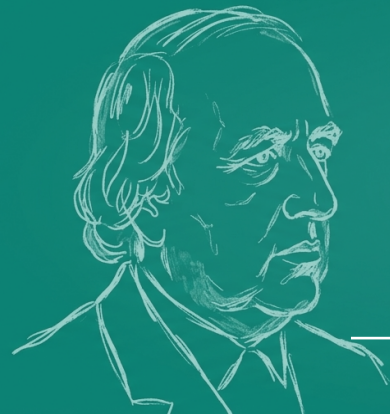




# 6

## Suites et séries de fonctions

Karl Weierstrass (1815 – 1897)

Dans ce chapitre, nous abordons les suites et les séries de fonctions. La notion de suite de fonctions n'a rien de compliqué *a priori* : il suffit de considérer une liste numérotée de fonctions. En revanche, il faut préciser ce que l'on entend par limite d'une telle suite, et plusieurs réponses sont possibles. Ces notions de convergence permettront à leur tour d'étudier la somme d'une série de fonctions. Une fois la limite d'une suite de fonctions et la somme d'une série de fonctions définies, se pose naturellement la question de leur régularité : la limite d'une suite de fonctions continues est-elle continue ? Celle d'une suite de fonctions dérivables est-elle dérivable ? À quelles conditions ?

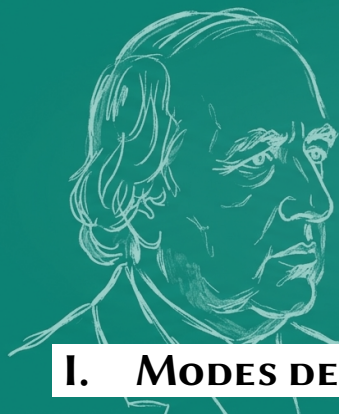
Plus généralement, nous nous poserons la question de l'interversion des symboles : peut-on échanger une limite et une dérivée ? Deux limites ? Une limite et une intégrale ? Ces interversions ne vont pas de soi. Elles sont souvent légitimes, mais à condition de vérifier des hypothèses précises, que nous allons découvrir.

### Programme officiel

#### Suites et séries de fonctions

B – Suites et séries de fonctions

- a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions
- b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions
- c) Régularité de la somme d'une série de fonctions



## I. MODES DE CONVERGENCE

### 1. Convergences pour les suites

#### Définition 6.1 (Suite de fonctions)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une suite de fonctions définies sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{K}^I$  : c'est la donnée, pour chaque entier  $n$ , d'une fonction  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

#### Exemple 6.2

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \sin(nt)$ . Les premiers termes de la suite  $(f_n)$  sont la fonction nulle  $f_0$ , la fonction  $f_1 = \sin$ , puis  $f_2 : t \mapsto \sin(2t)$ , et ainsi de suite.

#### Exemple 6.3

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{-nt}$ . Les premiers termes de la suite  $(f_n)$  sont la fonction constante  $f_0$  égale à 1, la fonction  $f_1 : t \mapsto e^{-t}$ , puis  $f_2 : t \mapsto e^{-2t}$ , et ainsi de suite.

#### Définition 6.4 (Convergence simple)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et soit  $f$  une fonction définie sur le même intervalle.  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  si :

$$\forall t \in I, f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t).$$

#### Exemple 6.5

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2 + \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|f_n(t) - t^2| = \frac{|\sin(nt)|}{n} \leq \frac{1}{n},$$

donc  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^2$ . Ceci valant pour tout réel  $t$ , la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f : t \mapsto t^2$ .

**Exemple 6.6**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier  $n > |t|$ , on a  $1 + \frac{t}{n} > 0$ , donc

$$f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)\right).$$

Si  $t = 0$ , alors  $f_n(0) = 1$  pour tout  $n$ . Si  $t \neq 0$ , comme  $\frac{t}{n} \rightarrow 0$  et  $\ln(1 + u) \sim u$  quand  $u \rightarrow 0$ ,

$$n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \sim n \cdot \frac{t}{n} = t,$$

donc  $n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t$ , puis, par continuité de l'exponentielle,  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^t$ .

Dans les deux cas, la limite vaut  $e^t$  : la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction exponentielle.

**Remarque**

Une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

**Exemple 6.7**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$ . Chaque  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$ .

Soit  $t \in [0, 1[$ . Comme  $0 \leq t < 1$ , la suite géométrique  $(t^n)$  tend vers 0. En  $t = 1$ , on a  $f_n(1) = 1$  pour tout  $n$ , donc  $f_n(1) \rightarrow 1$ . La suite  $(f_n)$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction

$$f: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 1 :  $f(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 1^-$ , alors que  $f(1) = 1$ .

**Remarque**

Même lorsqu'une suite  $(f_n)$  de fonctions continues converge simplement sur un segment  $[a, b]$  vers une fonction  $f$  continue, on ne peut pas en déduire que  $\int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt$  : la limite et l'intégrale ne peuvent pas, en général, être interverties.

**Exemple 6.8**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (n+1)(n+2)t^n(1-t).$$

Chaque  $g_n$  est une fonction polynomiale, donc continue sur  $[0, 1]$ . Son intégrale se calcule en développant  $t^n(1-t) = t^n - t^{n+1}$  :

$$\int_0^1 g_n(t) dt = (n+1)(n+2) \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = (n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Déterminons la limite simple. En  $t = 1$ ,  $g_n(1) = 0$  pour tout  $n$ . Soit  $t \in [0, 1[$ . Par croissances comparées,  $n^2 t^n \rightarrow 0$ ,  $nt^n \rightarrow 0$  et  $t^n \rightarrow 0$ ; donc

$$g_n(t) = (n^2 t^n + 3nt^n + 2t^n)(1 - t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite  $(g_n)$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction nulle, qui est continue et d'intégrale nulle. Ainsi

$$\int_0^1 g_n(t) dt = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt.$$

### Remarque

La convergence simple est la définition naturelle de la limite d'une suite de fonctions : elle ramène l'étude, point par point, à celle de suites numériques. Les deux exemples précédents montrent cependant qu'elle ne suffit pas à obtenir des théorèmes d'interversion : ni la continuité ni l'intégrale ne passent à la limite simple. Il faut une notion de convergence plus exigeante.

### Définition 6.9 (Convergence uniforme)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et soit  $f$  une fonction définie sur le même intervalle.  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  si :

- la différence  $f_n - f$  est bornée à partir d'un certain rang
- $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

### Exemple 6.10

Reprenons, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la suite de fonctions

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2 + \frac{\sin(nt)}{n},$$

qui converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f: t \mapsto t^2$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{|\sin(nt)|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

La fonction  $f_n - f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ , et  $\frac{1}{n}$  en est un majorant ; comme  $\|f_n - f\|_\infty$  est le plus petit des majorants de  $|f_n - f|$ , on a  $0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ . Par encadrement,  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exemple 6.11

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{n^2} e^{-t/n}.$$

Montrons que  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La fonction  $\varphi: t \mapsto te^{-t/n}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\varphi'(t) = e^{-t/n} - \frac{t}{n} e^{-t/n} = \left(1 - \frac{t}{n}\right) e^{-t/n}.$$

Ainsi  $\varphi$  est croissante sur  $[0, n]$  et décroissante sur  $[n, +\infty[$  : elle atteint son maximum en  $n$ , où elle vaut  $\varphi(n) = ne^{-1}$ . Comme  $\varphi$  est positive, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \leq f_n(t) = \frac{\varphi(t)}{n^2} \leq \frac{ne^{-1}}{n^2} = \frac{1}{en},$$

avec égalité en  $t = n$ . La fonction  $f_n - 0 = f_n$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{en} \rightarrow 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Exemple 6.12

Reprenons, pour  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t^n$ , qui convergent simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $f$  nulle sur  $[0, 1[$  et valant 1 en 1. Montrons que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $f_n(1) - f(1) = 0$  et, pour  $t \in [0, 1[$ ,  $f_n(t) - f(t) = t^n \in [0, 1[$ . La fonction  $f_n - f$  est donc bornée par 1, d'où  $\|f_n - f\|_\infty \leq 1$ . Par ailleurs,  $t^n \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 1^-$  : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $t \in [0, 1[$  tel que  $|f_n(t) - f(t)| > 1 - \epsilon$ . Aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore donc  $|f_n - f|$ , et  $\|f_n - f\|_\infty = 1$ .

Ainsi  $\|f_n - f\|_\infty = 1$  pour tout  $n$ , ce qui ne tend pas vers 0 : la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

### Exemple 6.13

Reprenons, pour  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto (n+1)(n+2)t^n(1-t)$ , qui convergent simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction nulle et vérifient  $\int_0^1 g_n(t) dt = 1$ . Montrons que  $(g_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $g_n$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc bornée. Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $0 \leq g_n(t) \leq \|g_n\|_\infty$ , donc, par croissance de l'intégrale,

$$1 = \int_0^1 g_n(t) dt \leq \int_0^1 \|g_n\|_\infty dt = \|g_n\|_\infty.$$

Ainsi  $\|g_n - 0\|_\infty \geq 1$  pour tout  $n$ , ce qui ne tend pas vers 0 : la suite  $(g_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

### Remarque

Lorsque les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont bornées sur  $I$ , la convergence uniforme de  $(f_n)$  vers  $f$  est exactement la convergence de  $(f_n)$  vers  $f$  dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$  des fonctions bornées, étudié au chapitre précédent.

La définition de la convergence uniforme est cependant un peu plus générale : ni les fonctions  $f_n$  ni la fonction  $f$  ne sont supposées bornées. Seule la différence  $f_n - f$  doit l'être, à partir d'un certain rang, pour que  $\|f_n - f\|_\infty$  ait un sens. Dans le premier exemple ci-dessus, les fonctions  $t \mapsto t^2 + \frac{\sin(nt)}{n}$  et  $t \mapsto t^2$  ne sont pas bornées sur  $\mathbb{R}$  : elles n'appartiennent pas à  $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et pourtant la convergence est uniforme.

### Remarque

Avec des quantificateurs, la convergence simple de  $(f_n)$  vers  $f$  sur  $I$  s'écrit :

$$\forall t \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon.$$

La convergence uniforme de  $(f_n)$  vers  $f$  sur  $I$  s'écrit quant à elle :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall t \in I, |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon.$$

Seule la place de «  $\forall t \in I$  » change. Dans la convergence simple, il est placé avant «  $\exists N \in \mathbb{N}$  » : le rang  $N$  peut dépendre du point  $t$ . Dans la convergence uniforme, il est placé après : un même rang  $N$  convient pour tous les points  $t$  de  $I$  à la fois.

#### Proposition 6.14

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et soit  $f$  une fonction définie sur  $I$ . Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ .

#### Démonstration

Soit  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $f_n - f$  soit bornée pour  $n \geq N_0$ , et soit  $t \in I$ . Pour tout  $n \geq N_0$ ,

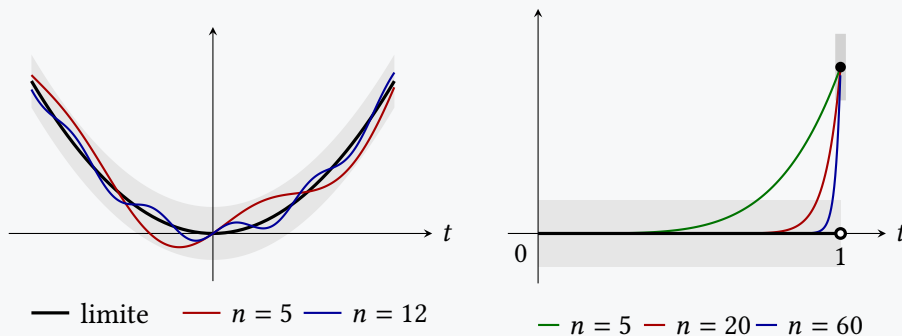
$$0 \leq |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, par encadrement,  $f_n(t) \rightarrow f(t)$ . □

#### Remarque

La réciproque est fautive : la suite des fonctions  $t \mapsto t^n$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $f$  nulle sur  $[0, 1[$  et valant 1 en 1, mais nous avons vu qu'elle ne converge pas uniformément vers  $f$ .

La figure ci-dessous illustre la différence. Pour  $\epsilon > 0$ , on représente en gris la bande formée des points  $(t, y)$  tels que  $|y - f(t)| \leq \epsilon$ . La convergence uniforme signifie qu'à partir d'un certain rang, le graphe de  $f_n$  est *tout entier* contenu dans cette bande. À gauche, les fonctions  $t \mapsto t^2 + \frac{\sin(nt)}{n}$ , avec  $\epsilon = \frac{1}{4}$  : dès que  $n \geq 4$ , leur graphe reste dans la bande autour de  $t \mapsto t^2$ . À droite, les fonctions  $t \mapsto t^n$ , avec  $\epsilon = \frac{1}{5}$  : pour chaque  $t \in [0, 1]$  fixé, le point  $(t, t^n)$  finit par entrer dans la bande, mais aucun des graphes n'y est entièrement contenu, car chacun en sort au voisinage de 1.



#### Remarque

Si  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  et uniformément vers  $g$  sur  $I$ , alors  $f = g$ . En effet, d'après la proposition,  $(f_n)$  converge aussi simplement vers  $g$  ; pour tout  $t \in I$ , la suite numérique  $(f_n(t))$  tend alors à la fois vers  $f(t)$  et vers  $g(t)$ , donc  $f(t) = g(t)$  par unicité de la limite.

La convergence uniforme ne peut donc pas conduire à une autre limite que la convergence simple. Ce qui l'en distingue, c'est qu'une suite de fonctions qui converge simplement peut ne converger uniformément vers *aucune* fonction. En pratique, pour étudier la convergence uniforme d'une suite  $(f_n)$  sur  $I$ , on commence par déterminer sa limite simple  $f$  ; la suite converge alors uniformément sur  $I$  si et seulement si elle converge uniformément vers  $f$ . Si  $(f_n)$  n'a pas de limite simple, elle ne converge pas uniformément.

Par exemple, la suite des fonctions  $t \mapsto t^n$  et la suite  $(g_n)$  étudiées plus haut ne convergent pas uniformément vers leurs limites simples respectives : elles ne convergent donc uniformément sur  $[0, 1]$  vers aucune fonction.

### Remarque

La convergence uniforme est la notion de convergence adaptée aux théorèmes d'interversion. Nous verrons dans la section II qu'elle permet de faire passer à la limite la continuité et l'intégrale sur un segment, et, sous des hypothèses portant sur les dérivées, la dérivabilité.

### Méthode 6.15 (Montrer une convergence uniforme)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ . Pour montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  :

1. **Déterminer la limite simple.** Pour  $t \in I$  fixé, on étudie la suite numérique  $(f_n(t))$  et on détermine sa limite  $f(t)$ . Si cette limite n'existe pas pour au moins un  $t$ , la suite  $(f_n)$  ne converge pas simplement, donc pas uniformément : c'est terminé.
2. **Majorer  $|f_n(t) - f(t)|$  indépendamment de  $t$ .** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in I$ . On cherche un réel  $M_n$ , qui ne dépend *que* de  $n$  et pas de  $t$ , tel que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq M_n$$

et tel que  $M_n \rightarrow 0$ .

3. **Majorer la norme infinie.** L'inégalité précédente vaut pour tout  $t \in I$  : la fonction  $f_n - f$  est donc bornée sur  $I$  et  $M_n$  en est un majorant. Comme  $\|f_n - f\|_\infty$  est le plus petit des majorants de  $|f_n - f|$ , on obtient

$$0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq M_n.$$

4. **Conclure.** Comme  $M_n \rightarrow 0$ , l'encadrement donne  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ .

### Exemple 6.16

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Montrons que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

*Limite simple.* Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a  $t^2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow t^2$ , donc, par continuité de la racine carrée,  $f_n(t) \rightarrow \sqrt{t^2} = |t|$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f: t \mapsto |t|$ .

*Majoration indépendante de  $t$ .* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ . En multipliant par la quantité conjuguée,

$$f_n(t) - f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{t^2} = \frac{\left(t^2 + \frac{1}{n^2}\right) - t^2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t|} = \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t|\right)}.$$

Le dénominateur vérifie  $\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t| \geq \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} > 0$ , donc

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

Le majorant  $\frac{1}{n}$  ne dépend pas de  $t$ .

*Norme infinie.* Cette inégalité vaut pour tout  $t \in \mathbb{R}$  : la fonction  $f_n - f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ .

