$$

Donc $N(P) + N(Q)$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(P + Q)(x)|, x \in [0, 1]\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(P + Q) \leq N(P) + N(Q).$$

Correction de l'exercice 5.8

Énoncé p. 29

1a) Par calculs matriciels directs,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0_3,$$

puis pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$ (pour que $k-3 \in \mathbb{N}$),

$$N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0_3 = \boxed{0_3}.$$

1b) On a

$$A = I_3 + N,$$

et les matrices I_3 et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k.$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$A^n = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k + \sum_{k=3}^n 0_3 = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k$$

(car $N^k = 0_3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$), ce qui donne

$$A^n = I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2 + 4n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Remarque

On vérifie alors directement que cette dernière égalité reste vraie pour $n = 1$ et $n = 0$.

On a alors directement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 6$,

$$\boxed{\|A^n\|_\infty = n^2 - 4n}$$

(car

$$n^2 - 4n \geq 2n \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \geq 6n \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 6,$$

puisque $n > 0$), et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_\infty = +\infty.$$

Remarque

En fait, on n'a pas besoin de déterminer précisément $\|A^n\|_\infty$. En effet, par définition, on a

$$\|A^n\|_\infty \geq |(A^n)_{2,3}| = |-n| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_\infty = +\infty.$$

2a) Remarquons que $\|\cdot\|_\infty$ est bien défini et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (on prend le maximum d'un nombre fini de modules, qui sont des réels positifs).

Séparation : soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On a alors par définition du maximum, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$0 \leq |m_{i,j}| \leq \|M\|_\infty.$$

Donc, si $\|M\|_\infty = 0$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$0 \leq |m_{i,j}| \leq 0, \quad \text{soit} \quad m_{i,j} = 0.$$

Donc

$$M = 0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})}.$$

Homogénéité : soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\|\lambda M\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} |(\lambda M)_{i,j}| = \max_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} |\lambda m_{i,j}| = \max_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} |\lambda| |m_{i,j}| \stackrel{(\star)}{=} |\lambda| \max_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} |m_{i,j}| = |\lambda| \|M\|_\infty$$

où l'égalité $(\star)$ se justifie car $|\lambda| \geq 0$.

Remarque

Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors pour $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$|(\lambda M)_{i,j}| = |\lambda m_{i,j}| = |\lambda| |m_{i,j}| \leq |\lambda| \|M\|_\infty,$$

donc $|\lambda| \|M\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(\lambda M)_{i,j}|, (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|\lambda M\|_\infty \leq |\lambda| \|M\|_\infty.$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\frac{1}{\lambda}$ au lieu de λ , et λM au lieu de M) donne :

$$\|M\|_\infty = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda M \right\|_\infty \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda M\|_\infty, \quad \text{soit} \quad |\lambda| \|M\|_\infty \leq \|\lambda M\|_\infty.$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la matrice nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$\|\lambda M\|_\infty = |\lambda| \|M\|_\infty.$$

Inégalité triangulaire : soit M et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, on a

$$|M_{i,j}| \leq \|M\|_\infty \quad \text{et} \quad |N_{i,j}| \leq \|N\|_\infty.$$

Or, par inégalité triangulaire classique (pour le module complexe), on a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$|(M + N)_{i,j}| = |M_{i,j} + N_{i,j}| \leq |M_{i,j}| + |N_{i,j}| \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty.$$

Donc $\|M\|_\infty + \|N\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(M + N)_{i,j}|, (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|M + N\|_\infty \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty.$$

D'où l'inégalité triangulaire.

Donc $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme.

2b) Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, on a alors $MN \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^q M_{i,k} N_{k,j}.$$

Fixons $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$, alors par inégalité triangulaire classique (pour le module complexe), on a

$$|(MN)_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^q |M_{i,k} N_{k,j}| = \sum_{k=1}^q |M_{i,k}| |N_{k,j}|.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on a

$$|M_{i,k}| \leq \|M\|_\infty \quad \text{et} \quad |N_{k,j}| \leq \|N\|_\infty.$$

Alors par produit d'inégalités positives dans le même sens, puis addition d'inégalités dans le même sens,

$$|(MN)_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^q \|M\|_\infty \|N\|_\infty = q \|M\|_\infty \|N\|_\infty.$$

Donc $q \|M\|_\infty \|N\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(MN)_{i,j}|, (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|MN\|_\infty \leq q \|M\|_\infty \|N\|_\infty.$$

3) λ est une valeur propre de M , donc il existe $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ **non nul** avec $MX = \lambda X$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n X = \lambda^n X$.

Initialisation : pour $n = 0$, $M^0 = I_d$ et $\lambda^0 = 1$, donc

$$M^0 X = I_d X = X = 1 \cdot X = \lambda^0 X.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $M^n X = \lambda^n X$. Alors

$$M^{n+1} X = M \times M^n X \underset{\text{H.R.}}{=} M \times \lambda^n X = \lambda^n M X = \lambda^n \cdot \lambda X = \lambda^{n+1} X,$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n X = \lambda^n X.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par homogénéité de la norme,

$$\|M^n X\|_\infty = \|\lambda^n X\|_\infty = |\lambda|^n \|X\|_\infty.$$

Or, le résultat de la question précédente donne

$$\|M^n X\|_\infty \leq d \|M^n\|_\infty \|X\|_\infty.$$

De plus, X est non nul (puisque c'est un vecteur propre), donc par séparabilité, on a $\|X\|_\infty \neq 0$, et comme une norme est toujours positive, on a même $\|X\|_\infty > 0$.

Donc l'inégalité

$$|\lambda|^n \|X\|_\infty \leq d \|M^n\|_\infty \|X\|_\infty \quad \text{donne} \quad |\lambda|^n \leq d \|M^n\|_\infty$$

(en divisant par $\|X\|_\infty > 0$), soit encore

$$\frac{1}{d} |\lambda|^n \leq \|M^n\|_\infty.$$

Or, $|\lambda| > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda|^n = +\infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} |\lambda|^n = +\infty$ (car $d > 0$), puis par inégalité,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\| = +\infty}.$$

4) Remarquons que λI_d et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (\lambda I_d)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geq p$ (pour que $k - p \in \mathbb{N}$), alors

$$N^k = N^{k-p} N^p = N^{k-p} 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})} = 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p - 1$, on a

$$(\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k + \sum_{k=p}^n 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Par inégalité triangulaire puis homogénéité, on a

$$0 \leq \|(\lambda I_d + N)^n\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \|N^k\|_\infty.$$

Or, pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

(à k **fixé**). Donc

$$\binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} |\lambda|^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(par croissance comparée, car $|\lambda| < 1$).

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \|N^k\|_\infty = 0$$

CAR la somme se fait sur un nombre constant (qui ne dépend pas de n) de termes qui tendent vers 0. Le théorème des gendarmes conclut alors :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda I_d + N)^n\|_\infty = 0}.$$

Correction de l'exercice 5.9

Énoncé p. 30

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant 0_E la fonction nulle sur $[0, 1]$,

$$\|f_n - 0_E\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 |\sqrt{n}x^n| dx = \int_0^1 \sqrt{n}x^n dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0_E$$

pour $\|\cdot\|_1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(1)| = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

(en fait, $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n}$), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, donc diverge pour $\|\cdot\|_\infty$ (on sait que toute suite convergente pour une norme est bornée pour cette norme).

Pour $\|\cdot\|_2$, c'est plus subtil. Rappelons que l'on a un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, et que, pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Donc, pour $f \in E$, si on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $|f|$ (qui est bien dans E) et 1 (la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$), on a

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt = \langle |f|, 1 \rangle \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 1 dt} = \|f\|_2.$$

Si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ pour $\|\cdot\|_2$, alors on a

$$0 \leq \|f - f_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc par théorème d'encadrement,

$$\|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

soit

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

pour $\|\cdot\|_1$.

Comme on a unicité de la limite, on obtient $f = 0_E$ (d'après le début de l'exercice).

Or,

$$\|f_n - 0_E\|_2 = \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (\sqrt{n}x^n)^2 dx} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

contradiction. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas pour $\|\cdot\|_2$.

Remarque

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n : x \mapsto n^{\frac{1}{4}} x^n$$

converge vers 0_E pour $\|\cdot\|_2$, car

$$\|f_n - 0_E\|_2 = \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(n^{\frac{1}{4}} x^n\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \sqrt{n} x^{2n} dx} = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(donc converge aussi pour $\|\cdot\|_1$ vers 0_E , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme vu précédemment), mais

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(1)| = n^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

(en fait, $\|f_n\|_\infty = |f_n(1)| = n^{\frac{1}{4}}$), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge pour $\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 5.10**Énoncé p. 30**

1) Soit x et y deux points fixes de f . Alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$, donc

$$N(x - y) = N(f(x) - f(y)) \leq kN(x - y).$$

Si $N(x - y) > 0$, alors on peut diviser par $N(x - y)$, et on obtient

$$1 \leq k.$$

Mais l'énoncé dit $k < 1$, contradiction. Donc $N(x - y) \leq 0$, puis

$$N(x - y) = 0$$

(car une norme est positive), donc

$$x = y$$

(par axiome de séparabilité d'une norme), d'où l'unicité de (l'éventuel) point fixe de f .

2a) Remarquons : pour $n \in \mathbb{N}$, comme $f(\ell) = \ell$ (car ℓ est un point fixe), on a

$$N(u_{n+1} - \ell) = N(f(u_n) - f(\ell)) \leq kN(u_n - \ell).$$

On montre alors l'inégalité demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $k^0 = 1$, donc

$$N(u_0 - \ell) \leq 1 \cdot N(u_0 - \ell) = k^0 N(u_0 - \ell).$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$, alors avec l'inégalité que l'on a remarqué au début de la question,

$$N(u_{n+1} - \ell) \leq kN(u_n - \ell) \underset{\text{H.R.}}{\leq} k \cdot k^n N(u_0 - \ell) = k^{n+1} N(u_0 - \ell).$$

D'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell).$$

2b) Comme $0 \leq k < 1$, on a

$$k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puis, une norme est positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et donc par le théorème d'encadrement, on a

$$N(u_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

autrement dit la suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Correction de l'exercice 5.11

Énoncé p. 30

1) Les matrices

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

conviennent.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, commençons par remarquer que, par définition de la norme infinie,

$$|x| \leq \|X\|_\infty, \quad |y| \leq \|X\|_\infty \quad \text{et} \quad |z| \leq \|X\|_\infty.$$

Puis, on a

$$AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(2x - z) \\ \frac{1}{6}(2x + y + 2z) \\ \frac{1}{6}(2x + 2y + z) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$|(AX)_1| = \left| \frac{1}{6}(2x - z) \right| \leq \frac{1}{6} (2|x| + |z|) \leq \frac{1}{6} (2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty) = \frac{1}{2} \|X\|_\infty,$$

et

$$|(AX)_2| = \left| \frac{1}{6}(2x + y + 2z) \right| \leq \frac{1}{6} (2|x| + |y| + 2|z|) \leq \frac{1}{6} (2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty + 2\|X\|_\infty) = \frac{5}{6} \|X\|_\infty,$$

et enfin

$$|(AX)_3| = \left| \frac{1}{6}(2x + 2y + z) \right| \leq \frac{1}{6} (2|x| + 2|y| + |z|) \leq \frac{1}{6} (2\|X\|_\infty + 2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty) = \frac{5}{6} \|X\|_\infty.$$

Donc

$$\|AX\|_\infty = \max(|(AX)_1|, |(AX)_2|, |(AX)_3|) \leq \max\left(\frac{1}{2} \|X\|_\infty, \frac{5}{6} \|X\|_\infty, \frac{5}{6} \|X\|_\infty\right) = \frac{5}{6} \|X\|_\infty,$$

et donc

$$k = \frac{5}{6} \in]0, 1[$$

convient.

3) Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X = AX + B \quad \Leftrightarrow \quad (I_3 - A)X = B,$$

or

$$\det(I_3 - A) = \frac{49}{108} \neq 0,$$

donc $I_3 - A$ est inversible, donc

$$(I_3 - A)X = B \quad \Leftrightarrow \quad X = (I_3 - A)^{-1}B,$$

il y a donc bien une et une seule solution, qui est

$$L = (I_3 - A)^{-1}B.$$

Remarque

Rappelons que le système $MX = Y$ avec $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de paramètre $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ a soit

1. aucune solution (lorsque $Y \notin \text{Im}(M)$)
2. une et une seule solution (si $Y \in \text{Im}(M)$ et $\text{Ker}(M) = \{0_{p,1}\}$ - dans le cas $n = p$, $\text{Ker}(M) = \{0_{p,1}\}$ est équivalent à l'inversibilité de M , et donc $Y \in \text{Im}(M)$ sera automatiquement vérifié),
3. une infinité de solutions (si $Y \in \text{Im}(M)$ et $\text{Ker}(M) \neq \{0_{p,1}\}$).

Ceci dit, il y a ici une méthode plus en lien avec l'exercice pour établir l'inversibilité de $I_3 - A$: déterminons son noyau. Soit $X \in \text{Ker}(I_3 - A)$, c'est-à-dire $AX = X$. Alors

$$\|X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \frac{5}{6} \|X\|_\infty,$$

soit

$$\frac{1}{6} \|X\|_\infty \leq 0,$$

et comme une norme est positive, cela donne

$$\|X\|_\infty = 0, \quad \text{puis} \quad X = 0_{3,1}$$

(par l'axiome de séparation). Donc

$$\text{Ker}(I_3 - A) = \{0_{3,1}\},$$

et la matrice carrée $I_3 - A$ est donc inversible.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} - L = (AX_n + B) - (AL + B) = A(X_n - L),$$

donc

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty = \|A(X_n - L)\|_\infty \leq k \|X_n - L\|_\infty$$

par la question 2 (appliqué en remplaçant X par $X_n - L$).
Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty.$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $k^n = k^0 = 1$, donc

$$\|X_0 - L\|_\infty \leq 1 \cdot \|X_0 - L\|_\infty = k^0 \|X_0 - L\|_\infty.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty$. Alors, avec l'inégalité que l'on a remarqué au début de cette question,

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty \leq k \|X_n - L\|_\infty \underset{\text{H.R.}}{\leq} k \cdot k^n \|X_0 - L\|_\infty = k^{n+1} \|X_0 - L\|_\infty,$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty.$$

Puis, comme $0 \leq k < 1$, on a

$$k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et comme une norme est positive,

$$0 \leq \|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc le théorème d'encadrement donne

$$\|X_n - L\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

autrement dit, la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L .

Correction de l'exercice 5.12

Énoncé p. 30

Commençons par remarquer que :

$$A^{2p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P$$

en tant que suite extraite. Montrons que cette limite est également P^2 .

En effet, la norme $\|\cdot\|$ vérifie $\|MM'\| \leq \|M\| \|M'\|$ pour toutes matrices M et M' , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \|A^{2p} - P^2\| &= \|A^{2p} - A^p P + A^p P - P^2\| \\ &\leq \|A^{2p} - A^p P\| + \|A^p P - P^2\| \\ &\leq \|A^p (A^p - P)\| + \|(A^p - P)P\| \\ &\leq \underbrace{\|A^p\|}_{\text{borné car } (A^p) \text{ converge}} \underbrace{\|A^p - P\|}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\|A^p - P\|}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0} \underbrace{\|P\|}_{\text{constante}}. \end{aligned}$$

Donc par encadrement, on a $\|A^{2p} - P^2\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire :

$$A^{2p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P^2.$$

Puis, par unicité de la limite, on a :

$$\boxed{P^2 = P.}$$

Les autres égalités se montrent de même. Par exemple :

$$A^{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P$$

comme suite extraite. De plus :

$$\|A^{p+1} - AP\| = \underbrace{\|A\|}_{\text{constante}} \underbrace{\|A^p - P\|}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0}.$$

D'où $A^{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} AP$. Et par unicité de la limite :

$$\boxed{AP = P.}$$

Correction de l'exercice 5.13

Énoncé p. 30

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La seconde inégalité triangulaire, appliquée à x_n et ℓ , donne

$$0 \leq ||x_n|| - ||\ell|| \leq \|x_n - \ell\|.$$

Or $\|x_n - \ell\| \rightarrow 0$ par hypothèse, donc par le théorème d'encadrement,

$$||x_n|| - ||\ell|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{||x_n|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ||\ell||}.$$

2) Non. Prenons $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $x_n = (-1)^n$ et $a = 1$. Alors $|x_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = |a|.$$

Pourtant, la suite (x_n) ne converge pas : les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont constantes égales à 1 et à -1, donc convergent vers 1 et vers -1. Si (x_n) convergeait, ces deux limites seraient toutes deux égales à la limite de (x_n) , donc égales entre elles, ce qui est faux.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - 0_E\| = \|x_n\|,$$

donc l'hypothèse $\|x_n\| \rightarrow 0$ s'écrit exactement $\|x_n - 0_E\| \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0_E}.$$

Correction de l'exercice 5.14

Énoncé p. 31

1) Soit $x \in E$. L'ensemble $\{\|x - a\|, a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide car A l'est, et minorée par 0 car une norme est à valeurs positives. Elle admet donc une borne inférieure : $d(x, A)$ est bien défini, et $d(x, A) \geq 0$.

2) Soient $x, y \in E$ et soit $a \in A$. Par inégalité triangulaire,

$$\|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

Or une borne inférieure est un minorant, donc $d(x, A) \leq \|x - a\|$, d'où

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|.$$

Cette inégalité vaut pour tout $a \in A$, donc le réel $d(x, A) - \|x - y\|$ minore l'ensemble $\{\|y - a\|, a \in A\}$; il est donc inférieur ou égal à sa borne inférieure, qui en est le plus grand minorant :

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A), \quad \text{soit} \quad d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A).$$

En échangeant les rôles de x et de y , et comme $\|y - x\| = \|x - y\|$ par homogénéité, on obtient aussi

$$d(y, A) \leq \|x - y\| + d(x, A).$$

Le réel $\|x - y\|$ majore donc $d(x, A) - d(y, A)$ et son opposé : il majore leur valeur absolue, soit

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

3) Les éléments de A sont les $(t, 0)$ avec $t \in \mathbb{R}$, et pour un tel élément,

$$\|x - (t, 0)\|_\infty = \max(|x_1 - t|, |x_2|) \geq |x_2|.$$

Ainsi $|x_2|$ minore l'ensemble $\{\|x - a\|, a \in A\}$. De plus, le choix $t = x_1$ donne

$$\|x - (x_1, 0)\|_\infty = \max(0, |x_2|) = |x_2|,$$

donc $|x_2|$ appartient à cet ensemble : c'est son plus petit élément, donc sa borne inférieure. D'où

$$d(x, A) = |x_2|.$$

4) Si $x \in A$, alors $\|x - x\| = 0$ appartient à l'ensemble $\{\|x - a\|, a \in A\}$, donc $d(x, A) \leq 0$; avec la question 1, $d(x, A) = 0$.

La réciproque est fausse. Prenons $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue et $A =]0, 1[$. Alors $0 \notin A$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \in A$, donc

$$0 \leq d(0, A) \leq \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

et en faisant tendre n vers l'infini, $d(0, A) = 0$.

Correction de l'exercice 5.15

Énoncé p. 31

1) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient diagonal d'indice (j, j) de $A^\top B$ vaut

$$(A^\top B)_{j,j} = \sum_{i=1}^n (A^\top)_{j,i} b_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

En sommant sur j ,

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

2) La formule de la question 1 rend les quatre vérifications immédiates.

Bilinéarité. À B fixée, l'application $A \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$ est linéaire, car les coefficients de $\lambda A + \mu A'$ sont les $\lambda a_{i,j} + \mu a'_{i,j}$. À A fixée, de même pour $B \mapsto \langle A, B \rangle$.

Symétrie. Le produit $a_{i,j}b_{i,j}$ est commutatif, donc $\langle B, A \rangle = \langle A, B \rangle$.

Positivité. On a

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$$

comme somme de carrés.

Caractère défini. Si $\langle A, A \rangle = 0$, c'est une somme nulle de termes positifs : tous ses termes sont nuls, donc $a_{i,j} = 0$ pour tout couple (i, j) , soit $A = 0_n$.

C'est donc un produit scalaire. La norme associée vaut, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\sqrt{\langle A, A \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2.$$

3) L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'écrit $|\langle A, B \rangle| \leq \sqrt{\langle A, A \rangle} \sqrt{\langle B, B \rangle}$, soit

$$|\operatorname{tr}(A^T B)| \leq \|A\|_2 \|B\|_2.$$

4) Soit $\|\cdot\|$ la norme associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace préhilbertien réel, et soient x et y dans cet espace. En développant par bilinéarité et symétrie,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

et en additionnant ces deux égalités,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Prenons maintenant $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, de sorte que $x + y = (1, 1)$ et $x - y = (1, -1)$.