*Conclusion.* Comme  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , par encadrement  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $t \mapsto |t|$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Remarque

Montrer qu'une suite de fonctions ne converge *pas* uniformément est en général plus difficile : une majoration ne suffit plus. Il faut alors soit calculer explicitement  $\|f_n - f\|_\infty$ , ou au moins le minorer par une quantité qui ne tend pas vers 0, comme nous l'avons fait pour les fonctions  $t \mapsto t^n$  et  $g_n$  ; soit utiliser la contraposée de l'un des théorèmes de la section II. Par exemple, nous verrons qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue : la limite simple des fonctions continues  $t \mapsto t^n$  n'étant pas continue sur  $[0, 1]$ , cela suffira à montrer que la convergence n'y est pas uniforme.

## 2. Convergences pour les séries

### Définition 6.17 (Série de fonctions)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n$  la fonction

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k : I \rightarrow \mathbb{K}, t \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(t).$$

La série de fonctions de terme général  $f_n$ , notée  $\sum f_n$ , est la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La fonction  $S_n$  est appelée somme partielle d'indice  $n$  de la série.

#### Remarque

Comme pour les suites de fonctions, la difficulté ne réside pas dans la définition de la série elle-même, mais dans celle de sa limite, c'est-à-dire de sa somme. La définition précédente permet de la lever : une série de fonctions étant une suite de fonctions, celle de ses sommes partielles, les notions de convergence simple et de convergence uniforme s'appliquent telles quelles à la suite  $(S_n)$ .

**Définition 6.18 (Convergence simple)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$ , de sommes partielles  $(S_n)$ , et soit  $f$  une fonction définie sur le même intervalle.  $\sum f_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  si la suite  $(S_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ , c'est-à-dire si :

$$\forall t \in I, \sum_{k=0}^n f_k(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t).$$

La fonction  $f$  est alors appelée somme de la série, et on note  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .

**Exemple 6.19**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$ .

Soit  $t \in ]-1, 1[$ . Comme  $t \neq 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}.$$

Comme  $|t| < 1$ ,  $t^{n+1} \rightarrow 0$ , donc  $S_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-t}$ . Ceci valant pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]-1, 1[$  vers la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ .

On ne peut pas remplacer  $]-1, 1[$  par un intervalle plus grand : si  $|t| \geq 1$ , alors  $|t^n| \geq 1$  pour tout  $n$ , donc la série numérique  $\sum t^n$  diverge grossièrement.

**Exemple 6.20**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t^2}{(1 + t^2)^n}.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t = 0$ , alors  $f_n(0) = 0$  pour tout  $n$ , donc  $S_n(0) = 0 \rightarrow 0$ .

Supposons  $t \neq 0$  et posons  $q = \frac{1}{1+t^2}$ . Comme  $t^2 > 0$ , on a  $q \in ]0, 1[$  et  $f_n(t) = t^2 q^n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n(t) = t^2 \sum_{k=0}^n q^k = t^2 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Comme  $q \in ]0, 1[$ ,  $q^{n+1} \rightarrow 0$ , donc  $S_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{1-q}$ . Or

$$1 - q = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \text{donc} \quad \frac{t^2}{1-q} = 1 + t^2.$$

La série  $\sum f_n$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction

$$S : t \mapsto \begin{cases} 1 + t^2 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Chaque  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , mais  $S$  n'est pas continue en 0 :  $S(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0$  avec  $t \neq 0$ , alors que  $S(0) = 0$ . Comme pour les suites, la somme d'une série de fonctions continues qui converge simplement n'est pas nécessairement continue.

**Définition 6.21 (Convergence uniforme)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$ , de sommes partielles  $(S_n)$ , et soit  $f$  une fonction définie sur le même intervalle.  $\sum f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  si la suite  $(S_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , c'est-à-dire si :

- la différence  $S_n - f$  est bornée à partir d'un certain rang
- $\|S_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

**Remarque**

Supposons que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ , de somme  $S$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle reste d'indice  $n$  de la série la fonction

$$R_n = S - S_n : I \rightarrow \mathbb{K}, t \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t).$$

Pour tout  $t \in I$ ,  $R_n(t)$  est le reste d'indice  $n$  de la série numérique convergente  $\sum f_k(t)$ .

Une série de fonctions ne pouvant converger uniformément que vers sa somme simple, la définition précédente se reformule avec les restes :  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement si elle converge simplement sur  $I$  et :

- le reste  $R_n$  est borné à partir d'un certain rang
- $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ .

**Exemple 6.22**

Soit  $a \in [0, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$ . Montrons que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[-a, a]$ .

Comme  $[-a, a] \subset ]-1, 1[$ , le premier exemple montre que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[-a, a]$  vers  $S : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [-a, a]$ . Le reste d'indice  $n$  vérifie

$$|R_n(t)| = |S(t) - S_n(t)| = \left| \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right| = \frac{|t|^{n+1}}{1-t}.$$

Or  $|t|^{n+1} \leq a^{n+1}$  et  $1-t \geq 1-a > 0$ , donc

$$|R_n(t)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $t$  : le reste  $R_n$  est borné sur  $[-a, a]$  et  $0 \leq \|R_n\|_\infty \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$ . Comme  $a \in [0, 1[$ ,  $a^{n+1} \rightarrow 0$ , donc, par encadrement,  $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$  : la série  $\sum f_n$  converge uniformément vers  $S$  sur  $[-a, a]$ .

**Remarque**

Comme on vient de le voir, la convergence uniforme d'une série de fonctions n'est pas particulièrement facile à vérifier : il faut majorer  $|R_n(t)|$  indépendamment de  $t$ , ce qui, dans l'exemple précédent, reposait sur une expression explicite de  $S_n$  et de  $S$ . Or on sait rarement calculer les sommes partielles ou la somme d'une série de fonctions. Il existe une autre notion de convergence, plus forte, mais également plus

adaptée au cas des séries, car elle ne porte que sur les termes  $f_n$ .

### Définition 6.23 (Convergence normale)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions bornées sur un intervalle  $I$ .  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si la série numérique  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge.

### Remarque

Comme pour la convergence uniforme, il suffit en fait que les fonctions  $f_n$  soient bornées sur  $I$  à partir d'un certain rang  $N$  : la convergence normale signifie alors que la série numérique  $\sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty$  converge. Modifier un nombre fini de termes ne changeant pas la nature d'une série, ce choix de  $N$  n'a pas d'importance.

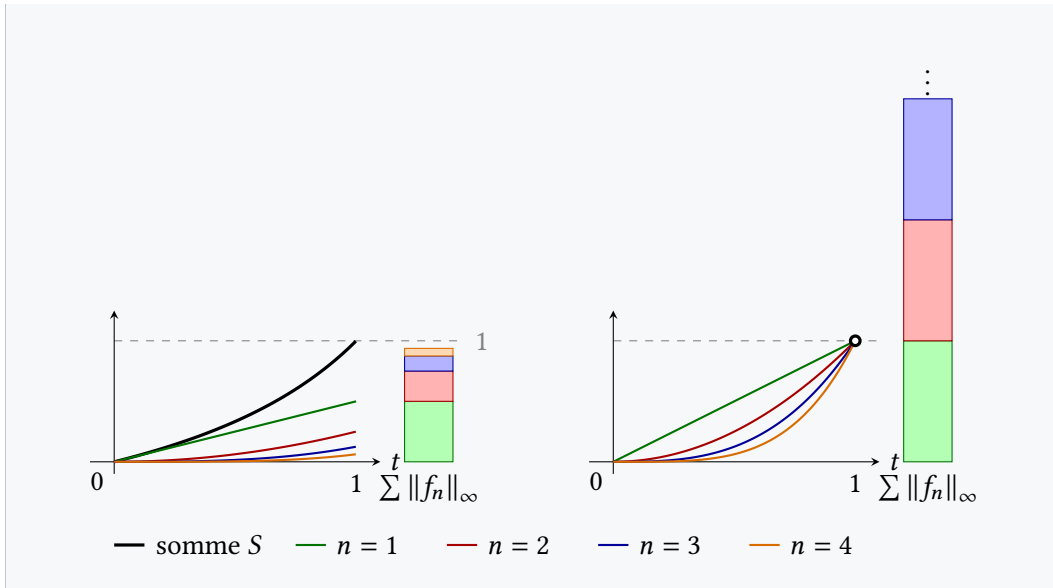
### Remarque

Contrairement aux convergences simple et uniforme, la définition de la convergence normale ne fait intervenir aucune fonction somme  $f$ . Ce n'est pas un problème : nous allons voir que la convergence normale entraîne la convergence simple. En cas de convergence normale, la somme de la série est donc la somme donnée par la convergence simple.

### Remarque

La figure ci-dessous illustre ce point de vue. Pour chaque terme  $f_n$ , on repère la plus petite bande horizontale, centrée sur l'axe des abscisses, qui contient tout le graphe de  $f_n$  : sa demi-hauteur est  $\|f_n\|_\infty$ . La convergence normale ne regarde ni la somme ni les restes de la série ; elle demande seulement que ces hauteurs  $\|f_n\|_\infty$ , empilées les unes sur les autres, forment une pile de hauteur finie.

À gauche, les fonctions  $f_n : t \mapsto \frac{t^n}{2^n}$  sur  $[0, 1]$ , pour  $n \geq 1$  : on a  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$ , et la pile des hauteurs  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  a pour hauteur totale 1. La série converge normalement sur  $[0, 1]$ . Sa somme  $S : t \mapsto \frac{t}{2-t}$ , en noir, reste sous cette hauteur. À droite, les fonctions  $t \mapsto t^n$  sur  $[0, 1[$  : chaque graphe frôle la hauteur 1 au voisinage de 1, donc  $\|f_n\|_\infty = 1$  pour tout  $n$ , et la pile monte indéfiniment. La série ne converge pas normalement sur  $[0, 1[$ , bien qu'elle converge simplement.



### Méthode 6.24 (Montrer une convergence normale)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$ . Pour montrer que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  :

1. **Majorer  $|f_n(t)|$  indépendamment de  $t$ .** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in I$ . On cherche un réel  $u_n \geq 0$ , qui ne dépend *que* de  $n$  et pas de  $t$ , tel que

$$|f_n(t)| \leq u_n.$$

Le plus souvent, une majoration directe suffit :  $|\sin| \leq 1$ ,  $|\cos| \leq 1$ ,  $t \in [a, b]$  donc  $|t| \leq \max(|a|, |b|)$ , un dénominateur minoré, etc. Sinon, on étudie les variations de  $|f_n|$  sur  $I$  pour déterminer son maximum.

2. **Majorer la norme infinie.** L'inégalité précédente vaut pour tout  $t \in I$  : la fonction  $f_n$  est donc bornée sur  $I$  et  $u_n$  en est un majorant. Comme  $\|f_n\|_\infty$  est le plus petit des majorants de  $|f_n|$ ,

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq u_n.$$

3. **Montrer que  $\sum u_n$  converge.** On reconnaît une série de référence (série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $\alpha > 1$ , série géométrique de raison dans  $[0, 1[$ ) ou on applique un critère du chapitre sur les séries numériques (comparaison, équivalent, règle de d'Alembert).
4. **Conclure.** Les séries  $\sum \|f_n\|_\infty$  et  $\sum u_n$  sont à termes positifs,  $\|f_n\|_\infty \leq u_n$  pour tout  $n$  et  $\sum u_n$  converge. Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge : la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ .

Si le majorant  $u_n$  obtenu est le terme général d'une série divergente, on ne peut rien conclure : soit on cherche un meilleur majorant, soit on calcule  $\|f_n\|_\infty$  exactement, et si  $\sum \|f_n\|_\infty$  diverge, la convergence n'est pas normale sur  $I$ .

### Exemple 6.25

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{n^2 + t^2}.$$

Montrons que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

*Majoration indépendante de  $t$ .* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Comme  $t^2 \geq 0$ , on a  $n^2 + t^2 \geq n^2 > 0$ , donc

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n^2 + t^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

*Norme infinie.* Ce majorant ne dépend pas de  $t$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ .

*Série majorante.* La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ).

*Conclusion.* Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

### Exemple 6.26

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2 e^{-nt}.$$

Montrons que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Majoration indépendante de  $t$ .* Ici, une majoration directe échoue : le facteur  $t^2$  n'est pas borné sur  $\mathbb{R}_+$ , et  $e^{-nt} \leq 1$  ne suffit pas. Étudions les variations de  $f_n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est positive et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , avec, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$f'_n(t) = 2te^{-nt} - nt^2 e^{-nt} = t(2 - nt)e^{-nt}.$$

Comme  $t \geq 0$  et  $e^{-nt} > 0$ ,  $f'_n(t)$  est du signe de  $2 - nt$  :  $f_n$  est croissante sur  $[0, \frac{2}{n}]$  et décroissante sur  $[\frac{2}{n}, +\infty]$ . Elle atteint donc son maximum en  $t = \frac{2}{n}$ , et pour tout  $t \geq 0$ ,

$$0 \leq f_n(t) \leq f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2} = \frac{4}{e^2 n^2}.$$

*Norme infinie.* Ce majorant ne dépend pas de  $t$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{4}{e^2 n^2}$ . Le maximum étant atteint, on a même  $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{e^2 n^2}$ .

*Série majorante.* La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ), donc la série  $\sum \frac{4}{e^2 n^2}$  converge, par multiplication par la constante  $\frac{4}{e^2}$ .

*Conclusion.* Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Proposition 6.27

Si  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , alors, pour tout  $t \in I$ , la série numérique  $\sum f_n(t)$  converge absolument.

#### Démonstration

Soit  $t \in I$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est bornée sur  $I$  et  $\|f_n\|_\infty$  majore  $|f_n|$ , donc

$$0 \leq |f_n(t)| \leq \|f_n\|_\infty.$$

La série à termes positifs  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge ; par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum |f_n(t)|$  converge.  $\square$

### Proposition 6.28

Si  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , alors  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

**Démonstration**

D'après la proposition précédente, pour tout  $t \in I$ , la série numérique  $\sum f_n(t)$  converge absolument, donc converge : la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ . Notons  $S$  sa somme et  $(R_n)$  la suite de ses restes. D'après la remarque suivant la définition de la convergence uniforme, il suffit de montrer que  $R_n$  est borné et que  $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$  le reste d'indice  $n$  de la série numérique convergente  $\sum \|f_k\|_\infty$ . On a  $\rho_n \rightarrow 0$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in I$ . Pour tout entier  $p > n$ , par inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{k=n+1}^p f_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^p |f_k(t)| \leq \sum_{k=n+1}^p \|f_k\|_\infty \leq \rho_n,$$

la dernière inégalité venant de la positivité des termes  $\|f_k\|_\infty$ . En faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , le membre de gauche tend vers  $|R_n(t)|$ , donc  $|R_n(t)| \leq \rho_n$ .

Ce majorant ne dépend pas de  $t$  :  $R_n$  est borné sur  $I$  et  $0 \leq \|R_n\|_\infty \leq \rho_n$ . Comme  $\rho_n \rightarrow 0$ , par encadrement,  $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$  : la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .  $\square$

**Remarque**

La convergence normale entraîne donc la convergence simple. On a ainsi les implications

convergence normale  $\implies$  convergence uniforme  $\implies$  convergence simple.

**Exemple 6.29**

Soit  $q \in [0, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : [0, q] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t^n$ . Montrons que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, q]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $t \in [0, q]$ ,  $0 \leq t^n \leq q^n$ , avec égalité en  $t = q$ . La fonction  $f_n$  est donc bornée sur  $[0, q]$  et  $\|f_n\|_\infty = q^n$ . Or la série  $\sum \|f_n\|_\infty = \sum q^n$  est une série géométrique de raison  $q \in [0, 1[$ , donc convergente. Donc  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, q]$ .

En revanche, la convergence n'est pas normale sur  $[0, 1[$ , bien que la série y converge simplement. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $0 \leq t^n \leq 1$ , donc  $f_n$  est bornée sur  $[0, 1[$  et  $\|f_n\|_\infty \leq 1$ . Par ailleurs,  $t^n \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 1^-$  : aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore  $|f_n|$  sur  $[0, 1[$ , donc  $\|f_n\|_\infty = 1$ . La série  $\sum 1$  diverge grossièrement : la série  $\sum f_n$  ne converge pas normalement sur  $[0, 1[$ .

**Exemple 6.30**

Soit  $a > 1$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ . Montrons que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $s \geq a$ , comme  $\ln n \geq 0$ ,

$$0 \leq \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \leq e^{-a \ln n} = \frac{1}{n^a},$$

avec égalité en  $s = a$ . La fonction  $f_n$  est donc bornée sur  $[a, +\infty[$  et  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^a}$ . Or la série  $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n^a}$  est une série de Riemann convergente ( $a > 1$ ). Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ .

En revanche, la convergence n'est pas normale sur  $]1, +\infty[$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le même raisonnement montre que  $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $s > 1$ , et  $\frac{1}{n^s} \rightarrow \frac{1}{n}$  quand  $s \rightarrow 1^+$  ; donc  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ . La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge : la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  ne converge pas normalement sur  $]1, +\infty[$ .

**Exemple 6.31**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{n^2} e^{-t/n}.$$

Nous avons vu, en étudiant la suite  $(f_n)$ , que  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{en}$ . *Convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$ .* La série  $\sum \frac{1}{en}$  diverge, car la série harmonique diverge : la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Convergence simple sur  $\mathbb{R}_+$ .* Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme  $0 < e^{-t/n} \leq 1$ ,

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{t}{n^2}.$$

La série  $\sum \frac{t}{n^2}$  converge (série de Riemann d'exposant 2); par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum f_n(t)$  converge. La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}_+$ ; notons  $(R_n)$  la suite de ses restes.

*Convergence normale sur  $[0, a]$ .* Soit  $a > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [0, a]$ , l'inégalité précédente donne

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{t}{n^2} \leq \frac{a}{n^2}.$$

Le majorant  $\frac{a}{n^2}$  ne dépend pas de  $t$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $[0, a]$  et  $\|f_n\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{a}{n^2}$ . Or la série  $\sum \frac{a}{n^2}$  converge, comme multiple de la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  ( $2 > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_{\infty, [0, a]}$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, a]$ .

*Convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tous les termes  $f_k(n)$  étant positifs,  $R_{2n}(n) \geq 0$ , donc

$$R_n(n) \geq R_n(n) - R_{2n}(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} e^{-n/k}.$$

Pour  $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ , on a  $k \leq 2n$ , donc  $\frac{n}{k^2} \geq \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$ , et  $\frac{n}{k} \leq 1$ , donc  $e^{-n/k} \geq e^{-1}$ . Cette somme comportant  $n$  termes,

$$R_n(n) \geq n \cdot \frac{1}{4n} \cdot e^{-1} = \frac{1}{4e}.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $R_n$  soit borné,  $\|R_n\|_\infty \geq R_n(n) \geq \frac{1}{4e}$ , ce qui ne tend pas vers 0 : la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exemple 6.32**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{(-1)^n}{n} t^n.$$

Montrons que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ , mais pas normalement.

*Convergence simple.* Soit  $t \in [0, 1]$ . Posons  $a_n = \frac{t^n}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , de sorte que  $f_n(t) = (-1)^n a_n$ . La suite  $(a_n)$  est positive et, comme  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$a_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{n+1} \leq \frac{t^n}{n+1} \leq \frac{t^n}{n} = a_n,$$

donc  $(a_n)$  est décroissante. Enfin  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ , donc  $a_n \rightarrow 0$ . D'après le critère des

séries alternées, la série  $\sum f_n(t)$  converge et son reste vérifie

$$|R_n(t)| \leq a_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$ .

*Convergence uniforme.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'inégalité précédente donne  $|R_n(t)| \leq \frac{1}{n+1}$ . Ce majorant ne dépend pas de  $t$  :  $R_n$  est borné sur  $[0, 1]$  et  $0 \leq \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$ . Par encadrement,  $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$  : la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

*Convergence normale.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|f_n(t)| = \frac{t^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ , avec égalité en  $t = 1$ , donc  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ . La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge : la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  ne converge pas normalement sur  $[0, 1]$ .

La réciproque de la proposition précédente est donc fausse : une série de fonctions peut converger uniformément sans converger normalement.

#### Remarque

Pour étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions, le bon réflexe est presque toujours d'étudier d'abord sa convergence normale : elle ne demande que de majorer les termes  $f_n$ , sans connaître la somme ni les restes.

L'exception type est celle des séries alternées, comme dans l'exemple précédent : la convergence peut y être uniforme sans être normale. On majore alors directement le reste  $R_n$  grâce au critère des séries alternées.

### 3. Bilan

Le tableau suivant récapitule les notions de convergence rencontrées pour les suites et les séries, numériques ou de fonctions. Dans chaque case, les convergences sont rangées de la plus forte à la plus faible ; les convergences propres aux séries sont en gras.

|              | Suite                | Série                                |
|--------------|----------------------|--------------------------------------|
| Numérique    | convergence          | <b>convergence absolue</b>           |
|              |                      | $\Downarrow$<br>convergence          |
| De fonctions | convergence uniforme | <b>convergence normale</b>           |
|              | $\Downarrow$         | $\Downarrow$<br>convergence uniforme |
|              | convergence simple   | $\Downarrow$<br>convergence simple   |

#### Remarque

Une série, numérique ou de fonctions, est par définition la suite de ses sommes partielles. Elle hérite donc systématiquement de toutes les notions de convergence des suites : une série numérique  $\sum u_n$  converge si la suite numérique  $(S_n)$  converge, et une série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement ou uniformément si la suite de fonctions  $(S_n)$  converge simplement ou uniformément.

Les séries possèdent en plus leur propre notion de convergence, qui porte sur les termes et non sur les sommes partielles : la convergence absolue pour les séries numériques (convergence de  $\sum |u_n|$ ), la convergence normale pour les séries de

fonctions (convergence de  $\sum \|f_n\|_\infty$ ). Chacune entraîne la plus forte des convergences héritées des suites.

#### Remarque

On passe de la ligne « De fonctions » à la ligne « Numérique » en fixant  $t \in I$  : la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  si et seulement si, pour tout  $t \in I$ , la suite numérique  $(f_n(t))$  converge ; de même pour une série de fonctions  $\sum f_n$  et les séries numériques  $\sum f_n(t)$ .

#### Remarque

La convergence normale *n'est pas* la convergence absolue. Les deux notions se ressemblent : dans les deux cas, on remplace chaque terme par une quantité positive qui mesure sa taille ( $|u_n|$  ou  $\|f_n\|_\infty$ ), et on demande la convergence de la série à termes positifs obtenue. Mais la convergence absolue concerne les séries numériques, et la convergence normale les séries de fonctions : il ne faut pas mélanger les deux vocabulaires.



## II. THÉORÈMES D'INTERVERSION ET DE RÉGULARITÉ

### 1. Limite et continuité

#### Théorème 6.33 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$
- $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ ;

alors  $f$  est continue sur  $I$ .

#### Démonstration

Soit  $a \in I$ . Montrons que  $f$  est continue en  $a$ . Soit  $\epsilon > 0$ .

*Choix d'un rang.* Comme  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $f_N - f$  soit bornée sur  $I$  et  $\|f_N - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}$ . Pour tout  $t \in I$ , on a alors

$$|f_N(t) - f(t)| \leq \|f_N - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Ce rang  $N$  est désormais fixé.

*Continuité de  $f_N$  en  $a$ .* La fonction  $f_N$  est continue en  $a$  : il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $t \in I$  vérifiant  $|t - a| \leq \delta$ , on ait  $|f_N(t) - f_N(a)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ .

*Conclusion.* Soit  $t \in I$  tel que  $|t - a| \leq \delta$ . En intercalant  $f_N(t)$  et  $f_N(a)$ , l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} |f(t) - f(a)| &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme sont majorés grâce à la convergence uniforme, le second grâce à la continuité de  $f_N$ . On a ainsi montré :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I, |t - a| \leq \delta \implies |f(t) - f(a)| \leq \epsilon,$$

c'est-à-dire que  $f$  est continue en  $a$ . Ceci valant pour tout  $a \in I$ , la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .  $\square$

#### Remarque

La convergence uniforme est essentielle : la suite des fonctions continues  $t \mapsto t^n$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction nulle sur  $[0, 1[$  et valant 1 en 1, qui n'est pas continue. On retrouve ainsi, par contraposée, que cette convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Exemple 6.34**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t + \frac{1}{n}}.$$

Montrons que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  et que sa limite est continue.

*Limite simple.* Soit  $t \in [0, 1]$ . Comme  $t + \frac{1}{n} \rightarrow t$  et que la racine carrée est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $f_n(t) \rightarrow \sqrt{t}$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers  $f : t \mapsto \sqrt{t}$ .

*Convergence uniforme.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, 1]$ . En multipliant par la quantité conjuguée,

$$|f_n(t) - f(t)| = \sqrt{t + \frac{1}{n}} - \sqrt{t} = \frac{(t + \frac{1}{n}) - t}{\sqrt{t + \frac{1}{n}} + \sqrt{t}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{t + \frac{1}{n}} + \sqrt{t}}.$$

Le dénominateur vérifie  $\sqrt{t + \frac{1}{n}} + \sqrt{t} \geq \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , donc

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $t$  : la fonction  $f_n - f$  est bornée sur  $[0, 1]$  et  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

*Continuité de la limite.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$ , comme composée de  $t \mapsto t + \frac{1}{n}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , et de la racine carrée, continue sur  $\mathbb{R}_+$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème précédent,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

La continuité de la racine carrée était connue ; le théorème prendra tout son intérêt pour les séries de fonctions, dont la somme n'est en général pas explicite.

**Remarque**

Il arrive que la convergence ne soit pas uniforme sur l'intervalle  $I$  tout entier, mais qu'elle le soit sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $I$ . Cela suffit pour conclure à la continuité de la limite sur  $I$ .

En effet, la continuité est une propriété locale :  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si elle est continue en chaque point  $a \in I$ , et la continuité en  $a$  ne dépend que des valeurs de  $f$  au voisinage de  $a$ . Or, pour tout  $a \in I$ , il existe un segment  $[c, d] \subset I$  contenant  $a$  et contenant tous les points de  $I$  assez proches de  $a$  : il suffit de prendre  $c < a < d$  si  $a$  est intérieur à  $I$ , et  $c = a$  ou  $d = a$  si  $a$  est une extrémité de  $I$ . Les fonctions  $f_n$  étant continues sur  $[c, d]$  et la convergence y étant uniforme, le théorème montre que  $f$  est continue sur  $[c, d]$ , donc en  $a$ .

En pratique, pour montrer que la limite  $f$  est continue sur  $I$ , on vérifie donc que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$  ;
- pour tout segment  $[a, b] \subset I$ ,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Exemple 6.35**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{t^{1/n}}{t}.$$

*Limite simple.* Soit  $t > 0$ . On a  $t^{1/n} = e^{\frac{\ln t}{n}} \rightarrow e^0 = 1$ , donc  $f_n(t) \rightarrow \frac{1}{t}$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers  $f: t \mapsto \frac{1}{t}$ .

La convergence n'est pas uniforme sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t > 0$ ,

$$f_n(t) - f(t) = \frac{t^{1/n} - 1}{t}.$$

Quand  $t \rightarrow 0^+$ , le numérateur tend vers  $-1$  et le dénominateur vers  $0^+$ , donc  $f_n(t) - f(t) \rightarrow -\infty$ . La fonction  $f_n - f$  n'est donc bornée sur  $]0, +\infty[$  pour aucun  $n$  : la première condition de la définition n'est pas remplie, et la convergence n'est pas uniforme sur  $]0, +\infty[$ . Le même argument montre qu'elle n'est uniforme sur aucun intervalle de la forme  $]0, b]$ .

*Convergence uniforme sur tout segment.* Soient  $0 < a < b$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $t \in [a, b]$ , la croissance de  $t \mapsto t^{1/n}$  donne  $a^{1/n} \leq t^{1/n} \leq b^{1/n}$ , donc

$$\left| t^{1/n} - 1 \right| \leq \max \left( 1 - a^{1/n}, b^{1/n} - 1 \right) = M_n.$$

Comme de plus  $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{a}$ , on obtient, pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{|t^{1/n} - 1|}{t} \leq \frac{M_n}{a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $t$  : la fonction  $f_n - f$  est bornée sur  $[a, b]$  et sa norme infinie sur  $[a, b]$  vérifie  $\|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{M_n}{a}$ . Or  $a^{1/n} \rightarrow 1$  et  $b^{1/n} \rightarrow 1$ , donc  $M_n \rightarrow 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

*Continuité de la limite.* Soit  $[a, b]$  un segment de  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n: t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , donc sur  $[a, b]$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . D'après le théorème,  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .

Ainsi  $f$  est continue sur tout segment  $[a, b]$  de  $]0, +\infty[$ . Par caractère local de la continuité (voir la remarque précédente),  $f$  est donc continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Remarque**

Insistons sur ce que la remarque précédente ne dit *pas* : la convergence uniforme sur tout segment  $[a, b] \subset I$  n'entraîne pas la convergence uniforme sur  $I$ . C'est faux, et l'exemple ci-dessus le montre : la suite  $(f_n)$  y converge uniformément sur tout segment de  $]0, +\infty[$  sans converger uniformément sur  $]0, +\infty[$ . Contrairement à la continuité, la convergence uniforme n'est pas une propriété locale :  $\|f_n - f\|_{\infty, I}$  est une borne supérieure sur  $I$  tout entier, qui peut être infinie ou ne pas tendre vers 0 alors que chaque  $\|f_n - f\|_{\infty, [a, b]}$  tend vers 0.

Ce qui se transmet des segments à  $I$ , c'est la continuité de  $f$ , parce qu'elle est locale. La rédaction attendue est donc celle de l'exemple : «  $f$  est continue sur tout segment de  $I$ , donc, par caractère local de la continuité,  $f$  est continue sur  $I$  », et jamais «  $(f_n)$  converge uniformément sur tout segment, donc sur  $I$  ».

**Théorème 6.36 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$
- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ ;

alors la somme  $S: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  est continue sur  $I$ .

**Démonstration**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  la somme partielle d'indice  $n$ . Nous allons appliquer à la suite  $(S_n)$  le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions.

*Les sommes partielles sont continues.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $S_n$  est une somme finie de fonctions continues sur  $I$ , à savoir  $f_0, \dots, f_n$  : elle est donc continue sur  $I$ .

*Les sommes partielles convergent uniformément.* Par définition, dire que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ , c'est dire que la suite de fonctions  $(S_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers la somme  $S$  de la série.

*Conclusion.* La suite  $(S_n)$  est une suite de fonctions continues sur  $I$  qui converge uniformément vers  $S$  sur  $I$ . D'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions,  $S$  est continue sur  $I$ .  $\square$

**Remarque**

En pratique, on établit rarement la convergence uniforme d'une série de fonctions directement : cela demanderait de majorer les restes  $R_n$ , donc de connaître la somme ou au moins de l'estimer. On vérifie plutôt la convergence normale, qui ne porte que sur les termes  $f_n$  et qui entraîne la convergence uniforme. Pour montrer que la somme  $S$  de  $\sum f_n$  est continue sur  $I$ , on vérifie donc que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ ;
- $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ .

La convergence normale entraîne la convergence uniforme, et le théorème s'applique. Le cas d'une série alternée, où la convergence peut être uniforme sans être normale, se traite en majorant directement le reste grâce au critère des séries alternées.

**Exemple 6.37**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t^n}{n^2}.$$

Montrons que la somme  $S: t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$  est définie et continue sur  $[-1, 1]$ .

*Continuité des termes.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est polynomiale, donc continue sur  $[-1, 1]$ .

*Convergence normale.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [-1, 1]$ . Comme  $|t| \leq 1$ ,

$$|f_n(t)| = \frac{|t|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $t$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $[-1, 1]$  et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[-1, 1]$ . Elle converge donc uniformément sur  $[-1, 1]$ , et en particulier simplement : la somme  $S$  est définie sur  $[-1, 1]$ .

*Conclusion.* Les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[-1, 1]$  et la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$ . D'après le théorème,  $S$  est continue sur  $[-1, 1]$ . Contrairement aux exemples précédents portant sur des suites, la fonction  $S$  n'est pas connue explicitement : sa continuité n'aurait pas pu être obtenue autrement.

### Exemple 6.38

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n^2}.$$

Montrons que la somme  $S: t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^2}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

*Continuité des termes.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , comme composée de  $t \mapsto nt$  et du sinus.

*Convergence normale.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Comme  $|\sin(nt)| \leq 1$ ,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $t$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}$ . Sa somme  $S$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

*Conclusion.* D'après le théorème,  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

L'intervalle  $\mathbb{R}$  n'est pas un segment, mais cela n'a joué aucun rôle : le majorant  $\frac{1}{n^2}$  est valable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et la convergence normale a lieu sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Il n'est pas nécessaire de se restreindre à un segment lorsqu'on dispose d'une telle majoration sur tout l'intervalle.