Pour $\|\cdot\|_1$: $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ et $\|x + y\|_1 = \|x - y\|_1 = 2$, donc le membre de gauche vaut $4 + 4 = 8$ et celui de droite $2 + 2 = 4$.

Pour $\|\cdot\|_\infty$: $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x + y\|_\infty = \|x - y\|_\infty = 1$, donc le membre de gauche vaut $1 + 1 = 2$ et celui de droite $2 + 2 = 4$.

Dans les deux cas l'identité est mise en défaut, donc

$$\text{ni } \|\cdot\|_1 \text{ ni } \|\cdot\|_\infty \text{ n'est associée à un produit scalaire sur } \mathbb{R}^2.$$

Correction de l'exercice 5.16

Énoncé p. 31

Cas de N_1 . L'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Elle est homogène : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$N_1(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{|\lambda^2 xy|} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{|xy|} = |\lambda| N_1(x, y).$$

Elle ne vérifie pas l'axiome de séparation : $N_1(1, 0) = 0$ alors que $(1, 0) \neq (0, 0)$.

Elle ne vérifie pas non plus l'inégalité triangulaire : avec $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$,

$$N_1(u + v) = N_1(1, 1) = 1 \quad \text{et} \quad N_1(u) + N_1(v) = 0 + 0 = 0.$$

Cas de N_2 . L'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Elle vérifie l'axiome de séparation : si $|x| + y^2 = 0$, c'est une somme nulle de termes positifs, donc $|x| = 0$ et $y^2 = 0$, soit $(x, y) = (0, 0)$.

Elle n'est pas homogène : $N_2(0, 1) = 1$, tandis que

$$N_2(2 \cdot (0, 1)) = N_2(0, 2) = 4 \neq 2 = |2| N_2(0, 1).$$

Elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire : avec $u = v = (0, 1)$,

$$N_2(u + v) = N_2(0, 2) = 4 \quad \text{et} \quad N_2(u) + N_2(v) = 1 + 1 = 2.$$

Cas de N_3 . L'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Elle est homogène : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$N_3(\lambda x, \lambda y) = \left(\sqrt{|\lambda|} \sqrt{|x|} + \sqrt{|\lambda|} \sqrt{|y|} \right)^2 = |\lambda| \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \right)^2 = |\lambda| N_3(x, y).$$

Elle vérifie l'axiome de séparation : si $N_3(x, y) = 0$, alors $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 0$, somme nulle de termes positifs, donc $|x| = |y| = 0$.

Elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire : avec $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$,

$$N_3(u + v) = N_3(1, 1) = (1 + 1)^2 = 4 \quad \text{et} \quad N_3(u) + N_3(v) = 1 + 1 = 2.$$

On reconnaît $N_3 = \|\cdot\|_p$ pour $p = \frac{1}{2}$: c'est le cas $0 < p < 1$ évoqué dans le cours.

Correction de l'exercice 5.17

Énoncé p. 31

1) Le maximum étant atteint, fixons $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{k_0}|$. Tous les termes de la somme $\sum_{k=1}^n |x_k|^2$ sont positifs, et $|x_{k_0}|^2$ est l'un d'eux, donc

$$\|x\|_\infty^2 = |x_{k_0}|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2,$$

et la croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ donne $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

Ensuite, en développant le carré de la somme,

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right)^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 + \sum_{\substack{1 \leq k, l \leq n \\ k \neq l}} |x_k| |x_l| \geq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2,$$

les termes croisés étant positifs. La croissance de la racine carrée donne $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, appliquée aux vecteurs $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $(1, \dots, 1)$, donne

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \times 1 \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \|x\|_2.$$

Par ailleurs, $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc en sommant les carrés,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq n \|x\|_\infty^2,$$

puis $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.

3) Les questions 1 et 2 donnent, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty,$$

ce sont exactement les deux inégalités de la définition, avec les constantes 1 et $\sqrt{n}$: les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ le sont aussi. Enfin, le cours a établi $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$. Donc

$$\boxed{\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \text{ et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont deux à deux équivalentes sur } \mathbb{K}^n.}$$

4) Pour $x = (1, 0, \dots, 0)$, on a $\|x\|_\infty = \|x\|_2 = \|x\|_1 = 1$: il y a égalité dans les deux inégalités de la question 1.

Pour $x = (1, 1, \dots, 1)$, on a $\|x\|_\infty = 1$, $\|x\|_2 = \sqrt{n}$ et $\|x\|_1 = n$: il y a égalité dans les deux inégalités de la question 2.

Correction de l'exercice 5.18

Énoncé p. 31

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Fixons (i_0, j_0) tel que $\|A\|_\infty = |a_{i_0, j_0}|$. Tous les termes de la somme $\sum_{j=1}^n |a_{i_0, j}|$ sont positifs, et $|a_{i_0, j_0}|$ est l'un d'eux, donc

$$\|A\|_\infty = |a_{i_0, j_0}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0, j}| \leq N(A),$$

la dernière inégalité parce que $N(A)$ est le maximum de ces sommes.

Réciproquement, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, chacun des n termes de $\sum_{j=1}^n |a_{i, j}|$ est majoré par $\|A\|_\infty$, donc

$$\sum_{j=1}^n |a_{i, j}| \leq n \|A\|_\infty.$$

Le réel $n \|A\|_\infty$ majore ainsi toutes ces sommes, donc majore leur maximum : $N(A) \leq n \|A\|_\infty$.

2) La question 1 s'écrit

$$\|\cdot\|_\infty \leq N \quad \text{et} \quad N \leq n \|\cdot\|_\infty,$$

avec $1 > 0$ et $n > 0$: les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La proposition d'invariance de la convergence donne alors le résultat : une suite converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$, avec la même limite.

3) Identifions $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^{n^2}$ en rangeant les coefficients en une seule liste : la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'énoncé est alors la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{C}^{n^2}$.

Par hypothèse, les n^2 suites de coefficients de $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent, et les limites sont les coefficients de P . La proposition de convergence composante par composante donne alors

$$A^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} P \quad \text{pour } \|\cdot\|_\infty.$$

La question 2 transporte cette convergence à la norme N : la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers P pour N . Or N est la norme dont l'exercice 5.12 munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et son hypothèse est donc satisfaite. Il donne

$$\boxed{P^2 = P}.$$

Correction de l'exercice 5.19

Énoncé p. 32

1) La fonction w est continue sur le segment $[0, 1]$, donc le théorème des bornes atteintes lui donne un minimum m et un maximum M , et $m > 0$ puisque w est strictement positive. Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$m |f(t)| \leq w(t) |f(t)| \leq M |f(t)|,$$

donc, par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$,

$$m \|f\|_1 \leq N_w(f) \leq M \|f\|_1.$$

En divisant la première inégalité par $m > 0$, il vient

$$\|f\|_1 \leq \frac{1}{m} N_w(f) \quad \text{et} \quad N_w(f) \leq M \|f\|_1,$$

avec $\frac{1}{m} > 0$ et $M > 0$ (car $M \geq m > 0$) : les deux normes sont équivalentes.

2) Pour $f \in E$, la fonction $t \mapsto t |f(t)|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $N_w(f)$ est bien définie, et positive par positivité de l'intégrale. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Homogénéité. Par linéarité de l'intégrale et positivité de $|\lambda|$,

$$N_w(\lambda f) = \int_0^1 t |\lambda| |f(t)| dt = |\lambda| N_w(f).$$

Inégalité triangulaire. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$t |f(t) + g(t)| \leq t |f(t)| + t |g(t)|,$$

et la croissance de l'intégrale donne $N_w(f + g) \leq N_w(f) + N_w(g)$.

Séparation. Supposons $N_w(f) = 0$. La fonction $t \mapsto t |f(t)|$ est continue et positive sur $[0, 1]$, et d'intégrale nulle : elle est donc identiquement nulle. Ainsi $t f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, 1]$. Enfin, f est continue en 0, donc

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0.$$

D'où $f = 0$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$, vaut $1 - nt$ sur $[0, \frac{1}{n}]$ et 0 sur $[\frac{1}{n}, 1]$, et elle est positive. Donc

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \left[t - \frac{nt^2}{2} \right]_0^{1/n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \boxed{\frac{1}{2n}},$$

et

$$N_w(f_n) = \int_0^{1/n} t(1 - nt) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{nt^3}{3} \right]_0^{1/n} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} = \boxed{\frac{1}{6n^2}}.$$

4) Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|f\|_1 \leq \alpha N_w(f)$ pour tout $f \in E$. En appliquant cette inégalité à f_n , il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{\alpha}{6n^2}, \quad \text{soit} \quad 3n \leq \alpha.$$

C'est impossible, car $3n \rightarrow +\infty$. Il n'existe donc aucune telle constante, et

$$\boxed{N_w \text{ et } \|\cdot\|_1 \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

L'autre inégalité est pourtant vérifiée : comme $t \leq 1$ sur $[0, 1]$, on a $N_w(f) \leq \|f\|_1$ pour tout $f \in E$.

Correction de l'exercice 5.20

Énoncé p. 32

1) Soit $x \in \mathbb{R}^2$. La question 1 de l'exercice 5.17 donne

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Si $x \in B_1$, c'est-à-dire $\|x\|_1 \leq 1$, alors $\|x\|_2 \leq 1$, donc $x \in B_2$: d'où $B_1 \subset B_2$. Si $x \in B_2$, alors $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq 1$, donc $x \in B_\infty$: d'où $B_2 \subset B_\infty$.

2) Supposons $N \leq \alpha N'$ et soit $x \in B'$, donc $N'(x) \leq 1$. Alors

$$N(x) \leq \alpha N'(x) \leq \alpha,$$

donc $x \in B_\alpha$. D'où $B' \subset B_\alpha$.

Réciproquement, supposons $B' \subset B_\alpha$ et soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, les deux membres de $N(x) \leq \alpha N'(x)$ sont nuls. Sinon, $N'(x) \neq 0$ par l'axiome de séparation, donc $N'(x) > 0$, et on peut poser

$$y = \frac{1}{N'(x)} x, \quad \text{qui vérifie} \quad N'(y) = \frac{1}{N'(x)} N'(x) = 1$$

par homogénéité. Donc $y \in B'$, puis $y \in B_\alpha$, c'est-à-dire $N(y) \leq \alpha$. Or $N(y) = \frac{N(x)}{N'(x)}$, toujours par homogénéité, d'où

$$N(x) \leq \alpha N'(x).$$

3) L'inclusion $B_1 \subset B_2$ est le cas $\alpha = 1$ de la question 2 avec $N' = \|\cdot\|_1$ et $N = \|\cdot\|_2$: elle équivaut donc à $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$.