### Remarque

Comme pour les suites de fonctions, il arrive que la convergence de  $\sum f_n$  ne soit pas uniforme sur l'intervalle  $I$  tout entier, mais qu'elle le soit sur tout segment  $[a, b] \subset I$ . Cela suffit encore pour conclure à la continuité de la somme  $S$  sur  $I$ .

L'argument est celui donné pour les suites : la continuité est une propriété locale. Soit  $a \in I$ . Il existe un segment  $[c, d] \subset I$  contenant  $a$  et tous les points de  $I$  assez proches de  $a$ . Les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[c, d]$  et la série  $\sum f_n$  y converge uniformément : d'après le théorème,  $S$  est continue sur  $[c, d]$ , donc en  $a$ . Ceci valant pour tout  $a \in I$ , la fonction  $S$  est continue sur  $I$ .

En pratique, pour montrer que la somme  $S$  est continue sur  $I$ , on vérifie donc que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ ;
- pour tout segment  $[a, b] \subset I$ ,  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

La convergence normale sur chaque segment  $[a, b]$  est une condition plus faible que la convergence normale sur  $I$  : c'est là tout l'intérêt de la méthode.

### Exemple 6.39

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{1}{n^s}.$$

Montrons que la fonction  $\zeta$  définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est continue sur  $]1, +\infty[$ .

*Convergence simple.* Soit  $s > 1$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^s}$  converge : la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$  et  $\zeta$  est bien définie. Notons  $(R_n)$  la suite de ses restes : pour  $s > 1$ ,  $R_n(s) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ .

*La convergence n'est pas uniforme sur  $]1, +\infty[$ .* Nous avons vu que la convergence n'est pas normale sur  $]1, +\infty[$  ; montrons qu'elle n'y est pas non plus uniforme. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $M > 0$ . La série harmonique diverge, donc ses sommes partielles tendent vers  $+\infty$  : il existe un entier  $p > n$  tel que  $\sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k} \geq 2M$ . Pour  $s > 1$ , les termes de la série  $\sum_{k>n} \frac{1}{k^s}$  étant positifs, on a

$$R_n(s) \geq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^s}.$$

Le membre de droite est une somme finie de fonctions continues de  $s$ , qui tend vers  $\sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k} \geq 2M$  quand  $s \rightarrow 1^+$ . Il existe donc  $s > 1$  tel que  $R_n(s) \geq M$ . Ainsi  $R_n$  n'est majoré par aucun réel  $M > 0$  : le reste  $R_n$  n'est pas borné sur  $]1, +\infty[$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  ne converge pas uniformément sur  $]1, +\infty[$ .

*Convergence normale sur tout segment.* Soit  $[a, b]$  un segment de  $]1, +\infty[$ , de sorte que  $1 < a \leq b$ . Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $s \in [a, b]$ . Comme  $\ln n \geq 0$  et  $s \geq a$ ,

$$0 < \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \leq e^{-a \ln n} = \frac{1}{n^a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $s$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $[a, b]$  et  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^a}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^a}$  est une série de Riemann convergente ( $a > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[a, b]$ . Le majorant  $\frac{1}{n^a}$  dépend de  $a$  : plus  $a$  est proche de 1, plus la série  $\sum \frac{1}{n^a}$  converge lentement, et il n'existe pas de majorant convenable sur  $]1, +\infty[$  tout entier.

*Continuité de la somme.* Soit  $[a, b]$  un segment de  $]1, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n : s \mapsto e^{-s \ln n}$  est continue sur  $]1, +\infty[$ , donc sur  $[a, b]$ . La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$ . D'après le théorème,  $\zeta$  est continue sur  $[a, b]$ .

Ainsi  $\zeta$  est continue sur tout segment  $[a, b]$  de  $]1, +\infty[$ . Par caractère local de la continuité (voir la remarque précédente),  $\zeta$  est donc continue sur  $]1, +\infty[$ .

#### Théorème 6.40 (Double limite pour les séries de fonctions)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$ . Soit  $a$  un point de  $I$  ou une extrémité de  $I$ , éventuellement infinie.

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  admet une limite finie  $\ell_n$  en  $a$
- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ ;

alors :

- la série numérique  $\sum \ell_n$  converge
- la somme  $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  admet une limite finie en  $a$

- le passage à la limite et la sommation peuvent être intervertis :

$$\lim_{t \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

### Démonstration

Hors programme. □

### Remarque

Il faut bien distinguer les deux opérations que le théorème permet d'intervertir, car elles ne portent pas sur la même variable.

- À  $n$  fixé,  $\lim_{t \rightarrow a} f_n(t) = \ell_n$  est la limite d'une seule fonction, la fonction  $f_n$ , quand sa variable  $t$  tend vers  $a$ . L'entier  $n$  ne bouge pas. On obtient ainsi une suite numérique  $(\ell_n)$ , et le théorème affirme que la série  $\sum \ell_n$  converge : c'est une conclusion, pas une hypothèse.
- À  $t$  fixé,  $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  est la somme d'une série numérique, indexée par  $n$ . Le réel  $t$  ne bouge pas. On obtient ainsi une fonction  $S$ , et le théorème affirme qu'elle admet une limite en  $a$ .

Le membre de gauche de l'égalité est la limite en  $a$  de la fonction  $S$  ; le membre de droite est la somme de la série numérique  $\sum \ell_n$ . Rien ne garantit *a priori* que ces deux nombres existent, ni qu'ils soient égaux : c'est la convergence uniforme qui l'assure.

### Exemple 6.41

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + x}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{n^2 + 2n + x}$ , bien définie car  $n^2 + 2n + x > 0$ .

*Limite des termes.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Quand  $x \rightarrow 1$ ,  $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{(n+1)^2} = \ell_n$ .

*Convergence normale.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $x \geq 0$ ,

$$0 < f_n(x) = \frac{1}{n^2 + 2n + x} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Conclusion.* D'après le théorème de la double limite, appliqué en  $a = 1 \in \mathbb{R}_+$ , la série  $\sum \ell_n$  converge, la somme  $S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  admet une limite en 1 et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

en utilisant la valeur classique  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , que nous admettons.

Ici  $a = 1$  appartient à l'intervalle : le résultat traduit la continuité de  $S$  en 1, que le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions aurait aussi donnée. Le théorème de la double limite fournit en plus la valeur de  $S(1)$  sous forme de série.

**Exemple 6.42**

Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}$ .

*Limite des termes.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $n^2x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $f_n(x) \rightarrow 0 = \ell_n$ .

*Convergence normale.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \geq 1$ . Comme  $1 + n^2x \geq n^2x \geq n^2$ ,

$$0 < f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $[1, +\infty[$  et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ .

*Conclusion.* Le point  $a = +\infty$  est une extrémité de  $[1, +\infty[$ . D'après le théorème de la double limite, la somme  $S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  admet une limite en  $+\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Le choix de l'intervalle  $[1, +\infty[$  plutôt que  $]0, +\infty[$  est celui qui rend la majoration possible : sur  $]0, +\infty[$ , on a seulement  $\|f_n\|_\infty = 1$ , et la série  $\sum 1$  diverge. Comme seule la limite en  $+\infty$  nous intéresse, on peut se placer sur  $[1, +\infty[$  sans rien perdre.

**Exemple 6.43**

Reprenons la fonction  $S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}$  de l'exemple précédent, et montrons que

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

Le théorème de la double limite ne donne que  $S(x) \rightarrow 0$ ; pour obtenir un équivalent, on l'applique à la fonction  $x \mapsto xS(x)$ , qui est encore la somme d'une série de fonctions.

*Écriture de  $xS(x)$  comme somme d'une série.* Soit  $x \geq 1$ . En multipliant chaque terme de la série convergente  $\sum f_n(x)$  par  $x$ ,

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + n^2}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons donc  $g_n: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{x} + n^2}$ , de sorte que  $xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ .

*Limite des termes.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{n^2}$ .

*Convergence normale.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \geq 1$ . Comme  $\frac{1}{x} > 0$ ,

$$0 < g_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$ . Donc  $g_n$  est bornée sur  $[1, +\infty[$  et  $\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ). Par critère de comparaison

des séries à termes positifs,  $\sum \|g_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ .

*Conclusion.* D'après le théorème de la double limite en  $+\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Comme  $\frac{\pi^2}{6} \neq 0$ , on en déduit  $xS(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$ , c'est-à-dire  $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$ .

### Remarque

L'hypothèse de convergence uniforme ne peut pas être supprimée : sans elle, les deux membres de l'égalité peuvent exister et être différents. C'est ce que montre l'exemple suivant.

### Exemple 6.44

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n(1-t)$ .

*Somme de la série.* Soit  $t \in [0, 1[$ . La série géométrique  $\sum t^n$  converge, de somme  $\frac{1}{1-t}$ , donc

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n(1-t) = (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = (1-t) \cdot \frac{1}{1-t} = 1.$$

La fonction  $S$  est constante égale à 1 sur  $[0, 1[$ , donc  $S(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 1^-$ .

*Limite des termes.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Quand  $t \rightarrow 1^-$ ,  $f_n(t) = t^n(1-t) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$ . La série  $\sum \ell_n = \sum 0$  converge, de somme 0.

*Les deux membres diffèrent.* On a donc

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 1^-} f_n(t) = 0.$$

Le théorème de la double limite ne s'applique pas, et de fait la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1[$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $t \in [0, 1[$ , le reste d'indice  $n$  vaut

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k(1-t) = (1-t) \cdot \frac{t^{n+1}}{1-t} = t^{n+1}.$$

Ainsi  $0 \leq R_n(t) < 1$  et  $R_n(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 1^-$  : le reste  $R_n$  est borné sur  $[0, 1[$  et  $\|R_n\|_\infty = 1$ , ce qui ne tend pas vers 0. La série  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1[$ .

### Remarque

Le théorème de la double limite existe aussi pour les suites de fonctions. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , et  $a$  un point de  $I$  ou une extrémité de  $I$ , éventuellement infinie. Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  admet une limite finie  $\ell_n$  en  $a$ , et si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors la suite  $(\ell_n)$  converge, la fonction  $f$  admet une limite finie en  $a$  et

$$\lim_{t \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow a} f_n(t).$$

Ce résultat est **hors programme** : dans une copie, on ne peut pas l'invoquer directement. Seule la version pour les séries de fonctions figure au programme.

### Remarque

On peut néanmoins se ramener au théorème du programme par télescopage. Soit  $(g_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions définies sur  $I$  qui converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ , et telle que chaque  $g_n$  admette une limite finie  $\ell_n$  en  $a$ . Posons  $f_1 = g_1$  et, pour  $n \geq 2$ ,  $f_n = g_n - g_{n-1}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , la somme partielle de la série  $\sum f_k$  est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n f_k = g_1 + \sum_{k=2}^n (g_k - g_{k-1}) = g_n.$$

La série  $\sum f_n$  a donc pour sommes partielles les  $g_n$  : elle converge uniformément sur  $I$ , de somme  $g$ . De plus, chaque  $f_n$  admet une limite finie en  $a$ , à savoir  $\ell_1$  pour  $n = 1$  et  $\ell_n - \ell_{n-1}$  pour  $n \geq 2$ . Le théorème de la double limite pour les séries de fonctions s'applique : la série  $\sum (\ell_n - \ell_{n-1})$  converge, c'est-à-dire que la suite  $(\ell_n)$  converge, la fonction  $g$  admet une limite finie en  $a$  et

$$\lim_{t \rightarrow a} g(t) = \ell_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (\ell_n - \ell_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n.$$

On retrouve exactement l'énoncé pour les suites, par un argument que l'on peut reproduire dans une copie.

### Exemple 6.45

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$g_n : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^x = e^{x \ln(x + \frac{1}{n})}.$$

Montrons que  $x^x \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 0^+$  à l'aide de la suite  $(g_n)$ .

*Limite simple.* Soit  $x \in ]0, 1]$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $x + \frac{1}{n} \rightarrow x > 0$ , donc, par continuité du logarithme et de l'exponentielle,  $g_n(x) \rightarrow e^{x \ln x} = x^x$ . La suite  $(g_n)$  converge simplement sur  $]0, 1]$  vers  $g : x \mapsto x^x$ .

*Convergence uniforme.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0, 1]$ . La fonction  $\varphi : u \mapsto u^x = e^{x \ln u}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée  $\varphi'(u) = xu^{x-1}$ . Pour  $u \geq x$ , comme  $x - 1 \leq 0$ , on a  $u^{x-1} \leq x^{x-1}$ , donc

$$0 \leq \varphi'(u) \leq x \cdot x^{x-1} = x^x = e^{x \ln x} \leq 1,$$

car  $x \ln x \leq 0$ . Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à  $\varphi$  entre  $x$  et  $x + \frac{1}{n}$ ,

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \varphi(x) \right| \leq 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$  :  $g_n - g$  est bornée sur  $]0, 1]$  et  $\|g_n - g\|_\infty \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . La suite  $(g_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $]0, 1]$ .

*Limite des termes.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $x \ln(x + \frac{1}{n}) \rightarrow 0 \cdot \ln \frac{1}{n} = 0$ , donc  $g_n(x) \rightarrow e^0 = 1$ . Ainsi  $\ell_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Conclusion.* Posons  $f_1 = g_1$  et  $f_n = g_n - g_{n-1}$  pour  $n \geq 2$ . D'après la remarque précédente, la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $]0, 1]$ , de somme  $g$ , et chaque

$f_n$  admet en 0 la limite finie  $\ell_1 = 1$  si  $n = 1$ ,  $\ell_n - \ell_{n-1} = 0$  si  $n \geq 2$ . D'après le théorème de la double limite pour les séries de fonctions,  $g$  admet une limite en 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

Cette limite se retrouve directement en écrivant  $x^x = e^{x \ln x}$  et  $x \ln x \rightarrow 0$ .

### Remarque

L'exemple précédent est artificiel : la limite de  $x^x$  en 0 s'obtient directement, et le détour par la suite  $(g_n)$  n'apporte rien. Ce n'est pas un défaut de l'exemple, mais la situation générale. Lorsqu'une suite de fonctions est donnée explicitement, sa limite  $g$  l'est aussi, et la limite de  $g$  en  $a$  se calcule sans théorème. Le résultat de la double limite pour les suites de fonctions est donc avant tout un outil théorique : il sert dans des situations où la suite  $(g_n)$  n'est pas explicite, par exemple définie par une récurrence ou par des intégrales, et où l'on sait seulement qu'elle converge uniformément.

Pour les séries de fonctions, la situation est différente : la somme  $S$  n'est presque jamais explicite, et le théorème de la double limite est le seul moyen d'obtenir sa limite au bord de l'intervalle, comme dans les exemples de calcul ci-dessus. C'est sans doute ce qui explique le choix du programme, qui retient la version pour les séries et exclut celle pour les suites.

## 2. Limite et intégrale sur un segment

### Théorème 6.46 (Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un segment  $[a, b]$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $[a, b]$
- $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$  ;

alors  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

### Démonstration

*La limite est continue.* Les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[a, b]$  et la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$  : d'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions,  $f$  est continue sur  $[a, b]$ . L'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  a donc un sens.

*Majoration de l'écart.* Comme  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , il existe un rang  $N$  à partir duquel  $f_n - f$  est bornée sur  $[a, b]$ . Soit  $n \geq N$ . Par linéarité de l'intégrale, puis par l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt.$$

Pour tout  $t \in [a, b]$ , on a  $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ . Par croissance de l'intégrale, comme

$a \leq b$ ,

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dt = (b - a) \|f_n - f\|_\infty.$$

*Conclusion.* On a montré que, pour tout  $n \geq N$ ,

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty.$$

Or  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  par convergence uniforme, et  $b - a$  est une constante. Par encadrement,  $\int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt$ .  $\square$

#### Exemple 6.47

Soit  $a \in [0, 1[$ . Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1 - x^n}{1 + x} dx$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1 - x^n}{1 + x}$ .

*Limite simple.* Soit  $x \in [0, a]$ . Comme  $0 \leq x \leq a < 1$ , on a  $x^n \rightarrow 0$ , donc  $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1 + x}$ .

La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, a]$  vers  $f : x \mapsto \frac{1}{1 + x}$ .

*Convergence uniforme.* Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, a]$ . Comme  $1 + x \geq 1$  et  $0 \leq x^n \leq a^n$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1 + x} \leq x^n \leq a^n.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$  :  $f_n - f$  est bornée sur  $[0, a]$  et  $\|f_n - f\|_\infty \leq a^n$ . Comme  $a \in [0, 1[$ ,  $a^n \rightarrow 0$ , donc  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ .

*Conclusion.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur le segment  $[0, a]$ , comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ . D'après le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,

$$\int_0^a \frac{1 - x^n}{1 + x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{1 + x} = \ln(1 + a).$$

#### Exemple 6.48

Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})}$ .

*Limite simple.* Soit  $x \in [0, 1]$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ , donc  $\ln(1 + \frac{x}{n}) \sim \frac{x}{n}$  et  $n \ln(1 + \frac{x}{n}) \rightarrow x$ . Par continuité de l'exponentielle,  $f_n(x) \rightarrow e^x$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers  $f : x \mapsto e^x$ .

*Deux inégalités.* Pour tout  $u \geq 0$ ,

$$u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1 + u) \leq u \quad \text{et} \quad e^{-u} \geq 1 - u.$$

La majoration  $\ln(1 + u) \leq u$  et l'inégalité  $e^{-u} \geq 1 - u$  traduisent la concavité du logarithme et la convexité de l'exponentielle, dont les graphes sont respectivement au-dessous et au-dessus de leurs tangentes en 0. Pour la minoration, posons  $\varphi(u) = \ln(1 + u) - u + \frac{u^2}{2}$  pour  $u \geq 0$  :  $\varphi$  est dérivable, avec

$$\varphi'(u) = \frac{1}{1 + u} - 1 + u = \frac{1 - (1 + u) + u(1 + u)}{1 + u} = \frac{u^2}{1 + u} \geq 0,$$

donc  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\varphi(u) \geq \varphi(0) = 0$ .

*Convergence uniforme.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ . Appliquons les inégalités précédentes à  $u = \frac{x}{n} \geq 0$ . D'une part,  $n \ln(1 + \frac{x}{n}) \leq n \cdot \frac{x}{n} = x$ , donc, par croissance de l'exponentielle,  $f_n(x) \leq e^x$ . D'autre part,

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}\right) = x - \frac{x^2}{2n},$$

donc

$$f_n(x) \geq e^{x - \frac{x^2}{2n}} = e^x e^{-\frac{x^2}{2n}} \geq e^x \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right).$$

En regroupant, et comme  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$0 \leq e^x - f_n(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2n} \leq \frac{e}{2n}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$  :  $f_n - f$  est bornée sur  $[0, 1]$  et  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{e}{2n} \rightarrow 0$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

*Conclusion.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est polynomiale, donc continue sur le segment  $[0, 1]$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

*Vérification.* Ici l'intégrale se calcule directement : une primitive de  $x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  est  $x \mapsto \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}$ , donc

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n}{n+1} \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 \right).$$

Comme  $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  et  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e$ , on retrouve la limite  $e - 1$ .

### Remarque

Le théorème s'interprète en termes de normes sur l'espace  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  des fonctions continues sur  $[a, b]$ . Nous avons rencontré au chapitre précédent la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  et la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Pour  $f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$ , l'inégalité  $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$  pour tout  $t \in [a, b]$  donne, en intégrant,

$$\|f\|_1 \leq (b - a) \|f\|_\infty.$$

C'est exactement l'inégalité utilisée dans la démonstration, appliquée à  $f_n - f$ . Elle montre que toute suite qui converge pour  $\|\cdot\|_\infty$  converge, vers la même limite, pour  $\|\cdot\|_1$  : si  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , alors  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ . La convergence uniforme sur un segment est plus forte que la convergence pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , dite convergence en moyenne.

La réciproque est fautive : la convergence pour  $\|\cdot\|_1$  n'entraîne pas la convergence uniforme. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t^n$  vérifie

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1.$$

La suite  $(f_n)$  converge vers la fonction nulle pour  $\|\cdot\|_1$ , mais pas pour  $\|\cdot\|_\infty$  : les deux normes ne sont pas équivalentes. En particulier, la convergence des intégrales  $\int_a^b f_n(t) dt$  ne permet jamais de conclure à la convergence uniforme.

#### Théorème 6.49 (Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un segment  $[a, b]$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $[a, b]$
- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  ;

alors la somme  $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  est continue sur  $[a, b]$ , la série numérique  $\sum \int_a^b f_n(t) dt$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt.$$

#### Démonstration

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  la somme partielle d'indice  $n$ .

*Application du théorème pour les suites.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $S_n$  est une somme finie de fonctions continues sur  $[a, b]$ , donc continue sur  $[a, b]$ . Par définition de la convergence uniforme d'une série, la suite  $(S_n)$  converge uniformément vers  $S$  sur  $[a, b]$ . D'après le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,  $S$  est continue sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b S_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S(t) dt.$$

*Identification des intégrales des sommes partielles.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par linéarité de l'intégrale, qui porte ici sur une somme finie,

$$\int_a^b S_n(t) dt = \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(t) dt.$$

Le membre de droite est la somme partielle d'indice  $n$  de la série numérique  $\sum \int_a^b f_k(t) dt$ .

*Conclusion.* La suite des sommes partielles de la série numérique  $\sum \int_a^b f_k(t) dt$  converge vers  $\int_a^b S(t) dt$ . Par définition, cette série converge et sa somme vaut  $\int_a^b S(t) dt$ .  $\square$

#### Remarque

Comme pour la continuité, on vérifie en pratique la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $[a, b]$ , qui entraîne la convergence uniforme. Le cas d'une série alternée, uniformément mais non normalement convergente, se traite par une majoration directe du reste, comme dans le second exemple ci-dessous.

**Exemple 6.50**

Soit  $a \in [0, 1[$ . Calculons  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n dx$  et déduisons-en la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$ .

*Continuité des termes.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est polynomiale, donc continue sur le segment  $[0, a]$ .

*Convergence normale.* Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, a]$ . Comme  $0 \leq x \leq a$ , on a  $0 \leq f_n(x) = x^n \leq a^n$ . Ce majorant ne dépend pas de  $x$ . Donc  $f_n$  est bornée sur  $[0, a]$  et  $\|f_n\|_\infty \leq a^n$ . Or la série  $\sum a^n$  est une série géométrique de raison  $a \in [0, 1[$ , donc convergente. Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, a]$ .

*Somme de la série.* Soit  $x \in [0, a]$ . Comme  $|x| < 1$ , la série géométrique  $\sum x^n$  converge et

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

*Intervention.* D'après le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment, la série  $\sum \int_0^a x^n dx$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n dx = \int_0^a \frac{dx}{1-x} = [-\ln(1-x)]_0^a = -\ln(1-a).$$

*Calcul de la somme demandée.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ . On a donc, par le changement d'indice  $m = n + 1$ ,

$$-\ln(1-a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a^m}{m},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a).$$

**Exemple 6.51**

Calculons  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{(-1)^n}{n} t^n$ , de sorte que  $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ . Il s'agit donc de calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$ .

*Convergence uniforme.* Nous avons vu, en étudiant les modes de convergence, que la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ , mais pas normalement : pour  $t \in [0, 1]$ , la série numérique  $\sum f_n(t)$  est alternée, et le critère des séries alternées donne  $|R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ , d'où  $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ . Notons  $S$  la somme de la série sur  $[0, 1]$ .

*Somme de la série sur  $[0, 1[$ .* Soit  $t \in [0, 1[$ . Pour  $u \in [0, t]$ , la série géométrique  $\sum (-u)^n$  converge, de somme  $\frac{1}{1+u}$ , et elle converge normalement sur  $[0, t]$  puisque  $|(-u)^n| \leq t^n$  avec  $\sum t^n$  convergente. Ses termes sont continus sur  $[0, t]$ . D'après le

théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t (-u)^n du = \int_0^t \frac{du}{1+u} = \ln(1+t).$$

Or  $\int_0^t (-u)^n du = (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$ . Par le changement d'indice  $m = n + 1$ ,

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} t^m = - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} t^m = -S(t).$$

Ainsi  $S(t) = -\ln(1+t)$  pour tout  $t \in [0, 1[$ .

*Somme de la série en 1.* Les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[0, 1]$  et la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  : d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions,  $S$  est continue sur  $[0, 1]$ , donc en 1. Comme  $S(t) = -\ln(1+t)$  pour  $t \in [0, 1[$  et que  $t \mapsto -\ln(1+t)$  est continue en 1, on obtient par passage à la limite  $S(1) = -\ln 2$ , soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Finalement,  $S(t) = -\ln(1+t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

*Intersion.* Les fonctions  $f_n$  sont continues sur le segment  $[0, 1]$  et la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  y converge uniformément. D'après le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment, la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 S(t) dt = - \int_0^1 \ln(1+t) dt.$$

*Calcul de l'intégrale.* Une primitive de  $t \mapsto \ln(1+t)$  sur  $[0, 1]$  est  $t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t$ , comme on le vérifie en dérivant :  $\ln(1+t) + 1 - 1 = \ln(1+t)$ . Donc

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t) - t]_0^1 = 2 \ln 2 - 1,$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2 \ln 2.$$

Ici la convergence uniforme sur  $[0, 1]$  ne pouvait pas être obtenue par la convergence normale, puisque  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$  : c'est le critère des séries alternées qui a permis de majorer le reste.

### 3. Limite et dérivabilité

#### Théorème 6.52 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ ;
- $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ ;
- $(f'_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ ;

alors  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $f' = g$ , c'est-à-dire

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'.$$

### Démonstration

*La limite des dérivées est continue.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , donc  $f_n'$  est continue sur  $I$ . La suite  $(f_n')$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ . D'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions,  $g$  est continue sur  $I$ .

*Écriture intégrale.* Fixons  $a \in I$  et soit  $x \in I$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt.$$

*Passage à la limite.* Supposons d'abord  $x \geq a$ . Le segment  $[a, x]$  est inclus dans  $I$ . Les fonctions  $f_n'$  sont continues sur  $[a, x]$  et la suite  $(f_n')$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ , donc sur  $[a, x]$ . D'après le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,

$$\int_a^x f_n'(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t) dt.$$

Si  $x < a$ , le même raisonnement sur le segment  $[x, a]$  donne  $\int_x^a f_n'(t) dt \rightarrow \int_x^a g(t) dt$ , et la relation  $\int_a^x = -\int_x^a$  fournit la même conclusion. Dans tous les cas,  $\int_a^x f_n'(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt$ . Par ailleurs, la convergence simple de  $(f_n)$  vers  $f$  donne  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  et  $f_n(a) \rightarrow f(a)$ . En passant à la limite dans l'écriture intégrale, par unicité de la limite,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

*Conclusion.* Cette relation vaut pour tout  $x \in I$ . Comme  $g$  est continue sur  $I$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$  est la primitive de  $g$  qui s'annule en  $a$  : elle est de classe  $C^1$  sur  $I$ , de dérivée  $g$ . La fonction  $f$  en diffère d'une constante, donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $f' = g$ .  $\square$

### Remarque

Comme pour la continuité, on peut remplacer l'hypothèse «  $(f_n')$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$  » par «  $(f_n')$  converge uniformément vers  $g$  sur tout segment de  $I$  ». En effet, être de classe  $C^1$  sur  $I$  avec  $f' = g$  est une propriété locale : il suffit de l'établir sur un segment  $[c, d] \subset I$  contenant chaque point  $a \in I$  et tous les points de  $I$  assez proches de  $a$  (voir la remarque analogue sur la continuité). Sur un tel segment, les hypothèses du théorème sont réunies.

En pratique, pour montrer que la limite  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , on vérifie donc que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ ;
- $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ ;
- pour tout segment  $[a, b] \subset I$ ,  $(f_n')$  converge uniformément sur  $[a, b]$ .

On obtient alors  $f' = \lim f_n'$  sur  $I$ .

### Remarque

Le théorème ne demande que la convergence simple de  $(f_n)$  : c'est la convergence des dérivées qui doit être uniforme. La convergence uniforme de  $(f_n)$  sur tout segment

en découle d'ailleurs. En effet, soit  $[a, b] \subset I$ . Avec les notations de la démonstration, pour  $n$  assez grand et pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(a) - f(a) + \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + (b-a) \|f'_n - g\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$  et tend vers 0 :  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

### Exemple 6.53

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto n(x^{1/n} - 1).$$

Montrons que  $(f_n)$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers une fonction de classe  $C^1$  et calculons sa dérivée.

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $x \mapsto x^{1/n}$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , donc  $f_n$  aussi, et pour tout  $x > 0$ ,

$$f'_n(x) = n \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}.$$

*Limite simple.* Soit  $x > 0$ . On a  $f_n(x) = n(e^{u_n} - 1)$  avec  $u_n = \frac{\ln x}{n} \rightarrow 0$ . Si  $x = 1$ , alors  $f_n(1) = 0 = \ln 1$  pour tout  $n$ . Si  $x \neq 1$ , alors  $u_n \neq 0$  et

$$f_n(x) = \ln x \cdot \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln x \cdot 1 = \ln x,$$

car  $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$  quand  $u \rightarrow 0$  (taux d'accroissement de l'exponentielle en 0). La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers  $f = \ln$ .

*Convergence uniforme des dérivées sur tout segment.* La suite  $(f'_n)$  est la suite des fonctions  $t \mapsto \frac{1}{t^{1-1/n}}$  étudiée dans la sous-section « Limite et continuité » : on y a montré qu'elle converge uniformément vers  $g : x \mapsto \frac{1}{x}$  sur tout segment  $[a, b]$  de  $]0, +\infty[$ , sans converger uniformément sur  $]0, +\infty[$  tout entier.

*Conclusion.* Soit  $[a, b]$  un segment de  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $[a, b]$  et la suite  $(f'_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[a, b]$ . D'après le théorème,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et  $f' = g$  sur  $[a, b]$ .

Ainsi  $f$  est de classe  $C^1$  sur tout segment de  $]0, +\infty[$ , avec  $f' = g$ . Par caractère local (voir la remarque ci-dessus),  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et, pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

Ici la limite est connue et le résultat ne l'est pas moins : l'exemple illustre la démarche. L'exemple suivant montre le théorème à l'œuvre lorsque la limite n'est pas connue à l'avance.

**Exemple 6.54**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Montrons que  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  de classe  $C^1$ , puis identifions  $f$ .

*Limite simple.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La suite  $(f_n(x))$  est la suite des sommes partielles de la série numérique  $\sum \frac{x^k}{k!}$ . Si  $x = 0$ , tous les termes sont nuls à partir du rang 1 et la série converge. Si  $x \neq 0$ , posons  $a_k = \frac{|x|^k}{k!} > 0$ ; alors

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

et  $0 < 1$ , donc, par la règle de d'Alembert, la série  $\sum \frac{x^k}{k!}$  converge absolument, donc converge. Dans tous les cas,  $(f_n(x))$  converge. Notons  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$  sa limite : la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .

*Régularité et dérivées.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est polynomiale, donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = f_{n-1}(x).$$

Ainsi  $f'_n = f_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

*Convergence uniforme des dérivées sur tout segment.* Soit  $a > 0$ . Soient  $n \geq 1$  et  $x \in [-a, a]$ . La série  $\sum \frac{x^k}{k!}$  étant absolument convergente, l'inégalité triangulaire s'applique à son reste :

$$|f'_n(x) - f(x)| = |f_{n-1}(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = f(a) - f_{n-1}(a),$$

où l'on a utilisé  $|x| \leq a$ . Ce majorant ne dépend pas de  $x$  :  $f'_n - f$  est bornée sur  $[-a, a]$  et  $\|f'_n - f\|_{\infty, [-a, a]} \leq f(a) - f_{n-1}(a)$ . Or  $f_{n-1}(a) \rightarrow f(a)$  par convergence simple, donc ce majorant tend vers 0 : la suite  $(f'_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

*Application du théorème.* Soit  $a > 0$ . Sur le segment  $[-a, a]$ , les fonctions  $f_n$  sont de classe  $C^1$ , la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  et la suite  $(f'_n)$  converge uniformément vers  $f$ . D'après le théorème,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[-a, a]$  et  $f' = f$  sur  $[-a, a]$ . Tout réel appartient à un tel segment : par caractère local,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = f$ .