De même, $B_2 \subset B_\infty$ est le cas $\alpha = 1$ avec $N' = \|\cdot\|_2$ et $N = \|\cdot\|_\infty$: elle équivaut à $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$.

On retrouve bien les deux inégalités de la question 1.

Correction de l'exercice 5.21

Énoncé p. 32

1) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties convexes de E et soit $C = \bigcap_{i \in I} C_i$. Soient $x, y \in C$ et $t \in [0, 1]$. Pour tout $i \in I$, on a $x \in C_i$ et $y \in C_i$, et C_i est convexe, donc $(1-t)x + ty \in C_i$. C'est vrai pour tout $i \in I$, donc $(1-t)x + ty \in C$: la partie C est convexe.

Pour la réunion, prenons dans $\mathbb{R}^2$

$$C_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \quad \text{et} \quad C_2 = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, donc deux parties convexes : si x, y appartiennent à un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire de x et y appartient aussi. Or $(1, 0) \in C_1 \cup C_2$ et $(0, 1) \in C_1 \cup C_2$, tandis que pour $t = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin C_1 \cup C_2.$$

La réunion $C_1 \cup C_2$ n'est donc pas convexe.

2) Comme $E \neq \{0_E\}$, il existe $v \in E$ non nul, donc $\|v\| > 0$ par l'axiome de séparation. Posons $u = \frac{1}{\|v\|}v$, de sorte que $\|u\| = 1$ par homogénéité, puis

$$x = a + ru \quad \text{et} \quad y = a - ru.$$

Alors $\|x - a\| = r\|u\| = r$ et $\|y - a\| = r$, donc x et y appartiennent à $S(a, r)$. Pourtant, pour $t = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = a, \quad \text{et} \quad \|a - a\| = 0 \neq r$$

puisque $r > 0$: le point a n'appartient pas à $S(a, r)$. La sphère n'est donc pas convexe.

3) Soient $x', y' \in u(C)$ et $t \in [0, 1]$. Il existe $x, y \in C$ tels que $x' = u(x)$ et $y' = u(y)$. Par linéarité de u ,

$$(1-t)x' + ty' = (1-t)u(x) + tu(y) = u((1-t)x + ty).$$

Or C est convexe, donc $(1-t)x + ty \in C$, et le vecteur ci-dessus appartient à $u(C)$. Donc $u(C)$ est convexe.

4) Soient $f, g \in C$ et $t \in [0, 1]$. La fonction $(1-t)f + tg$ est continue sur $[0, 1]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues. De plus, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$(1-t)f(s) + tg(s) \geq 0$$

comme somme de produits de réels positifs, puisque $1-t \geq 0$, $t \geq 0$, $f(s) \geq 0$ et $g(s) \geq 0$. Donc $(1-t)f + tg \in C$, et C est convexe.

Correction de l'exercice 5.22

Énoncé p. 32

1) Par la caractérisation des parties bornées, il existe $M_A > 0$ et $M_B > 0$ tels que $\|a\| \leq M_A$ pour tout $a \in A$ et $\|b\| \leq M_B$ pour tout $b \in B$.

Soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$, et l'inégalité triangulaire donne

$$\|x\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq M_A + M_B.$$

Comme $M_A + M_B > 0$, la partie $A + B$ est bornée.

Soit $x \in \lambda A$. Il existe $a \in A$ tel que $x = \lambda a$, et l'homogénéité donne

$$\|x\| = |\lambda| \|a\| \leq |\lambda| M_A \leq |\lambda| M_A + 1.$$

Comme $|\lambda| M_A + 1 > 0$, la partie λA est bornée.

2) Posons $D_k = [-k, k]$ pour $k \in \mathbb{N}$. Chaque D_k est bornée, puisque $|x| \leq k \leq k+1$ pour tout $x \in D_k$. Pourtant

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k = \mathbb{R},$$

car tout réel x appartient à D_k dès que $k \geq |x|$. Et $\mathbb{R}$ n'est pas borné : pour tout $M > 0$, le réel $M+1$ vérifie $|M+1| > M$. L'hypothèse « famille finie » de la proposition du cours est donc nécessaire.

3) Pour tout $t \in D$,

$$|f(t)| \leq \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad |g(t)| \leq \|g\|_\infty,$$

et ces quatre quantités sont positives, donc par produit d'inégalités entre réels positifs,

$$|(fg)(t)| = |f(t)| |g(t)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

La fonction fg est donc bornée, et $\|f\|_\infty \|g\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|(fg)(t)|, t \in D\}$, donc est supérieur ou égal à sa borne supérieure :

$$\boxed{\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty}.$$

Correction de l'exercice 5.23

Énoncé p. 33

1) Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $A = aI_2 + bN$. Un calcul direct donne $N^2 = 0_2$, donc $N^k = 0_2$ pour tout $k \geq 2$. Les matrices aI_2 et bN commutent, donc la formule

du binôme de Newton donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (bN)^k (aI_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\min(n,1)} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} N^k.$$

Pour $n = 0$, cela donne $A^0 = I_2$, et pour $n \geq 1$,

$$A^n = a^n I_2 + na^{n-1}bN = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

2) D'après la proposition de convergence composante par composante, la suite (A^n) converge pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si chacun de ses quatre coefficients converge, c'est-à-dire si et seulement si les suites (a^n) et $(na^{n-1}b)$ convergent.

Étudions d'abord (a^n) . Si $|a| < 1$, alors $|a^n| = |a|^n \rightarrow 0$, donc $a^n \rightarrow 0$. Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1. Si $|a| > 1$, alors $|a^n| \rightarrow +\infty$: la suite n'est pas bornée, donc diverge. Enfin, si $|a| = 1$ avec $a \neq 1$: si (a^n) convergeait vers ℓ , alors, en passant à la limite dans $a^{n+1} = a \times a^n$, on aurait $\ell = a\ell$, soit $\ell(a-1) = 0$ et donc $\ell = 0$; mais $|a^n| = 1$ pour tout n , donc $|\ell| = 1$, ce qui est contradictoire. La suite (a^n) converge donc si et seulement si $|a| < 1$ ou $a = 1$.

Si $|a| < 1$, alors $|na^{n-1}b| = n|a|^{n-1}|b| \rightarrow 0$ par croissance comparée, donc $na^{n-1}b \rightarrow 0$, et

$$A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0_2.$$

Si $a = 1$, alors $A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la suite (nb) converge si et seulement si $b = 0$ (sinon $|nb| \rightarrow +\infty$). Dans ce cas $A = I_2$ et $A^n \rightarrow I_2$.

Finalement,

$$(A^n) \text{ converge} \iff |a| < 1 \text{ ou } (a = 1 \text{ et } b = 0),$$

la limite valant 0_2 dans le premier cas et I_2 dans le second.

3) Oui : $0_2^2 = 0_2$ et $I_2^2 = I_2$, ce qui est conforme à la conclusion de l'exercice 5.12.

Correction de l'exercice 5.24

Énoncé p. 33

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ell = \ell$, donc

$$y_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \ell),$$

puis, par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$\|y_n - \ell\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|x_k - \ell\|.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\|x_k - \ell\| \rightarrow 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq N$,

$$\|x_k - \ell\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $C = \sum_{k=1}^{N-1} \|x_k - \ell\|$: c'est un réel positif fixé, qui ne dépend pas de n . Alors, pour tout $n \geq N$, en coupant la somme au rang N ,

$$\|y_n - \ell\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} \|x_k - \ell\| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n \|x_k - \ell\| \leq \frac{C}{n} + \frac{n-N+1}{n} \times \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{C}{n} + \frac{\epsilon}{2},$$

puisque $n - N + 1 \leq n$. Enfin $\frac{C}{n} \rightarrow 0$, donc il existe $N' \geq N$ tel que $\frac{C}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $n \geq N'$. Pour un tel n ,

$$\|y_n - \ell\| \leq \epsilon.$$

Ceci valant pour tout $\epsilon > 0$, on a $\|y_n - \ell\| \rightarrow 0$, soit

$$\boxed{y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell}.$$

2) Non. Soit $a \in E$ non nul et posons $x_n = (-1)^n a$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=1}^n x_k = \begin{cases} 0_E & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -a & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

car les termes se regroupent deux à deux. Dans les deux cas,

$$0 \leq \|y_n\| \leq \frac{\|a\|}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc (y_n) converge vers 0_E . Pourtant (x_n) diverge : les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont constantes égales à a et à $-a$, et $a \neq -a$ puisque $a \neq 0_E$; si (x_n) convergeait, ces deux limites seraient égales.

Correction de l'exercice 5.25

Énoncé p. 33

1) Notons ℓ_0 , ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives de (x_{2n}) , (x_{2n+1}) et (x_{3n}) .

La suite (x_{6n}) est extraite de (x_{2n}) , par $n \mapsto 3n$ qui est strictement croissante, donc elle converge vers ℓ_0 . Elle est aussi extraite de (x_{3n}) , par $n \mapsto 2n$, donc elle converge vers ℓ_2 . Par unicité de la limite, $\ell_0 = \ell_2$.

La suite (x_{6n+3}) est extraite de (x_{2n+1}) , par $n \mapsto 3n + 1$, donc elle converge vers ℓ_1 . Elle est aussi extraite de (x_{3n}) , par $n \mapsto 2n + 1$, donc elle converge vers ℓ_2 . Par unicité de la limite, $\ell_1 = \ell_2$.

Ainsi $\ell_0 = \ell_1$; notons ℓ cette valeur commune et montrons que $x_n \rightarrow \ell$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_{2n} - \ell\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N_0$, et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_{2n+1} - \ell\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N_1$. Posons $N = 2 \max(N_0, N_1) + 1$ et soit $m \geq N$.

Si m est pair, écrivons $m = 2n$; alors $2n \geq 2 \max(N_0, N_1) + 1$, donc $n > \max(N_0, N_1)$, et en particulier $n \geq N_0$, d'où $\|x_m - \ell\| \leq \epsilon$.

Si m est impair, écrivons $m = 2n + 1$; alors $2n + 1 \geq 2 \max(N_0, N_1) + 1$, donc $n \geq \max(N_0, N_1) \geq N_1$, d'où $\|x_m - \ell\| \leq \epsilon$.

Dans les deux cas $\|x_m - \ell\| \leq \epsilon$, donc

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell}.$$

2) Soit $a \in E$ non nul et posons $x_n = (-1)^n a$. Les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont constantes égales à a et à $-a$, donc convergent. Pourtant (x_n) diverge : si elle convergeait, ces deux limites seraient égales, or $a \neq -a$ puisque $a \neq 0_E$.

Les deux premières hypothèses ne suffisent donc pas. On vérifie au passage que la troisième est bien en défaut ici : $x_{3n} = (-1)^{3n} a = (-1)^n a$, et cette suite diverge pour la même raison.

Correction de l'exercice 5.26

Énoncé p. 33

1) Si P et Q ont pour coefficients (a_k) et (b_k) et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P+Q$ a pour coefficients $(a_k + b_k)$ et λP a pour coefficients (λa_k) . Dans les deux cas, les sommes et les maxima écrits ci-dessous ne portent que sur un nombre fini de termes non nuls, donc N_c et N_s sont bien définies et positives.

Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N_s(\lambda P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k| = |\lambda| N_s(P),$$

et de même $N_c(\lambda P) = \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda| |a_k| = |\lambda| N_c(P)$.

Inégalité triangulaire. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$. En sommant, $N_s(P + Q) \leq N_s(P) + N_s(Q)$; en majorant chaque terme par $N_c(P) + N_c(Q)$ puis en passant au maximum, $N_c(P + Q) \leq N_c(P) + N_c(Q)$.

Séparation. Si $N_s(P) = 0$, tous les $|a_k|$ sont nuls car ce sont des réels positifs de somme nulle, donc $P = 0$. Si $N_c(P) = 0$, alors $|a_k| \leq 0$ pour tout k , donc $P = 0$.

2) Soit $t \in [0, 1]$. Comme $0 \leq t^k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|P(t)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k t^k \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k| t^k \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k| = N_s(P).$$

Ce majorant ne dépend pas de t , donc $N_\infty(P) \leq N_s(P)$.

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_j| = N_s(P)$, donc $N_c(P) \leq N_s(P)$.

3) Tous les coefficients de Q_n valent 1, et il y en a $n+1$ de non nuls, donc $N_c(Q_n) = 1$ et $N_s(Q_n) = n+1$. De plus, Q_n est à coefficients positifs, donc $t \mapsto Q_n(t)$ est croissante sur $[0, 1]$ et

$$N_\infty(Q_n) = Q_n(1) = n+1.$$

Pour R_n : si $t \in [0, 1]$, alors $2t-1 \in [-1, 1]$, donc $|R_n(t)| = |2t-1|^n \leq 1$, avec égalité en $t = 0$. Ainsi $N_\infty(R_n) = 1$. La formule du binôme donne

$$R_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2X)^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} X^k,$$

d'où

$$N_s(R_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n.$$

4) N_c et N_s . S'il existait $\beta > 0$ tel que $N_s \leq \beta N_c$, on aurait $n+1 \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en appliquant l'inégalité à Q_n , ce qui est absurde. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

N_c et N_∞ . De même, $N_\infty \leq \beta N_c$ donnerait $n+1 \leq \beta$ pour tout n .

N_s et N_∞ . Si $N_s \leq \beta N_\infty$, alors en appliquant l'inégalité à R_n on obtient $3^n \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde.

Les trois normes sont donc deux à deux non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$, alors même que la question 2 fournit une comparaison dans un sens pour chacune des trois paires.

5) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficients $a_0, \dots, a_n$. Chacun des $n+1$ termes de la somme est majoré par le maximum,

$$N_s(P) = \sum_{k=0}^n |a_k| \leq (n+1) \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| = (n+1) N_c(P).$$

6) Les réels $t_0, \dots, t_n$ étant deux à deux distincts, tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit

$$P = \sum_{j=0}^n P(t_j) L_j.$$

L'application N_s étant une norme, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité donnent

$$N_s(P) \leq \sum_{j=0}^n |P(t_j)| N_s(L_j).$$

Or $t_j \in [0, 1]$, donc $|P(t_j)| \leq N_\infty(P)$ pour tout j , d'où

$$N_s(P) \leq \left(\sum_{j=0}^n N_s(L_j) \right) N_\infty(P).$$

7) Posons $C_n = \sum_{j=0}^n N_s(L_j) > 0$. Les questions 2 et 6 donnent, sur $\mathbb{R}_n[X]$,

$$N_\infty \leq N_s \leq C_n N_\infty,$$

donc N_s et N_∞ sont équivalentes. Les questions 2 et 5 donnent de même

$$N_c \leq N_s \leq (n+1) N_c,$$

donc N_c et N_s sont équivalentes. La symétrie et la transitivité de l'équivalence des normes donnent alors l'équivalence de N_c et de N_∞ :

$$\boxed{N_c, N_s \text{ et } N_\infty \text{ sont deux à deux équivalentes sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Les constantes obtenues dépendent de n , ce qui est cohérent avec la question 4 : elles ne peuvent pas être choisies uniformément en n .

Correction de l'exercice 5.27

Énoncé p. 33

1) Pour $f \in E$, la fonction f' est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée : $\|f'\|_\infty$ est bien définie. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire résultent de celles de $\|\cdot\|_\infty$ et de la linéarité de la dérivation : $\|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda| \|f'\|_\infty$ et $\|(f+g)'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$. En revanche, la séparation tombe en défaut : la fonction constante égale à 1 appartient à E , elle n'est pas nulle, et sa dérivée est nulle, donc $\|f'\|_\infty = 0$. Ce n'est donc pas une norme sur E .

L'ensemble E_0 est un sous-espace vectoriel de E : il contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire. Sur E_0 , la séparation est vérifiée : si $\|f'\|_\infty = 0$, alors f' est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$, donc f y est constante, égale à $f(0) = 0$. Ainsi $f \mapsto \|f'\|_\infty$ est une norme sur E_0 .

2) L'application N est bien définie et positive. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| (|f(0)| + \|f'\|_\infty) = |\lambda| N(f).$$

Pour $f, g \in E$, en ajoutant $|f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$ et $\|f' + g'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$, on obtient $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$. Enfin, si $N(f) = 0$, alors $|f(0)| = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $f \in E_0$ et $f' = 0$: la question 1 donne $f = 0$.

3) Soit $f \in E$ et soit $t \in [0, 1]$. Comme f est de classe C^1 ,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u) du,$$

donc

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leq |f(0)| + t \|f'\|_\infty \leq N(f),$$

puisque $t \leq 1$. Ce majorant ne dépend pas de t , d'où $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

4) Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| = \frac{|\sin(nt)|}{n} \leq \frac{1}{n}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.
Par ailleurs $f_n(0) = 0$ et $f'_n(t) = \cos(nt)$, donc $\|f'_n\|_\infty \geq |f'_n(0)| = 1$, et $\|f'_n\|_\infty \leq 1$ puisque $|\cos| \leq 1$. Ainsi

$$N(f_n) = 0 + 1 = 1.$$

5) S'il existait $\beta > 0$ tel que $N \leq \beta \|\cdot\|_\infty$, on aurait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 = N(f_n) \leq \beta \|f_n\|_\infty \leq \frac{\beta}{n},$$

donc $n \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes, bien que la question 3 fournisse la comparaison $\|\cdot\|_\infty \leq N$.

6) Pour toute $f \in E$, on a $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$, donc $N(f) \leq N'(f)$. Réciproquement, la question 3 donne

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq N(f) + \|f'\|_\infty \leq 2N(f),$$

car $\|f'\|_\infty \leq N(f)$. Ainsi $N \leq N' \leq 2N$: les deux normes sont équivalentes.

Correction de l'exercice 5.28

Énoncé p. 34

1) Supposons $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$. Alors $x + y = (1 + \lambda)x$ et $1 + \lambda \geq 0$, donc, par homogénéité,

$$\|x + y\| = (1 + \lambda) \|x\| = \|x\| + \lambda \|x\| = \|x\| + \|y\|.$$

2) Pour $\|\cdot\|_\infty$, prenons $x = (1, 1)$ et $y = (1, -1)$: ils ne sont pas colinéaires, $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $x + y = (2, 0)$, donc $\|x + y\|_\infty = 2 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Pour $\|\cdot\|_1$, prenons $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$: ils ne sont pas colinéaires, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ et $x + y = (1, 1)$, donc $\|x + y\|_1 = 2 = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

3) En développant par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \| \|y\| x - \|x\| y \|^2 &= \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \|x\| \|y\| \langle x, y \rangle + \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= 2 \|x\| \|y\| (\|x\| \|y\| - \langle x, y \rangle). \end{aligned}$$

Supposons maintenant $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. En élevant au carré,

$$\|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2,$$

donc $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$. L'identité précédente donne alors $\| \|y\| x - \|x\| y \|^2 = 0$, c'est-à-dire

$$\|y\| x = \|x\| y.$$

Si $y = 0$, les vecteurs x et y sont colinéaires. Sinon $\|y\| > 0$ et $x = \frac{\|x\|}{\|y\|} y$: ils le sont encore, avec un coefficient positif.

4) Soit $t \in [0, 1]$ et posons $z_t = tx + (1 - t)y$. On remarque que

$$z_t + z_{1-t} = tx + (1 - t)y + (1 - t)x + ty = x + y.$$

D'une part, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité donnent

$$\|z_t\| \leq t\|x\| + (1 - t)\|y\| = 1,$$

et de même $\|z_{1-t}\| \leq 1$. D'autre part,

$$2 = \|x + y\| = \|z_t + z_{1-t}\| \leq \|z_t\| + \|z_{1-t}\| \leq 2.$$

Les inégalités sont donc toutes des égalités. En particulier $\|z_t\| + \|z_{1-t}\| = 2$ avec $\|z_t\| \leq 1$ et $\|z_{1-t}\| \leq 1$, ce qui impose $\|z_t\| = 1$.

5) Supposons que la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_2$ contienne le segment $[x, y]$ avec $x \neq y$. Alors $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ et le milieu $\frac{x+y}{2}$ appartient au segment, donc $\|\frac{x+y}{2}\|_2 = 1$, c'est-à-dire $\|x + y\|_2 = 2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$. La norme $\|\cdot\|_2$ étant associée au produit scalaire canonique, la question 3 donne $\|y\|_2 x = \|x\|_2 y$, soit $x = y$: c'est exclu. La sphère unité euclidienne ne contient donc aucun segment non réduit à un point. Pour $\|\cdot\|_\infty$, reprenons $x = (1, 1)$ et $y = (1, -1)$ de la question 2. Ils vérifient $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x + y\|_\infty = 2$, donc la question 4 montre que tout point du segment $[x, y]$, c'est-à-dire $\{1\} \times [-1, 1]$, est de norme 1. Ce côté du carré est contenu dans la sphère unité.