*Identification de  $f$ .* Posons  $h: x \mapsto f(x)e^{-x}$ . La fonction  $h$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$h'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x} = 0.$$

Comme  $\mathbb{R}$  est un intervalle,  $h$  est constante, égale à  $h(0) = f(0)$ . Or  $f_n(0) = 1$  pour tout  $n$ , donc  $f(0) = 1$ . Ainsi  $f(x)e^{-x} = 1$  pour tout réel  $x$ , c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Le théorème a permis d'identifier la limite, connue seulement comme somme d'une série, au moyen de l'équation différentielle  $f' = f$ .

**Remarque**

Dans le théorème, l'hypothèse de convergence uniforme porte sur la suite des dérivées  $(f'_n)$ , et non sur  $(f_n)$ . On ne peut pas s'en passer : la convergence uniforme de  $(f_n)$  elle-même, même sur  $\mathbb{R}$  tout entier, ne garantit pas que la limite soit dérivable. L'exemple suivant en donne une illustration, où toutes les hypothèses sont satisfaites sauf celle-là.

**Exemple 6.55**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + \frac{1}{n} > 0$ . Par composition,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}.$$

*Convergence uniforme de  $(f_n)$ .* Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $f_n(x) \rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$ . Posons  $f : x \mapsto |x|$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , par multiplication par la quantité conjuguée,

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$  :  $f_n - f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

*La limite n'est pas dérivable.* Pour  $x \neq 0$ , le taux d'accroissement de  $f$  en 0 vaut  $\frac{|x|}{x}$ , égal à 1 si  $x > 0$  et à  $-1$  si  $x < 0$  : il n'a pas de limite en 0. La fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0, donc pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . La conclusion du théorème est en défaut.

*L'hypothèse manquante.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x > 0$ , alors  $f'_n(x) \rightarrow \frac{x}{|x|} = 1$  ; si  $x < 0$ , alors  $f'_n(x) \rightarrow -1$  ; enfin  $f'_n(0) = 0$  pour tout  $n$ . La suite  $(f'_n)$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $g(0) = 0$  et  $g(x) = -1$  si  $x < 0$ . Les fonctions  $f'_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , mais  $g$  n'est pas continue en 0 : par contraposée du théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions,  $(f'_n)$  ne converge uniformément vers  $g$  sur aucun segment contenant 0. C'est la convergence uniforme des dérivées, et elle seule, qui fait défaut.

Sur tout segment ne contenant pas 0, on peut vérifier que la convergence de  $(f'_n)$  est uniforme : le théorème redonne alors que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $] 0, +\infty[$ , de dérivée  $g$ .

**Théorème 6.56 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  ;
- $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  ;
- $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$  ;

alors la somme  $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ ,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

### Démonstration

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  la somme partielle de rang  $n$  et  $T = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k$  la somme de la série des dérivées. Vérifions que la suite  $(S_n)$  satisfait les hypothèses du théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  est une somme finie de fonctions de classe  $C^1$  sur  $I$ , donc est de classe  $C^1$  sur  $I$ , et par linéarité de la dérivation

$$S'_n = \sum_{k=0}^n f'_k.$$

Ainsi  $S'_n$  est la somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum f'_n$ .

*Convergence simple.* Dire que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $S$ , c'est dire que la suite  $(S_n)$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$ .

*Convergence uniforme des dérivées.* Dire que  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$  vers  $T$ , c'est dire que la suite de ses sommes partielles  $(S'_n)$  converge uniformément vers  $T$  sur  $I$ .

*Conclusion.* D'après le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions,  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $S' = T$ , c'est-à-dire  $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$  pour tout  $x \in I$ .  $\square$

### Exemple 6.57

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

Montrons que  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimons  $S'$ .

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ .

*Convergence simple de  $\sum f_n$ .* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ . Ce majorant ne dépend pas de  $x$ . Donc  $f_n$  est bornée et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^3}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^3}$  est une série de Riemann convergente ( $3 > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ , donc simplement sur  $\mathbb{R}$ .

*Convergence uniforme de  $\sum f'_n$ .* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ . Ce majorant ne dépend pas de  $x$ . Donc  $f'_n$  est bornée et  $\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $2 > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f'_n\|_\infty$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ , donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

*Conclusion.* D'après le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions,  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

**Remarque**

Comme pour les suites, on peut remplacer l'hypothèse «  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$  » par «  $\sum f'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  » : être de classe  $C^1$  avec  $S' = \sum f'_n$  est une propriété locale, et sur tout segment de  $I$  les hypothèses du théorème sont réunies.

C'est le cas le plus fréquent : la série  $\sum f'_n$  converge souvent normalement sur tout segment de  $I$ , sans converger normalement sur  $I$  tout entier. En pratique, pour montrer que la somme  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , on vérifie donc que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  ;
- $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  ;
- pour tout segment  $[a, b] \subset I$ ,  $\sum f'_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

On obtient alors  $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$  sur  $I$ . L'hypothèse de convergence simple de  $\sum f_n$  ne doit pas être oubliée : la convergence de  $\sum f'_n$  ne dit rien, à elle seule, de celle de  $\sum f_n$ .

**Exemple 6.58**

Montrons que la fonction  $\zeta$  définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et calculons sa dérivée. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ .

*Régularité.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $s > 1$ ,  $f_n(s) = n^{-s} = e^{-s \ln n}$ , donc  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et

$$f'_n(s) = -\ln n \cdot e^{-s \ln n} = -\frac{\ln n}{n^s}.$$

*Convergence simple de  $\sum f_n$ .* Pour tout  $s > 1$ , la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^s}$  converge :  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ , de somme  $\zeta$ .

*Convergence normale de  $\sum f'_n$  sur tout segment.* Soient  $1 < a < b$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $s \in [a, b]$ , comme  $\ln n \geq 0$  et  $s \geq a$ ,

$$|f'_n(s)| = \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $s$ . Donc  $f'_n$  est bornée sur  $[a, b]$  et  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\ln n}{n^a}$ .

Étudions la série  $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ . Posons  $c = \frac{a+1}{2}$ , de sorte que  $1 < c < a$ . On a

$$\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-c}} \cdot \frac{1}{n^c} \quad \text{avec} \quad \frac{\ln n}{n^{a-c}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées, puisque  $a - c > 0$ . Ainsi  $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^c}$  est une série de Riemann convergente ( $c > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \frac{\ln n}{n^a}$  converge, puis  $\sum \|f'_n\|_{\infty, [a, b]}$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ , donc uniformément sur  $[a, b]$ .

*Conclusion.* Soit  $[a, b]$  un segment de  $]1, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . La série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[a, b]$  et la série  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$ . D'après le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions,  $\zeta$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et  $\zeta' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$  sur  $[a, b]$ .

Ainsi  $\zeta$  est de classe  $C^1$  sur tout segment de  $]1, +\infty[$ . Par caractère local,  $\zeta$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et, pour tout  $s > 1$ ,

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

Tous les termes de cette somme sont négatifs ou nuls, et celui d'indice  $n = 2$  est strictement négatif :  $\zeta'(s) < 0$  pour tout  $s > 1$ , donc  $\zeta$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

### Remarque

Bien qu'en général on vérifie la convergence normale de  $\sum f'_n$ , c'est parfois impossible : la série des dérivées peut converger uniformément sans converger normalement. Dans le cas des séries alternées en particulier, on étudie directement la convergence uniforme en majorant le reste grâce au critère des séries alternées, comme dans l'exemple suivant.

### Exemple 6.59

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right).$$

Montrons que  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ , et exprimons  $S'$ .

*Régularité.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $1 + \frac{x}{n} > 0$ , donc  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$  et

$$f'_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{(-1)^n}{n + x}.$$

*Convergence simple de  $\sum f_n$ .* Soit  $x \geq 0$ . Posons  $a_n = \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \geq 0$ , de sorte que  $f_n(x) = (-1)^n a_n$ . La suite  $\left( \frac{x}{n} \right)$  est décroissante et tend vers 0 ; par croissance et continuité du logarithme,  $(a_n)$  est décroissante et tend vers  $\ln 1 = 0$ . D'après le critère des séries alternées, la série  $\sum f_n(x)$  converge. Ainsi  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  et  $S$  est bien définie.

*Convergence uniforme de  $\sum f'_n$ .* Soit  $x \geq 0$ . Posons  $b_n = \frac{1}{n+x} > 0$ , de sorte que  $f'_n(x) = (-1)^n b_n$ . La suite  $(b_n)$  est décroissante et tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, la série  $\sum f'_n(x)$  converge et son reste  $\rho_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)$  vérifie

$$|\rho_n(x)| \leq b_{n+1} = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$  :  $\rho_n$  est borné sur  $[0, +\infty[$  et  $0 \leq \|\rho_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$ . Par encadrement,  $\|\rho_n\|_\infty \rightarrow 0$  : la série  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

*La convergence de  $\sum f'_n$  n'est pas normale.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $|f'_n(x)| = \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$ , avec égalité en  $x = 0$ , donc  $\|f'_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ . La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge :  $\sum f'_n$  ne converge pas normalement sur  $[0, +\infty[$ , ni d'ailleurs sur aucun segment  $[0, b]$ , puisque la borne est atteinte en 0.

*Conclusion.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ . La série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  et la série  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ . D'après le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions,  $S$  est de classe  $C^1$ .

sur  $[0, +\infty[$  et, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

### Remarque

L'hypothèse de convergence uniforme de  $\sum f'_n$  ne peut pas être remplacée par sa convergence simple, même lorsque  $\sum f_n$  converge normalement et que sa somme est de classe  $C^1$ . L'exemple suivant montre une somme  $S$  de classe  $C^1$  pour laquelle la formule  $S' = \sum f'_n$  est en défaut en un point.

### Exemple 6.60

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{n}.$$

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est polynomiale, donc de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f'_n(x) = x^n - x^{n-1}$ .

*Somme de la série.* Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ . Par télescopage,

$$\sum_{n=1}^N f_n(x) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{n} \right) = \frac{x^{N+1}}{N+1} - x.$$

Comme  $0 \leq \frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}$ , ce majorant ne dépendant pas de  $x$ , la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $S: x \mapsto -x$ . La somme  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , avec  $S'(x) = -1$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

*Série des dérivées.* Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ . Par télescopage,

$$\sum_{n=1}^N f'_n(x) = \sum_{n=1}^N (x^n - x^{n-1}) = x^N - 1.$$

Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $x^N \rightarrow 0$  et cette somme tend vers  $-1$ ; si  $x = 1$ , elle vaut  $0$  pour tout  $N$ . La série  $\sum f'_n$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$ , vers la fonction  $T$  définie par  $T(x) = -1$  si  $x \in [0, 1[$  et  $T(1) = 0$ .

*La convergence n'est pas uniforme.* Les sommes partielles  $x \mapsto x^N - 1$  sont continues sur  $[0, 1]$ , mais  $T$  n'est pas continue en  $1$ . Par contraposée du théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions,  $\sum f'_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

*La conclusion est en défaut.* On a  $S'(1) = -1$  alors que  $T(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(1) = 0$ : la formule  $S' = \sum_{n \geq 1} f'_n$  est fausse au point  $1$ . Elle est en revanche vraie sur  $[0, 1[$ , conformément au théorème: sur tout segment  $[0, b]$  avec  $b < 1$ , on a  $|x^N| \leq b^N \rightarrow 0$  pour  $x \in [0, b]$ , donc  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[0, b]$  vers  $-1$ , et le théorème redonne  $S' = -1$  sur  $[0, b]$ .

**Théorème 6.61 (Régularité  $C^k$  de la limite d'une suite de fonctions)**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et soient  $g_0, \dots, g_k$  des fonctions définies sur  $I$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ ;
- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la suite  $(f_n^{(j)})$  converge simplement vers  $g_j$  sur  $I$ ;
- la suite  $(f_n^{(k)})$  converge uniformément vers  $g_k$  sur  $I$ ;

alors la limite  $f = g_0$  de la suite  $(f_n)$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et, pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,

$$f^{(j)} = g_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}.$$

**Démonstration**

Raisonnons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ , en montrant la propriété  $\mathcal{P}(k)$  : « pour tout intervalle  $I$  et toute suite  $(f_n)$  vérifiant les hypothèses du théorème à l'ordre  $k$  sur  $I$ , la fonction  $g_0$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et  $g_0^{(j)} = g_j$  pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$  ».

*Initialisation.* Pour  $k = 1$ , les hypothèses sont :  $f_n$  de classe  $C^1$ ,  $(f_n)$  converge simplement vers  $g_0$  et  $(f_n')$  converge uniformément vers  $g_1$ . C'est exactement le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :  $g_0$  est de classe  $C^1$  et  $g_0' = g_1$ . Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

*Hérédité.* Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\mathcal{P}(k)$  est vraie. Soit  $(f_n)$  une suite vérifiant les hypothèses à l'ordre  $k+1$  sur un intervalle  $I$  : les  $f_n$  sont de classe  $C^{k+1}$ ,  $(f_n^{(j)})$  converge simplement vers  $g_j$  pour  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$  et  $(f_n^{(k+1)})$  converge uniformément vers  $g_{k+1}$ .

*Étape 1 : la dérivée d'ordre  $k$ .* Considérons la suite  $(f_n^{(k)})$ . Pour tout  $n$ ,  $f_n^{(k)}$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , de dérivée  $f_n^{(k+1)}$ . La suite  $(f_n^{(k)})$  converge simplement vers  $g_k$  et la suite des dérivées  $(f_n^{(k+1)})$  converge uniformément vers  $g_{k+1}$  sur  $I$ . D'après le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions,  $g_k$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $g_k' = g_{k+1}$ . De plus, d'après la remarque qui suit ce théorème, la suite  $(f_n^{(k)})$  converge uniformément vers  $g_k$  sur tout segment de  $I$ .

*Étape 2 : ordre  $k$  sur tout segment.* Soit  $[c, d]$  un segment de  $I$ . Sur  $[c, d]$ , les  $f_n$  sont de classe  $C^k$ , les suites  $(f_n^{(j)})$  convergent simplement vers  $g_j$  pour  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , et la suite  $(f_n^{(k)})$  converge uniformément vers  $g_k$  d'après l'étape 1. D'après  $\mathcal{P}(k)$  appliquée sur l'intervalle  $[c, d]$ , la fonction  $g_0$  est de classe  $C^k$  sur  $[c, d]$  et  $g_0^{(j)} = g_j$  sur  $[c, d]$  pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ .

*Étape 3 : conclusion.* Tout point de  $I$  appartient à un segment  $[c, d] \subset I$  contenant tous les points de  $I$  assez proches de lui. Par caractère local,  $g_0$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et  $g_0^{(j)} = g_j$  sur  $I$  pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . En particulier  $g_0^{(k)} = g_k$ , qui est de classe  $C^1$  sur  $I$  de dérivée  $g_{k+1}$  d'après l'étape 1. Ainsi  $g_0$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $I$  et  $g_0^{(k+1)} = g_{k+1}$  :  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

Par principe de récurrence,  $\mathcal{P}(k)$  est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . □

**Exemple 6.62**

Reprenons la suite de fonctions de l'exemple de dérivabilité : pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto n(x^{1/n} - 1).$$

Nous avons montré que  $(f_n)$  converge simplement vers  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ , que  $f_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1}$  et que  $(f_n')$  converge simplement vers  $g_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ . Montrons que le théorème redonne le caractère  $C^2$  de  $\ln$  et sa dérivée seconde.

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et, pour tout  $x > 0$ ,

$$f_n''(x) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) x^{\frac{1}{n}-2}.$$

*Limite simple des dérivées secondes.* Soit  $x > 0$ . Comme  $x^{1/n} \rightarrow 1$ , on a  $f_n''(x) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{x^{1/n}}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$ . Posons  $g_2: x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ .

*Convergence uniforme des dérivées secondes sur tout segment.* Soient  $0 < a < b$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$f_n''(x) - g_2(x) = \frac{1}{x^2} \left( \left( \frac{1}{n} - 1 \right) x^{1/n} + 1 \right) = \frac{1}{x^2} \left( 1 - x^{1/n} + \frac{x^{1/n}}{n} \right).$$

Comme dans l'exemple de continuité, la croissance de  $t \mapsto t^{1/n}$  donne  $|1 - x^{1/n}| \leq M_n$  avec  $M_n = \max(1 - a^{1/n}, b^{1/n} - 1) \rightarrow 0$ , et  $0 < x^{1/n} \leq \max(1, b)$ . Comme de plus  $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{a^2}$ , on obtient, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|f_n''(x) - g_2(x)| \leq \frac{1}{a^2} \left( M_n + \frac{\max(1, b)}{n} \right).$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$  :  $f_n'' - g_2$  est bornée sur  $[a, b]$  et  $\|f_n'' - g_2\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{a^2} \left( M_n + \frac{\max(1, b)}{n} \right) \rightarrow 0$ . La suite  $(f_n'')$  converge uniformément vers  $g_2$  sur  $[a, b]$ .