Correction de l'exercice 5.29

Énoncé p. 34

1) Notons $S = N_1 + N_2$ et $M = \max(N_1, N_2)$. Ces deux applications sont positives. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,

$$S(\lambda x) = |\lambda| N_1(x) + |\lambda| N_2(x) = |\lambda| S(x), \quad M(\lambda x) = \max(|\lambda| N_1(x), |\lambda| N_2(x)) = |\lambda| M(x),$$

la dernière égalité car $|\lambda| \geq 0$. Pour $x, y \in E$, en ajoutant les deux inégalités triangulaires, $S(x + y) \leq S(x) + S(y)$; et pour $i \in \{1, 2\}$,

$$N_i(x + y) \leq N_i(x) + N_i(y) \leq M(x) + M(y),$$

donc $M(x + y) \leq M(x) + M(y)$ en passant au maximum. Enfin, si $S(x) = 0$ ou si $M(x) = 0$, alors $N_1(x) = 0$, donc $x = 0_E$.

Comme N_1 et N_2 sont positives, on a $M \leq S \leq 2M$: les normes S et M sont équivalentes.

2) Les applications N_1 et N_2 sont des normes : ce sont les cas particuliers de la norme à poids $(x, y) \mapsto w_1 |x| + w_2 |y|$ avec $w_1, w_2 > 0$, dont les trois axiomes se vérifient comme pour $\|\cdot\|_1$.

Posons $m = \min(N_1, N_2)$, $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$. Alors

$$m(u) = \min(3, 1) = 1, \quad m(v) = \min(1, 3) = 1, \quad m(u + v) = \min(4, 4) = 4.$$

Ainsi $m(u + v) = 4 > 2 = m(u) + m(v)$: l'inégalité triangulaire est en défaut, donc m n'est pas une norme.

3) Posons $N_u(x) = \|u(x)\|_F$. Par linéarité de u ,

$$N_u(\lambda x) = \|\lambda u(x)\|_F = |\lambda| N_u(x), \quad N_u(x + y) = \|u(x) + u(y)\|_F \leq N_u(x) + N_u(y),$$

donc l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont toujours vérifiées.

Si u est injective et si $N_u(x) = 0$, alors $u(x) = 0_F$ par séparation de $\|\cdot\|_F$, donc $x \in \text{Ker } u = \{0_E\}$: la séparation est vérifiée et N_u est une norme.

Réciproquement, si u n'est pas injective, il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = 0_F$, donc $N_u(x) = 0$ avec $x \neq 0_E$: la séparation est en défaut.

4) L'application $X \mapsto AX$ est linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même, et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après la question 3, N_A est une norme si et seulement si cette application est injective, c'est-à-dire si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$. Comme A est carrée, cela équivaut à l'inversibilité de A .

5) Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_\infty \leq N(A) \|X\|_\infty,$$

et en passant au maximum sur i , $\|AX\|_\infty \leq N(A) \|X\|_\infty$, c'est-à-dire $N_A \leq N(A) \|\cdot\|_\infty$.

En appliquant cette inégalité à A^{-1} et au vecteur AX ,

$$\|X\|_\infty = \|A^{-1}(AX)\|_\infty \leq N(A^{-1}) \|AX\|_\infty = N(A^{-1}) N_A(X).$$

Les deux inégalités

$$N_A \leq N(A) \|\cdot\|_\infty \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_\infty \leq N(A^{-1}) N_A$$

sont exactement celles de la définition, avec les constantes $N(A) > 0$ et $N(A^{-1}) > 0$: les normes N_A et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Correction de l'exercice 5.30

Énoncé p. 34

1) Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A_p B_p - AB = A_p (B_p - B) + (A_p - A) B,$$

donc, par inégalité triangulaire puis par sous-multiplicativité de N ,

$$N(A_p B_p - AB) \leq N(A_p) N(B_p - B) + N(A_p - A) N(B).$$

La suite (A_p) étant convergente, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $N(A_p) \leq M$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$0 \leq N(A_p B_p - AB) \leq MN(B_p - B) + N(B)N(A_p - A).$$

Les deux termes du majorant tendent vers 0, donc, par encadrement, $N(A_p B_p - AB) \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{A_p B_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} AB.}$$

2) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, la suite (A_p^0) est constante égale à I_n , qui converge vers $A^0 = I_n$. Supposons le résultat acquis au rang k . La question 1 appliquée aux suites (A_p^k) , de limite A^k , et (A_p) , de limite A , donne $A_p^{k+1} = A_p^k A_p \rightarrow A^k A = A^{k+1}$.

3) D'après la question 2, $A_p^2 \rightarrow A^2$. Mais $A_p^2 = A_p$ pour tout p , donc cette même suite converge vers A . Par unicité de la limite, $A^2 = A$.

De même, si $A_p^n = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors $A_p^n \rightarrow A^n$ d'après la question 2, et la suite constante nulle converge vers 0 : par unicité de la limite, $A^n = 0$. Une limite de matrices nilpotentes d'indice au plus n est donc nilpotente.

4) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p A_p^{-1} = I_n$. La question 1 appliquée aux suites (A_p) et (A_p^{-1}) donne $A_p A_p^{-1} \rightarrow AB$; or la suite constante égale à I_n converge vers I_n . Par unicité de la limite, $AB = I_n$. En échangeant les rôles des deux facteurs, la même méthode appliquée à $A_p^{-1} A_p = I_n$ donne $BA = I_n$. La matrice A est donc inversible, d'inverse B .

5) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $A_p = \frac{1}{p} I_n$. Chaque A_p est inversible, d'inverse $p I_n$, et $N(A_p) = \frac{1}{p} \rightarrow 0$, donc (A_p) converge vers la matrice nulle, qui n'est pas inversible. L'hypothèse ne peut donc pas être supprimée : ici $N(A_p^{-1}) = p$, la suite (A_p^{-1}) n'est pas bornée, donc ne converge pas, et la conclusion de la question 4 est fausse.

★ POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 5.31 ★ Correction p. 74

Les inégalités de Young, Hölder et Minkowski.

Le cours définit les normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$ mais admet l'inégalité triangulaire, qui porte le nom d'inégalité de Minkowski. L'objet de ce problème est de la démontrer. La **partie I** établit une inégalité entre deux réels positifs, la **partie II** en tire une inégalité entre deux vecteurs, et la **partie III** conclut. La **partie IV** compare enfin les normes $\|\cdot\|_p$ entre elles.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. Deux réels p et q strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sont dits *conjugués*; p et q désignent dans tout le problème deux tels réels.

Partie I – L'inégalité de Young

1. Montrer que $q = \frac{p}{p-1}$, puis que $(p-1)q = p$ et $\frac{p}{q} = p-1$.
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$. En appliquant la concavité de $\ln$ aux réels a^p et b^q affectés des coefficients $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$, montrer que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Vérifier que l'inégalité vaut encore pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

Partie II – L'inégalité de Hölder

3. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

(indication : traiter d'abord le cas où $x = 0$ ou $y = 0$, puis appliquer la partie I à $a_k = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b_k = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$ et sommer).

4. Quel cas particulier retrouve-t-on pour $p = q = 2$?

Partie III – L'inégalité de Minkowski

Soient x et y dans $\mathbb{K}^n$.

5. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |y_k|.$$

6. En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des deux sommes du membre de droite, montrer que

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p).$$

7. En déduire que $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, puis que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Partie IV — Comparaison des normes $\|\cdot\|_p$

Soient r et s deux réels tels que $1 \leq r \leq s$, et soit $x \in \mathbb{K}^n$.

8. Montrer que $\|x\|_s \leq \|x\|_r$ (*indication : se ramener au cas $\|x\|_r = 1$*).
 9. On suppose $r < s$. En appliquant l'inégalité de Hölder aux vecteurs $(|x_1|^r, \dots, |x_n|^r)$ et $(1, \dots, 1)$ avec les exposants conjugués $\frac{s}{r}$ et $\frac{s}{s-r}$, montrer que

$$\|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|x\|_s.$$

10. En déduire que les normes $\|\cdot\|_r$, pour $r \geq 1$, sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{K}^n$. Retrouver les inégalités de l'exercice 5.17.

Exercice 5.32 • • • Correction p. 76

Normes subordonnées et séries de matrices.

Plusieurs exercices de ce chapitre utilisent la norme $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ de l'exercice 5.6 sans dire d'où elle vient. La **partie I** l'identifie comme la norme *subordonnée* à $\|\cdot\|_\infty$, la **partie II** en déduit ses propriétés sans calcul, et la **partie III** l'applique à l'inversion de $I_n - A$.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. L'espace $\mathbb{K}^n$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$, et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est vue comme l'application $x \mapsto Ax$ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$, les vecteurs étant identifiés à des colonnes.

Partie I — La norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|Ax\|_\infty \leq N(A) \|x\|_\infty.$$

2. En déduire que l'ensemble $\left\{ \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}, x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\}$ admet une borne supérieure. On la note $\|A\|_{\text{sub}}$; montrer que $\|A\|_{\text{sub}} \leq N(A)$.
 3. Soit i_0 un indice réalisant le maximum qui définit $N(A)$. On suppose $N(A) \neq 0$ et on pose, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_j = \begin{cases} \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\|x\|_\infty$ et la i_0 -ième coordonnée de Ax . En déduire que $\|A\|_{\text{sub}} = N(A)$, et que la borne supérieure est atteinte.

Partie II — Propriétés de la norme subordonnée

4. Montrer, directement à partir de la définition de $\|\cdot\|_{\text{sub}}$, qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 5. Montrer que $\|I_n\|_{\text{sub}} = 1$ et que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|AB\|_{\text{sub}} \leq \|A\|_{\text{sub}} \|B\|_{\text{sub}}.$$

Comparer avec la question 2 de l'exercice 5.6.

6. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer J^2 , puis $\|J\|_\infty$ et $\|J^2\|_\infty$. Qu'en déduit-on sur l'inégalité $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$, et sur la constante n de l'exercice 5.8?

Partie III — Inversion de $I_n - A$

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\|_{\text{sub}} < 1$.

7. Montrer que $A^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ pour $\|\cdot\|_{\text{sub}}$, puis pour $\|\cdot\|_{\infty}$.
8. Montrer que $I_n - A$ est inversible (*indication : si $(I_n - A)X = 0$, calculer $A^p X$*).
9. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^p A^k$. Vérifier que $(I_n - A)S_p = I_n - A^{p+1}$, puis montrer que $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $(I_n - A)^{-1}$.
10. Montrer que $\|S_p\|_{\text{sub}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, puis que

$$\|(I_n - A)^{-1}\|_{\text{sub}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}$$

(*indication : utiliser la question 1 de l'exercice 5.13*).

11. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par X_0 quelconque et $X_{p+1} = AX_p + B$. Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution L et que (X_p) converge vers L . Vérifier que la matrice A de l'exercice 5.11 satisfait bien $\|A\|_{\text{sub}} < 1$.

Exercice 5.33 ★ Correction p. 78

La jauge de Minkowski.

Le cours établit que les boules d'un espace vectoriel normé sont convexes. Ce problème démontre la réciproque : une partie convexe, symétrique et bornée, qui contient une boule, est la boule unité d'une norme. La **partie I** construit cette norme, la **partie II** l'identifie sur un exemple du plan.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé non nul et soit C une partie de E vérifiant les trois hypothèses suivantes :

- C est convexe ;
- C est symétrique, c'est-à-dire que $-x \in C$ pour tout $x \in C$;
- il existe deux réels $0 < r \leq R$ tels que $\overline{B}(0_E, r) \subset C \subset \overline{B}(0_E, R)$.

Pour $x \in E$, on pose

$$T_x = \{t \in \mathbb{R}_+^* : \tfrac{1}{t}x \in C\} \quad \text{et} \quad j_C(x) = \inf T_x.$$

Partie I — La jauge est une norme

1. Montrer que $0_E \in C$, puis que T_x est non vide pour tout $x \in E$. En déduire que $j_C(x)$ est bien défini et que $j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.
2. Montrer que tout $t \in T_x$ vérifie $t \geq \frac{\|x\|}{R}$, et en déduire l'encadrement

$$\frac{\|x\|}{R} \leq j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $T_{\lambda x} = |\lambda| T_x$ (la symétrie de C sert pour $\lambda < 0$), puis que $j_C(\lambda x) = |\lambda| j_C(x)$. Traiter le cas $\lambda = 0$ à part.
4. Soient $x, y \in E$, soit $s \in T_x$ et soit $t \in T_y$. Montrer que

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t} \cdot \frac{x}{s} + \frac{t}{s+t} \cdot \frac{y}{t}$$

appartient à C , puis que $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

5. Conclure que j_C est une norme sur E , équivalente à $\|\cdot\|$.
6. On note $\mathring{B}_j(0_E, 1)$ et $\overline{B}_j(0_E, 1)$ les boules unité de centre 0_E pour la norme j_C . Montrer que

$$\mathring{B}_j(0_E, 1) \subset C \subset \overline{B}_j(0_E, 1).$$

Partie II – Un hexagone du plan

On prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}.$$

7. Représenter C et vérifier qu'il s'agit de l'hexagone de sommets $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.
8. Vérifier que C satisfait les hypothèses de la partie I avec $r = \frac{1}{2}$ et $R = 1$.
9. Montrer que $M : (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|, |x - y|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et que C est sa boule unité fermée de centre $(0, 0)$.
10. En déduire que $j_C = M$. Vérifier enfin, à l'aide des vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$, que M n'est aucune des trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 5.31

Énoncé p. 70

1. De $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on tire $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, et comme $p > 1$ le réel $\frac{p-1}{p}$ est strictement positif : en passant à l'inverse,

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

On en déduit $(p-1)q = p$ et $\frac{p}{q} = \frac{p(p-1)}{p} = p-1$.

2. La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont positifs et de somme 1, on obtient, pour les réels strictement positifs a^p et b^q :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln a + \ln b = \ln(ab).$$

La fonction $\exp$ étant croissante, il vient

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Si $a = 0$ ou $b = 0$, le membre de gauche est positif et le membre de droite est nul : l'inégalité subsiste.

3. Si $\|x\|_p = 0$, alors $x = 0$ et les deux membres sont nuls ; de même si $\|y\|_q = 0$. Supposons donc $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_q > 0$, et posons, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$a_k = \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}.$$

La partie I donne $a_k b_k \leq \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}$ pour tout k . En sommant ces n inégalités :

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

car $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_p^p$ et $\sum_{k=1}^n |y_k|^q = \|y\|_q^q$. En multipliant par $\|x\|_p \|y\|_q > 0$, on obtient l'inégalité annoncée.

4. Les réels 2 et 2 sont conjugués, car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. L'inégalité devient

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_2 \|y\|_2,$$

c'est-à-dire l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déjà utilisée à l'exercice 5.17.

5. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ donne $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$, donc

$$|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leq |x_k + y_k|^{p-1} (|x_k| + |y_k|),$$

le facteur $|x_k + y_k|^{p-1}$ étant positif. En sommant sur k et en séparant les deux termes, on obtient l'inégalité voulue.

6. Posons

$$u = (|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1}).$$

L'inégalité de Hölder appliquée à u et x , avec les exposants conjugués q et p , donne

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| \leq \|u\|_q \|x\|_p.$$

Or $(p-1)q = p$ d'après la question 1, donc

$$\begin{aligned} \|u\|_q &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x + y\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de $\frac{p}{q} = p-1$. Le même calcul avec y donne $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \leq \|x + y\|_p^{p-1} \|y\|_p$. En reportant dans la question 5 :

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p).$$

7. Si $\|x + y\|_p = 0$, l'inégalité $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ est immédiate. Sinon, $\|x + y\|_p^{p-1} > 0$ et on peut diviser l'inégalité de la question 6 par ce réel, ce qui donne

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Le cours a déjà établi l'homogénéité et la séparation : $\|\cdot\|_p$ est donc une norme sur $\mathbb{K}^n$.

8. Si $x = 0$, les deux membres sont nuls. Sinon, posons $u = \frac{1}{\|x\|_r} x$, de sorte que $\|u\|_r = 1$ par homogénéité. Pour tout k , $|u_k|^r \leq \sum_{j=1}^n |u_j|^r = 1$, donc $|u_k| \leq 1$. Or, pour $t \in [0, 1]$ et $s \geq r$, on a $t^s \leq t^r$: il vient $|u_k|^s \leq |u_k|^r$ pour tout k . En sommant,

$$\|u\|_s^s = \sum_{k=1}^n |u_k|^s \leq \sum_{k=1}^n |u_k|^r = 1,$$

donc $\|u\|_s \leq 1$, c'est-à-dire $\|x\|_s \leq \|x\|_r$ après multiplication par $\|x\|_r$.

9. Les exposants $\frac{s}{r}$ et $\frac{s}{s-r}$ sont strictement supérieurs à 1 et conjugués, car

$$\frac{r}{s} + \frac{s-r}{s} = 1.$$

L'inégalité de Hölder appliquée aux vecteurs $(|x_1|^r, \dots, |x_n|^r)$ et $(1, \dots, 1)$ donne

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^r \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{r \cdot \frac{s}{r}} \right)^{\frac{r}{s}} \left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^{\frac{s-r}{s}} = \|x\|_s^r n^{\frac{s-r}{s}}.$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{r}$, qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\|x\|_r \leq \|x\|_s n^{\frac{s-r}{rs}} = n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|x\|_s.$$

10. Les questions 8 et 9 donnent, pour $1 \leq r \leq s$:

$$\|x\|_s \leq \|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|x\|_s,$$

soit exactement les deux inégalités de la définition : $\|\cdot\|_r$ et $\|\cdot\|_s$ sont équivalentes. Deux exposants quelconques se comparent en les rangeant dans cet ordre, donc toutes ces normes sont deux à deux équivalentes.

Pour $r = 1$ et $s = 2$, on retrouve $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$; la transitivité établie dans le cours permet alors de comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ à toute autre norme de la famille.

Correction de l'exercice 5.32

Énoncé p. 71

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq N(A) \|x\|_\infty.$$

En prenant le maximum sur i , on obtient $\|Ax\|_\infty \leq N(A) \|x\|_\infty$.

2. Pour $x \neq 0$, on a $\|x\|_\infty > 0$ et la question 1 donne $\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq N(A)$: l'ensemble considéré est non vide (car $n \geq 1$) et majoré par $N(A)$, donc il admet une borne supérieure, et $\|A\|_{\text{sub}} \leq N(A)$.
3. Si $a_{i_0,j} \neq 0$, alors $|x_j| = 1$; sinon $x_j = 0$. Dans tous les cas $|x_j| = 1$, donc $\|x\|_\infty = 1$. Par ailleurs,

$$(Ax)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = \sum_{\substack{j \\ a_{i_0,j} \neq 0}} \frac{a_{i_0,j} \overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} = \sum_{\substack{j \\ a_{i_0,j} \neq 0}} |a_{i_0,j}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = N(A),$$

car $a\overline{a} = |a|^2$ et les termes omis sont nuls. Donc $\|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_{i_0}| = N(A)$, puis

$$\|A\|_{\text{sub}} \geq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq N(A).$$

Avec la question 2, $\|A\|_{\text{sub}} = N(A)$, et ce vecteur x réalise la borne supérieure. Si $N(A) = 0$, alors $A = 0$ et les deux quantités sont nulles.

4. Notons d'abord que, par définition de la borne supérieure,

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|Ax\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}} \|x\|_\infty,$$

l'inégalité étant immédiate pour $x = 0$.

Homogénéité : pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \neq 0$, $\frac{\|\lambda Ax\|_\infty}{\|\lambda x\|_\infty} = |\lambda| \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$; la borne supérieure d'un ensemble multiplié par $|\lambda| \geq 0$ est multipliée par $|\lambda|$, d'où $\|\lambda A\|_{\text{sub}} = |\lambda| \|A\|_{\text{sub}}$.

Inégalité triangulaire : pour $x \neq 0$,

$$\frac{\|(A+B)x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} + \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_{\text{sub}} + \|B\|_{\text{sub}},$$

et en passant à la borne supérieure, $\|A+B\|_{\text{sub}} \leq \|A\|_{\text{sub}} + \|B\|_{\text{sub}}$.

Séparation : si $\|A\|_{\text{sub}} = 0$, alors $Ax = 0$ pour tout x ; en particulier $Ae_j = 0$ pour tout vecteur de la base canonique, c'est-à-dire que toutes les colonnes de A sont nulles, donc $A = 0$.

5. Pour tout $x \neq 0$, $\|I_n x\|_\infty = \|x\|_\infty$, donc le quotient vaut 1 et $\|I_n\|_{\text{sub}} = 1$. Pour la sous-multiplicativité, soit $x \in \mathbb{K}^n$: en appliquant deux fois l'inégalité rappelée à la question 4,

$$\|ABx\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}} \|Bx\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}} \|B\|_{\text{sub}} \|x\|_\infty.$$

Pour $x \neq 0$, on divise par $\|x\|_\infty$ et on passe à la borne supérieure. L'inégalité $N(AB) \leq N(A)N(B)$ de l'exercice 5.6, obtenue là-bas par un calcul sur les coefficients, n'est donc que la traduction de la composition des applications $x \mapsto Ax$.