*Conclusion.* Soit  $[a, b]$  un segment de  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ . Les suites  $(f_n)$  et  $(f_n')$  convergent simplement sur  $[a, b]$ , vers  $\ln$  et  $g_1$ , et la suite  $(f_n'')$  converge uniformément vers  $g_2$  sur  $[a, b]$ . D'après le théorème,  $\ln$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ , avec  $\ln' = g_1$  et  $\ln'' = g_2$  sur  $[a, b]$ .

Ainsi  $\ln$  est de classe  $C^2$  sur tout segment de  $]0, +\infty[$ . Par caractère local,  $\ln$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et, pour tout  $x > 0$ ,  $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

### Théorème 6.63 (Régularité $C^k$ de la somme d'une série de fonctions)

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  ;
- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la série  $\sum f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$  ;
- la série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur  $I$  ;

alors la somme  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et, pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$  et tout  $x \in I$ ,

$$S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x).$$

#### Démonstration

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $S_n = \sum_{i=0}^n f_i$  la somme partielle de rang  $n$  et, pour  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , notons  $T_j = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i^{(j)}$  la somme de la série  $\sum f_n^{(j)}$ , de sorte que  $T_0 = S$ . Vérifions que la suite  $(S_n)$  satisfait les hypothèses du théorème de régularité  $C^k$  de la limite d'une suite de fonctions.

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  est une somme finie de fonctions de classe  $C^k$  sur  $I$ , donc est de classe  $C^k$  sur  $I$ , et par linéarité de la dérivation, pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,

$$S_n^{(j)} = \sum_{i=0}^n f_i^{(j)}.$$

Ainsi  $S_n^{(j)}$  est la somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum f_n^{(j)}$ .

*Convergences.* Pour  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la série  $\sum f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$  : la suite de

ses sommes partielles  $(S_n^{(j)})$  converge simplement vers  $T_j$  sur  $I$ . La série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur  $I$  : la suite  $(S_n^{(k)})$  converge uniformément vers  $T_k$  sur  $I$ .  
*Conclusion.* D'après le théorème de régularité  $C^k$  de la limite d'une suite de fonctions, la limite  $S = T_0$  de  $(S_n)$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et  $S^{(j)} = T_j$  pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , c'est-à-dire  $S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$  pour tout  $x \in I$ .  $\square$

### Exemple 6.64

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{n^2}.$$

Montrons que  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est de classe  $C^2$  sur  $]-1, 1[$  et exprimons  $S'$  et  $S''$ .

*Régularité.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est polynomiale, donc de classe  $C^2$  sur  $]-1, 1[$ , et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}, \quad f''_n(x) = \frac{(n-1)x^{n-2}}{n} \quad (n \geq 2), \quad f''_1(x) = 0.$$

*Convergence simple de  $\sum f_n$  et de  $\sum f'_n$ .* Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n(x)| \leq |x|^n$  et  $|f'_n(x)| \leq |x|^{n-1}$ . Or la série géométrique  $\sum |x|^n$  converge puisque  $|x| < 1$ . Par critère de comparaison des séries à termes positifs, les séries  $\sum f_n(x)$  et  $\sum f'_n(x)$  convergent absolument, donc convergent. Ainsi  $\sum f_n$  et  $\sum f'_n$  convergent simplement sur  $]-1, 1[$ .

*Convergence normale de  $\sum f''_n$  sur tout segment.* Soit  $b \in [0, 1[$  et considérons le segment  $[-b, b]$ . Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $x \in [-b, b]$ , comme  $0 < \frac{n-1}{n} < 1$ ,

$$|f''_n(x)| = \frac{n-1}{n} |x|^{n-2} \leq b^{n-2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$ . Donc  $f''_n$  est bornée sur  $[-b, b]$  et  $\|f''_n\|_{\infty, [-b, b]} \leq b^{n-2}$ . Or la série  $\sum_{n \geq 2} b^{n-2}$  est une série géométrique convergente ( $0 \leq b < 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \|f''_n\|_{\infty, [-b, b]}$  converge. Donc  $\sum f''_n$  converge normalement sur  $[-b, b]$ , donc uniformément sur  $[-b, b]$ .

*Conclusion.* Soit  $[-b, b]$  un segment de  $]-1, 1[$  avec  $b \in [0, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^2$  sur  $[-b, b]$ . Les séries  $\sum f_n$  et  $\sum f'_n$  convergent simplement sur  $[-b, b]$  et la série  $\sum f''_n$  converge uniformément sur  $[-b, b]$ . D'après le théorème,  $S$  est de classe  $C^2$  sur  $[-b, b]$ , avec  $S' = \sum_{n \geq 1} f'_n$  et  $S'' = \sum_{n \geq 1} f''_n$  sur  $[-b, b]$ .

Tout segment de  $]-1, 1[$  est inclus dans un segment de la forme  $[-b, b]$  avec  $b \in [0, 1[$ . Par caractère local,  $S$  est de classe  $C^2$  sur  $]-1, 1[$  et, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n}.$$

Remarquons que la série  $\sum f'_n$  diverge en  $x = 1$  (série harmonique) et que la série  $\sum f''_n$  ne converge pas normalement sur  $]-1, 1[$ , puisque  $\|f''_n\|_{\infty} = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1$  : le passage par les segments  $[-b, b]$  est indispensable.

### Remarque

Les remarques faites pour la classe  $C^1$  s'appliquent : la convergence uniforme de la suite  $(f_n^{(k)})$ , ou de la série  $\sum f_n^{(k)}$ , des dérivées  $k$ -ièmes n'est pas optionnelle, et on

la vérifie le plus souvent sur tout segment ; en revanche, on n'a pas à la vérifier pour les dérivées d'ordre inférieur, dont la convergence simple suffit. Pour les séries, on établit en général la convergence normale de  $\sum f_n^{(k)}$ , mais il faut parfois revenir à la convergence uniforme, par exemple pour une série alternée.

#### Méthode 6.65 (Montrer une régularité $C^\infty$ )

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ , convergeant simplement vers  $f$  sur  $I$ , ou  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $I$ , de somme  $S$ . Pour montrer que  $f$ , ou  $S$ , est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  :

1. **Régularité des termes.** On vérifie que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ , et on calcule ses dérivées successives  $f_n^{(k)}$ , en général par une formule valable pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
2. **Convergence uniforme de toutes les dérivées sur tout segment.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  et soit  $[a, b]$  un segment de  $I$ .
  - Pour une suite, on détermine la limite simple  $g_k$  de  $(f_n^{(k)})$  sur  $I$ , puis on montre que  $(f_n^{(k)})$  converge uniformément vers  $g_k$  sur  $[a, b]$ , par une majoration de  $|f_n^{(k)}(x) - g_k(x)|$  indépendante de  $x \in [a, b]$ .
  - Pour une série, on montre que  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  ; en pratique, on établit sa convergence normale sur  $[a, b]$ , par une majoration de  $|f_n^{(k)}(x)|$  indépendante de  $x \in [a, b]$ . Le cas  $k = 0$  fournit la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $I$ .
3. **Conclusion.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et soit  $[a, b]$  un segment de  $I$ . Les  $f_n$  sont de classe  $C^k$  sur  $[a, b]$  ; pour  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , les dérivées  $j$ -ièmes convergent uniformément, donc simplement, sur  $[a, b]$  ; les dérivées  $k$ -ièmes convergent uniformément sur  $[a, b]$ . D'après le théorème de régularité  $C^k$  de la limite d'une suite, ou de la somme d'une série, de fonctions,  $f$ , ou  $S$ , est de classe  $C^k$  sur  $[a, b]$ , de dérivée  $k$ -ième  $g_k$ , ou  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ , sur  $[a, b]$ . Par caractère local,  $f$ , ou  $S$ , est de classe  $C^k$  sur  $I$ . Ceci valant pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$ , ou  $S$ , est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in I$ ,

$$f^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x) \quad \text{ou} \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

#### Exemple 6.66

Montrons que la fonction  $\zeta$  définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et exprimons ses dérivées successives. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{1}{n^s}$ .

**Régularité des termes.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $s > 1$ ,  $f_n(s) = e^{-s \ln n}$ . La fonction  $f_n$  est donc de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et, en dérivant  $k$  fois l'exponentielle d'une fonction

affine, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $s > 1$ ,

$$f_n^{(k)}(s) = (-\ln n)^k e^{-s \ln n} = (-1)^k \frac{(\ln n)^k}{n^s}.$$

*Convergence normale de  $\sum f_n^{(k)}$  sur tout segment.* Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 < a < b$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $s \in [a, b]$ , comme  $\ln n \geq 0$  et  $s \geq a$ ,

$$\left| f_n^{(k)}(s) \right| = \frac{(\ln n)^k}{n^s} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $s$ . Donc  $f_n^{(k)}$  est bornée sur  $[a, b]$  et  $\left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ . Posons  $c = \frac{a+1}{2}$ , de sorte que  $1 < c < a$ . On a

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} = \frac{(\ln n)^k}{n^{a-c}} \cdot \frac{1}{n^c} \quad \text{avec} \quad \frac{(\ln n)^k}{n^{a-c}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées, puisque  $a - c > 0$ . Ainsi  $\frac{(\ln n)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ . Or la série  $\sum \frac{1}{n^c}$  est une série de Riemann convergente ( $c > 1$ ). Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$  converge, puis  $\sum \left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]}$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$  converge normalement sur  $[a, b]$ , donc uniformément sur  $[a, b]$ .

*Conclusion.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $]1, +\infty[$ . D'après la méthode ci-dessus,  $\zeta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $s > 1$ ,

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^s}.$$

En particulier  $\zeta^{(k)}$  est du signe de  $(-1)^k$  :  $\zeta$  est décroissante et convexe sur  $]1, +\infty[$ .

#### Remarque

Pour la classe  $C^k$  avec  $k$  fixé, seule la série des dérivées  $k$ -ièmes devait converger uniformément, la convergence simple suffisant pour les ordres inférieurs. Pour la classe  $C^\infty$ , on a besoin cette fois de la convergence uniforme, sur tout segment, de toutes les séries dérivées  $\sum f_n^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  : chaque ordre  $k$  est en effet l'ordre maximal lorsqu'on applique le théorème de régularité  $C^k$ . En pratique, on ne traite donc pas les ordres  $k = 1, k = 2$ , etc. l'un après l'autre : on fixe un entier  $k \in \mathbb{N}$  quelconque et on mène l'étude de la convergence uniforme de  $\sum f_n^{(k)}$  avec ce  $k$  générique, comme dans l'exemple précédent, ce qui règle tous les ordres à la fois.

#### Remarque

On peut assouplir cette exigence : il suffit qu'il existe un rang  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  pour tout  $k \geq k_0$ , et que  $\sum f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$  pour  $j \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket$ . En effet, pour  $k \geq k_0$ , le théorème de régularité  $C^k$  s'applique sur tout segment : les séries  $\sum f_n^{(j)}$  pour  $j < k$  convergent simplement, par hypothèse si  $j < k_0$  et comme conséquence de la convergence uniforme si  $k_0 \leq j < k$ . La somme  $S$  est donc de classe  $C^k$  pour tout  $k \geq k_0$ ,

c'est-à-dire de classe  $C^\infty$  sur  $I$ .

#### 4. Bilan

Le tableau suivant récapitule les théorèmes de cette section. Les fonctions  $f_n$  sont définies sur un intervalle  $I$ ; pour les suites,  $f$  désigne la limite simple de  $(f_n)$ , et pour les séries,  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  désigne la somme. Toutes les convergences sont entendues sur  $I$ , sauf pour l'intégration, où elles le sont sur le segment  $[a, b]$ .

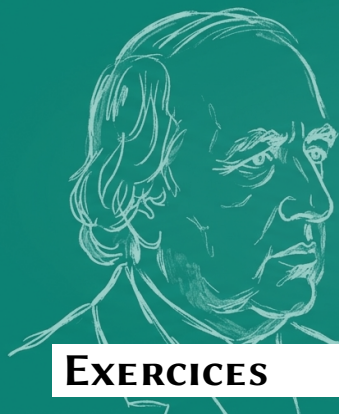
| Théorème                   | Régularité des $f_n$            | Convergence                                                      | Conclusion                                                                          |
|----------------------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Suites de fonctions</i> |                                 |                                                                  |                                                                                     |
| Continuité                 | continues                       | $(f_n)$ uniforme                                                 | $f$ continue                                                                        |
| Intégration sur $[a, b]$   | continues sur $[a, b]$          | $(f_n)$ uniforme sur $[a, b]$                                    | $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$                                               |
| Dérivabilité               | de classe $C^1$                 | $(f_n)$ simple, $(f'_n)$ uniforme                                | $f$ de classe $C^1$ ,<br>$f' = \lim f'_n$                                           |
| Régularité $C^k$           | de classe $C^k$                 | $(f_n^{(j)})$ simple pour $j < k$ , $(f_n^{(k)})$ uniforme       | $f$ de classe $C^k$ ,<br>$f^{(j)} = \lim f_n^{(j)}$ pour $j \leq k$                 |
| <i>Séries de fonctions</i> |                                 |                                                                  |                                                                                     |
| Continuité                 | continues                       | $\sum f_n$ uniforme                                              | $S$ continue                                                                        |
| Double limite              | $f_n \rightarrow \ell_n$ en $a$ | $\sum f_n$ uniforme                                              | $\sum \ell_n$ converge,<br>$S \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ en $a$       |
| Intégration sur $[a, b]$   | continues sur $[a, b]$          | $\sum f_n$ uniforme sur $[a, b]$                                 | $\sum \int_a^b f_n$ converge,<br>$\int_a^b S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$   |
| Dérivation                 | de classe $C^1$                 | $\sum f_n$ simple, $\sum f'_n$ uniforme                          | $S$ de classe $C^1$ ,<br>$S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$                           |
| Régularité $C^k$           | de classe $C^k$                 | $\sum f_n^{(j)}$ simple pour $j < k$ , $\sum f_n^{(k)}$ uniforme | $S$ de classe $C^k$ ,<br>$S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$ pour $j \leq k$ |

##### Remarque

La continuité et la classe  $C^k$  sont des propriétés locales. Pour ces théorèmes, il suffit donc de vérifier la convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , et non sur  $I$  tout entier : la conclusion reste valable sur  $I$ . Ce n'est pas le cas du théorème de la double limite, où le point  $a$  est en général une extrémité de  $I$  que les segments de  $I$  n'atteignent pas : la convergence uniforme doit y être vérifiée sur  $I$  ou sur un intervalle adapté ayant  $a$  pour extrémité. Pour l'intégration, le segment  $[a, b]$  est imposé par l'intégrale.

##### Remarque

Pour les séries, la convergence uniforme demandée s'obtient le plus souvent par la convergence normale. Dans les théorèmes de dérivation et de régularité  $C^k$ , elle ne porte que sur la série des dérivées d'ordre le plus élevé ; la convergence simple suffit pour la série elle-même et pour les dérivées d'ordre inférieur.



## EXERCICES

**Exercice 6.1** ○ \_\_\_\_\_ Correction p. 56

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1.  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$  sur  $\mathbb{R}$
2.  $\ell_n(x) = \sin\left(\frac{n}{n+1}x\right)$  sur  $[0, 2\pi]$ .
3.  $\psi_n(x) = \sin(x)e^{-nx}$  sur  $\mathbb{R}^+$

**Exercice 6.2** ○ \_\_\_\_\_ Correction p. 59

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1.  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  sur  $\mathbb{R}$ , puis sur  $[-1, 1]$  ;
2.  $g_n(x) = x^n(1-x)$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.3** ○ \_\_\_\_\_ Correction p. 59

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $h_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ .

1. Montrer que la suite  $(h_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  et déterminer sa limite  $h$ .
2. La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  ?
3. Soit  $a > 0$ . Montrer que  $(h_n)$  converge uniformément vers  $h$  sur  $[a, +\infty[$ .

**Exercice 6.4** ○ \_\_\_\_\_ Correction p. 60

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .
2. La suite  $(f'_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}$  ?
3. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 6.5** ○ \_\_\_\_\_ Correction p. 60

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ .

1. Déterminer la limite simple  $f$  de la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  sur  $[0, 1]$ .
2. Montrer que  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $x \in [0, 1]$ , et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .
3. Retrouver ce résultat par un calcul direct de  $\int_0^1 f_n(x) dx$ .