6. Tous les coefficients de J^2 valent $\sum_{k=1}^n 1 = n$, donc $J^2 = nJ$. Ainsi $\|J\|_\infty = 1$ et $\|J^2\|_\infty = n$. Pour $n \geq 2$,

$$\|J^2\|_\infty = n > 1 = \|J\|_\infty \|J\|_\infty,$$

donc $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'inégalité $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. De plus, l'exercice 5.8 donne $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$; le cas $A = B = J$ montre que la constante n ne peut pas être diminuée.

7. Par récurrence immédiate à partir de la question 5, $\|A^p\|_{\text{sub}} \leq \|A\|_{\text{sub}}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq \|A\|_{\text{sub}} < 1$, la suite géométrique $(\|A\|_{\text{sub}}^p)$ tend vers 0, donc $\|A^p\|_{\text{sub}} \rightarrow 0$ par encadrement : la suite (A^p) converge vers 0 pour $\|\cdot\|_{\text{sub}}$. Comme $\|\cdot\|_{\text{sub}} = N$ et que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ d'après l'exercice 5.18, la convergence vaut aussi pour $\|\cdot\|_\infty$.
8. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $(I_n - A)X = 0$, soit $AX = X$. Une récurrence immédiate donne $A^p X = X$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc

$$\|X\|_\infty = \|A^p X\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}}^p \|X\|_\infty \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

La quantité $\|X\|_\infty$ ne dépendant pas de p , elle est nulle, donc $X = 0$. Le système $(I_n - A)X = 0$ n'a que la solution nulle : la matrice $I_n - A$ est inversible.

9. La somme est télescopique :

$$(I_n - A)S_p = \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=0}^p A^{k+1} = I_n - A^{p+1}.$$

En multipliant à gauche par $(I_n - A)^{-1}$,

$$S_p = (I_n - A)^{-1} - (I_n - A)^{-1} A^{p+1},$$

et la question 5 donne

$$\|S_p - (I_n - A)^{-1}\|_{\text{sub}} \leq \|(I_n - A)^{-1}\|_{\text{sub}} \|A\|_{\text{sub}}^{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite (S_p) converge donc vers $(I_n - A)^{-1}$.

10. L'inégalité triangulaire et la question 5 donnent

$$\|S_p\|_{\text{sub}} \leq \sum_{k=0}^p \|A^k\|_{\text{sub}} \leq \sum_{k=0}^p \|A\|_{\text{sub}}^k = \frac{1 - \|A\|_{\text{sub}}^{p+1}}{1 - \|A\|_{\text{sub}}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}.$$

D'après la question 1 de l'exercice 5.13, la suite réelle $(\|S_p\|_{\text{sub}})$ converge vers $\|(I_n - A)^{-1}\|_{\text{sub}}$. En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, qui est large,

$$\|(I_n - A)^{-1}\|_{\text{sub}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}.$$

11. L'équation $X = AX + B$ s'écrit $(I_n - A)X = B$; la matrice $I_n - A$ étant inversible d'après la question 8, elle admet l'unique solution $L = (I_n - A)^{-1}B$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$X_{p+1} - L = (AX_p + B) - (AL + B) = A(X_p - L),$$

d'où, par récurrence, $X_p - L = A^p(X_0 - L)$ et

$$\|X_p - L\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}}^p \|X_0 - L\|_\infty \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite (X_p) converge donc vers L , quel que soit X_0 .

Pour la matrice de l'exercice 5.11, les sommes des valeurs absolues des coefficients des trois lignes valent $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ et $\frac{5}{6}$, donc $\|A\|_{\text{sub}} = \frac{5}{6} < 1$: les questions 3 et 4 de cet exercice sont des cas particuliers de ce qui précède.

Correction de l'exercice 5.33

Énoncé p. 72

1. Le vecteur 0_E appartient à $\overline{B}(0_E, r)$, donc à C . Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, tout $t > 0$ convient et $T_x = \mathbb{R}_+^*$. Si $x \neq 0_E$, posons $t = \frac{\|x\|}{r}$: alors $t > 0$ et $\|\frac{1}{t}x\| = \frac{\|x\|}{t} = r$, donc $\frac{1}{t}x \in \overline{B}(0_E, r) \subset C$ et $t \in T_x$. Dans les deux cas, T_x est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 : sa borne inférieure existe, et $j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.
2. Soit $t \in T_x$. Alors $\frac{1}{t}x \in C \subset \overline{B}(0_E, R)$, donc $\frac{\|x\|}{t} \leq R$, soit $t \geq \frac{\|x\|}{R}$. Le réel $\frac{\|x\|}{R}$ minore donc T_x , et par définition de la borne inférieure $j_C(x) \geq \frac{\|x\|}{R}$. Avec la question 1, on obtient l'encadrement annoncé.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $t > 0$. En posant $t = |\lambda|u$ avec $u > 0$,

$$\frac{1}{t}(\lambda x) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{u}x = \pm \frac{1}{u}x,$$

le signe étant celui de λ . Comme C est symétrique, $\frac{1}{u}x \in C$ si et seulement si $-\frac{1}{u}x \in C$: dans les deux cas, $t \in T_{\lambda x}$ équivaut à $u \in T_x$. Ainsi $T_{\lambda x} = |\lambda| T_x$, et la borne inférieure d'un ensemble multiplié par $|\lambda| > 0$ est multipliée par $|\lambda|$: $j_C(\lambda x) = |\lambda| j_C(x)$. Enfin, $j_C(0_E) = 0$ d'après la question 1, donc l'égalité vaut encore pour $\lambda = 0$.

4. Les coefficients $\frac{s}{s+t}$ et $\frac{t}{s+t}$ sont positifs et de somme 1, et $\frac{x}{s}$ et $\frac{y}{t}$ appartiennent à C : la convexité de C donne $\frac{1}{s+t}(x+y) \in C$, c'est-à-dire $s+t \in T_{x+y}$. Donc $j_C(x+y) \leq s+t$.

Cette inégalité vaut pour tout $s \in T_x$ et tout $t \in T_y$. À t fixé, en passant à la borne inférieure sur s , il vient $j_C(x+y) \leq j_C(x) + t$; puis, en passant à la borne inférieure sur t , $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

5. L'application j_C est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, homogène d'après la question 3 et vérifie l'inégalité triangulaire d'après la question 4. Enfin, si $j_C(x) = 0$, la question 2 donne $\|x\| \leq R j_C(x) = 0$, donc $x = 0_E$: l'axiome de séparation est vérifié. C'est donc une norme, et l'encadrement de la question 2 s'écrit

$$\frac{1}{R} \|x\| \leq j_C(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|,$$

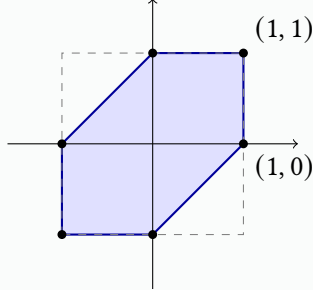
ce qui est exactement la définition de l'équivalence des normes j_C et $\|\cdot\|$.

6. Soit x tel que $j_C(x) < 1$. Par définition de la borne inférieure, il existe $t \in T_x$ tel que $t < 1$. Alors $\frac{x}{t} \in C$, $0_E \in C$, et

$$x = t \cdot \frac{x}{t} + (1-t) \cdot 0_E$$

est un point du segment joignant ces deux éléments de C : par convexité, $x \in C$. Réciproquement, si $x \in C$, alors $1 \in T_x$, donc $j_C(x) \leq 1$ et $x \in \overline{B}_j(0_E, 1)$.

7. L'ensemble C est l'intersection du carré $[-1, 1]^2$, défini par $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$, avec la bande $|x - y| \leq 1$. Cette bande contient les sommets $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ du carré, mais pas $(1, -1)$ ni $(-1, 1)$, pour lesquels $|x - y| = 2$. La droite $x - y = 1$ coupe le carré en $(1, 0)$ et $(0, -1)$, et la droite $x - y = -1$ en $(-1, 0)$ et $(0, 1)$: les deux sommets exclus sont remplacés par ces quatre points.



8. L'ensemble C est convexe comme intersection de trois parties convexes (chacune est définie par une inégalité de la forme $|u| \leq 1$ où u est linéaire, donc chacune est convexe). Il est symétrique, car les trois conditions ne changent pas quand on remplace (x, y) par $(-x, -y)$. Enfin, si $\|(x, y)\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, alors $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ et $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 1$, donc $(x, y) \in C$; et si $(x, y) \in C$, alors $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$. Ainsi

$$\overline{B}_\infty((0, 0), \frac{1}{2}) \subset C \subset \overline{B}_\infty((0, 0), 1).$$

9. Les applications $(x, y) \mapsto |x|$, $(x, y) \mapsto |y|$ et $(x, y) \mapsto |x - y|$ sont positives, homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire, car x , y et $x - y$ dépendent linéairement de (x, y) . Leur maximum M hérite de ces trois propriétés : pour l'inégalité triangulaire, chacune des trois quantités évaluées en $(x, y) + (x', y')$ est majorée par la somme des quantités correspondantes, donc par $M(x, y) + M(x', y')$, et il en va de même de leur maximum. Enfin, si $M(x, y) = 0$, alors $|x| = 0$ et $|y| = 0$, donc $(x, y) = (0, 0)$: M est une norme. Par définition,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M(x, y) \leq 1\} = \overline{B}_M((0, 0), 1).$$

10. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $t > 0$. Par homogénéité de M ,

$$\frac{1}{t}(x, y) \in C \iff M\left(\frac{1}{t}(x, y)\right) \leq 1 \iff M(x, y) \leq t.$$

Ainsi $T_{(x, y)} = [M(x, y), +\infty[\cap \mathbb{R}_+^*$, dont la borne inférieure vaut $M(x, y)$: on a bien $j_C = M$.

Enfin, $M(1, 1) = \max(1, 1, 0) = 1$ alors que $\|(1, 1)\|_1 = 2$ et $\|(1, 1)\|_2 = \sqrt{2}$, et $M(1, -1) = \max(1, 1, 2) = 2$ alors que $\|(1, -1)\|_\infty = 1$. La norme M n'est donc ni $\|\cdot\|_1$, ni $\|\cdot\|_2$, ni $\|\cdot\|_\infty$.