**Exercice 6.6** ● \_\_\_\_\_ Correction p. 61

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse, en la démontrant ou en donnant un contre-exemple. Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles.

1. Si  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$ , alors  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$ .

2. Si  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  et si toutes les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .
3. Si  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$  et si toutes les fonctions  $f_n$  sont bornées sur  $I$ , alors  $f$  est bornée sur  $I$ .
4. Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$ , alors  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
5. Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , si toutes les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $I$  et si  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $I$  qui converge vers  $x \in I$ , alors  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ .
6. Si  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , alors pour tout  $x \in I$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  converge absolument.
7. Si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ .
8. Si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  et si  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ , alors  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

**Exercice 6.7** ●● \_\_\_\_\_ Correction p. 62

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1.  $g_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$  sur  $\mathbb{R}_+$  ou  $\mathbb{R}_+^*$
2.  $\phi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x\sqrt{n}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$
3.  $k_n(x) = 3^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$  sur  $[0, 1]$

**Exercice 6.8** ○ \_\_\_\_\_ Correction p. 64

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ .
2. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et que sa somme  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ .

**Exercice 6.9** ● \_\_\_\_\_ Correction p. 65

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ , et on note  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

1. Montrer que  $S$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $S$  est paire et  $2\pi$ -périodique. Calculer  $S(0)$ , sachant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .
3. Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . Montrer que  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{1}{n}$  pour  $n$  assez grand. Le théorème de dérivation terme à terme permet-il de conclure que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 6.10** ●● \_\_\_\_\_ Correction p. 65

Similaire à un exo CCP 2017.

On pose  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ .

1. Montrer la convergence simple de cette série de fonctions.
2. Converge-t-elle normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  ?

3. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$  (pensez au critère des séries alternées). Qu'en déduire ?
4. Montrer que  $S$  est de classe  $C^1$ .
5. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$ .
6. Donner un équivalent de  $S$  en 0 puis en  $+\infty$  (on pourra commencer par justifier que  $S$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ).

**Exercice 6.11** ●●● \_\_\_\_\_ Correction p. 69

On définit par récurrence sur  $I = [0, \frac{1}{2}]$  une suite de fonctions en posant  $f_0 = 0$  et pour  $n \geq 0$ ,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t) dt \quad (\star)$$

1. Prouver que  $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$  pour tout  $x$  de  $I$ .
2. Prouver que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ .
3. Qu'en déduire concernant la série de fonctions  $\sum (f_{n+1} - f_n)$  ? On note  $f$  la somme de cette série de fonctions, prouver que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$ .
4. Prouver que  $f$  est une solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $y' = x^2 + y^2$  satisfaisant à  $f(0) = 0$  (On pourra commencer par prouver que  $(f_n^2)$  converge uniformément vers  $f^2$ , puis passer à la limite dans  $(\star)$ ).

**Exercice 6.12** ● \_\_\_\_\_ Correction p. 71

CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2.

La série de fonctions de terme général  $u_n : x \mapsto (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{x}{n(1+x)} \right)$  converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}_+$  ? Normalement sur  $\mathbb{R}_+$  ?

**Exercice 6.13** ●●● \_\_\_\_\_ Correction p. 73

CCP 2009 Officiel de la Taupe.

Soit  $f \in C^0([a, b])$  ; on pose  $f_0(x) = f(x)$  et  $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ .

1. Montrer que  $f_n$  est de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \|f\|_\infty$ .
2. On pose  $g_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$ . Montrer que  $g_0$  est  $C^0$  sur  $[a, b]$ , que  $g_1$  est  $C^1$  sur  $[a, b]$ , puis que  $g_n$  est  $C^n$  sur  $[a, b]$ .
3. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 dont  $g_n$  est solution pour  $n \geq 1$ . En déduire que pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$g_0(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt.$$

**Exercice 6.14** ●● \_\_\_\_\_ Correction p. 75

adapté de CCP 2016 PC.

1. Étudier les variations de  $t \mapsto g_x(t) = t + \frac{x-t^2}{2}$ , pour  $x$  et  $t \in [0, 1]$ .
2. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = g_x(u_n)$ . Montrer que  $u_n \in [0, 1]$  pour tout entier  $n$ .
3. Montrer que  $(u_n)$  est croissante et converge vers une limite à déterminer.

4. Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions définie par  $P_0 = 0$  et  $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Montrer que  $P_n$  est un polynôme pour tout entier  $n$ .
5. Montrer par récurrence sur  $n$  l'inégalité  $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
6. En déduire que la suite  $(P_n)$  converge uniformément vers  $\sqrt{\cdot}$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.15** • Correction p. 78

*Oral Mines-Telecom 2016.*

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x$  réel, on pose  $u_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$ .

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ .
2. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme.

**Exercice 6.16** • Correction p. 82

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  définie par :  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ .

1. Montrer que la série converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa somme.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de  $]0, +\infty[$ .
3. La convergence est-elle normale sur  $[0, +\infty[$  ?
4. Montrer que la convergence est normale sur tout intervalle du type  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

**Exercice 6.17** • Correction p. 86

Montrer que la série de fonctions définie sur  $[0, \pi]$  par  $\sum_{n \geq 0} \sin(x) \cos^n(x)$  est simplement convergente sur  $[0, \pi]$ . Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur  $[0, \pi]$ , puis sur tout segment de  $]0, \pi[$ .

**Exercice 6.18** • Correction p. 88

Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[0, 1[$ , où  $f_n : x \in [0, 1[ \mapsto \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)}$ .

**Exercice 6.19** • Correction p. 88

On définit :  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4. Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puis sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Exercice 6.20** •• Correction p. 90

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$ , où pour

tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n}$ .

On notera  $f$  sa somme.

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur son ensemble de définition.

4. Montrer que  $f$  est convexe.
5. Calculer  $f$ . *indication : on pourra commencer par calculer  $f'$ .*

**Exercice 6.21** ●● \_\_\_\_\_ Correction p. 92

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  puis en donner un équivalent.
4. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $0^+$  (*faire une comparaison série/intégrale puis montrer que  $\frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}$ .*)

**Exercice 6.22** ● \_\_\_\_\_ Correction p. 95

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^x e^{-nx}$ .
2. Montrer que  $S$  est continue sur son ensemble de définition.
3. Quelle est la limite de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 6.23** ●● \_\_\_\_\_ Correction p. 97

Soit  $f : x \mapsto \ln(1 + \frac{1}{2}e^{-x})$ .

1. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , puis écrire  $f'$  sous forme de la somme d'une série de fonctions sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Justifier que pour tout  $x$ ,  $f(x) = \ln(3) - \ln(2) + \int_0^x f'(t) dt$ . En déduire une expression de  $f$  sous forme de la somme d'une série de fonctions sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. À l'aide d'une majoration, montrer que  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . En déduire que  $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p2^p} e^{-px}$  pour tout  $x \geq 0$ .

**Exercice 6.24** ● \_\_\_\_\_ Correction p. 99

Montrer que  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 6.25** ● \_\_\_\_\_ Correction p. 100

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x})$ . Justifier que  $f$  est bien définie, puis calculer  $\int_0^1 f(t) dt$ .

**Exercice 6.26** ●●● \_\_\_\_\_ Correction p. 101

Montrer que  $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ .

**Exercice 6.27** ●● \_\_\_\_\_ Correction p. 103

Type CCINP.

Soit  $u_n(t) = \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1}$ , et  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$  si convergence.

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Donner les variations de  $u'_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  et en déduire  $\|u'_n\|_\infty$ .
3. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
4. Donner les variations de  $f$  et l'allure de la courbe ; on prendra  $f(0) \approx 2,07$  à  $10^{-2}$  près.
5. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ .
6. Montrer que  $\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1}$  est une approximation à  $10^{-2}$  près de  $f(0)$ .

**Exercice 6.28** ○ \_\_\_\_\_ [Correction p. 107](#)

Type CCINP.

Soit  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+n^3x^2}$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^*$ .

Y a-t-il convergence normale sur  $\mathbb{R}_+^*$  ? Montrer que la fonction  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 6.29** ●● \_\_\_\_\_ [Correction p. 107](#)

Soit  $S$  la fonction définie par :  $t \mapsto S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + e^{-nt})$ .

1. Donner l'ensemble de définition.
2. Donner le sens de variation de  $S$ .
3. Donner la limite de  $S$  en  $+\infty$ .
4. Donner un équivalent de  $S$  en 0 (on pourra faire une comparaison série/intégrale).

**Exercice 6.30** ●●● \_\_\_\_\_ [Correction p. 111](#)

Soit  $r$  un réel élément de  $[0, 1[$  fixé.

1. Prouver que pour  $x$  réel élément de  $] -1, 1[$ , la série  $\sum \frac{x^n}{n}$  est convergente, et peut être dérivée terme à terme. En déduire la valeur de sa somme.
2. Prouver la convergence de la série de fonctions (de la variable  $\theta$ )  $\sum r^n \sin(n\theta)$ , et calculer sa somme.
3. Prouver de même la convergence de la série  $\sum r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$ . Calculer la somme de cette série.
4. Calculer l'intégrale  $\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos(\theta) + r^2) d\theta$ .
5. Prouver que pour  $|r| > 1$ , l'intégrale envisagée à la question précédente converge, et la calculer.

**Exercice 6.31** ●●● \_\_\_\_\_ [Correction p. 115](#)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , à valeurs réelles. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$g_n : x \in [0, 1] \mapsto f(x^n) \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la suite  $(g_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  et déterminer sa limite  $g$ .
2. Montrer que la suite  $(g_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  si et seulement si  $f$  est constante.
3. Soit  $a \in ]0, 1[$ . Montrer que la suite  $(g_n)$  converge uniformément sur  $[0, a]$ .
4. En déduire que

$$\int_0^1 f(x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

5. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .

**Exercice 6.32** • • • Correction p. 116

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-n^2 x} \in \mathbb{R}$ . On note  $D$  l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels la série numérique  $\sum f_n(x)$  converge et, pour  $x \in D$ ,  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ . On admet que

$$\int_0^A e^{-u^2} du \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Déterminer  $D$ .
2. Montrer que  $S$  est continue sur  $D$ .
3. Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ , puis un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .
4. Soient  $x > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\int_1^{N+1} e^{-t^2 x} dt \leq \sum_{n=1}^N e^{-n^2 x} \leq \int_0^N e^{-t^2 x} dt.$$

5. En déduire que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - 1 \leq S(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}},$$

puis donner un équivalent de  $S$  en  $0^+$ .

**Exercice 6.33** • • • Correction p. 118

On rappelle que la fonction  $\zeta$ , définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

est continue sur  $]1, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$g_n : s \in ]0, +\infty[ \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que  $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$ , puis que  $\zeta(s) - 1 \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}$ .
2. Soient  $s > 1$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^s}.$$

En déduire que  $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$ , puis un équivalent de  $\zeta$  en  $1^+$ .

3. Montrer que la série de fonctions  $\sum g_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ . On note  $\eta$  sa somme.
4. Soit  $a > 0$ . Montrer que la série  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ . En déduire que  $\eta$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
5. Montrer que, pour tout  $s > 1$ ,  $\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$ .
6. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

**Exercice 6.34** ●●[Correction p. 120](#)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n : x \in [0, 1[ \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, 1[$ . On note  $S$  sa somme.
2. Montrer que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$  et calculer  $S'$ . En déduire  $S$ .
3. La série  $\sum u_n$  converge-t-elle normalement sur  $[0, 1[$ ? Montrer qu'elle converge uniformément sur  $[0, 1[$ .
4. En déduire que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge et calculer sa somme.
5. La série  $\sum u'_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1[$ ?

**Exercice 6.35** ●[Correction p. 122](#)

On note  $B$  l'espace vectoriel des fonctions bornées de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ , et  $C$  le sous-espace vectoriel de  $B$  formé des fonctions continues sur

$[0, 1]$ , sur lequel on dispose aussi de la norme  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ .

1. Soient  $(f_n)$  une suite de  $B$  et  $f \in B$ . Montrer que si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ , alors  $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$ . La réciproque est-elle vraie?
2. Soient  $(f_n)$  une suite de  $C$  et  $f \in C$ . Montrer que si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ , alors  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ , puis que  $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $g_n : x \in [0, 1] \mapsto nx^n(1-x)$ . Montrer que  $\|g_n\|_1 \rightarrow 0$ , mais que la suite  $(g_n)$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ . Que retrouve-t-on sur les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$ ?
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $h_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ . Montrer que la suite  $(h_n)$  est bornée dans  $(B, \|\cdot\|_\infty)$ , mais qu'aucune suite extraite de  $(h_n)$  ne converge uniformément sur  $[0, 1]$ . Comparer avec les suites réelles bornées.

## CORRECTIONS DES EXERCICES

## Correction de l'exercice 6.1

Énoncé p. 48

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x \neq 0$ , alors

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et si  $x = 0$ ,

$$f_n(0) = 0 \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle.

**Méthode « évoluée » :** puis, si on pose

$$g : x \mapsto \frac{x}{1+x^2},$$

alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} = g(nx),$$

donc la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$  puisque

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|g\|_\infty$$

ne tend pas vers 0 ( $\|g\|_\infty > 0$ , car  $g$  n'est pas la fonction nulle).

En effet, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(nx)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |g(y)| = \|g\|_\infty,$$

en posant  $y = nx$ , et car la fonction  $x \in \mathbb{R} \mapsto y = nx \in \mathbb{R}$  est surjective (puisque  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

**Méthode plus élémentaire :** pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a l'idée de calculer

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

donc la suite numérique  $(\|f_n\|_\infty)_{n \geq 1}$  ne peut pas tendre vers 0.

**Méthode basique :** pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on fait l'étude de variations de la fonction  $f_n$ . La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (quotient de deux fonctions polynomiales, dont celle du dénominateur qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ ), et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_n(x) = n \frac{1 + n^2x^2 - x2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = n \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = n \frac{(1 - nx)(1 + nx)}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

D'où le tableau de variation :

|           |           |                |               |          |
|-----------|-----------|----------------|---------------|----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\infty$ |
| $f'_n(x)$ |           | $-$            | $+$           |          |
| $f_n(x)$  | $0$       | $\searrow$     | $\nearrow$    | $0$      |

et donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \max\left(0, \left|-\frac{1}{2}\right|, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ne tend pas vers 0 si  $n \rightarrow \infty$ .

2) La suite de fonctions  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $\sin$  (par continuité de  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$ ) : pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$$\frac{n}{n+1}x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \quad \text{donc} \quad \ell_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin(x).$$

Puis, la fonction  $\sin$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ ,  $|\sin'| = |\cos| \leq 1$  sur  $\mathbb{R}$ , donc par inégalité des accroissements finis, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq 1 \times |a - b|.$$

Donc, pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$$|\ell_n(x) - \sin(x)| = \left| \sin\left(\frac{n}{n+1}x\right) - \sin(x) \right| \leq \left| \frac{n}{n+1}x - x \right| = \frac{1}{n+1} |x| \leq \frac{2\pi}{n+1}.$$

Donc en passant à la borne supérieure, on a

$$0 \leq \|\ell_n - \sin\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |\ell_n(x) - \sin(x)| \leq \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le théorème des gendarmes conclut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\ell_n - \sin\|_\infty = 0,$$

autrement dit la suite de fonctions  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction  $\sin$  sur  $[0, 2\pi]$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\psi_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|\psi_n(x)| \leq e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(car  $|\sin| \leq 1$ ), donc la suite de fonctions  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , pour tout  $x \in [a, \infty[$ , on a

$$|\sin(x)e^{-nx}| \leq e^{-na},$$

soit

$$0 \leq \|\psi_n\|_{\infty, [a, \infty[} \leq e^{-na} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(la limite provient de  $a > 0$ ), donc le théorème des gendarmes conclut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{\infty, [a, \infty[} = 0,$$

autrement dit la suite de fonctions  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[a, \infty[$  vers la fonction nulle. C'est vrai pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , en particulier pour  $a = 1$  : la suite de fonctions  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[1, \infty[$ .

Regardons sur  $[0, 1]$  : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $\psi_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\psi'_n(x) = e^{-nx} (\cos(x) - n \sin(x)),$$

donc  $\psi'_n$  ne s'annule sur  $[0, 1]$  qu'en un unique point,  $x_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$  (d'où la nécessité de prendre  $n \neq 0$ ). D'où le tableau de variations :

|                     |   |            |                                |
|---------------------|---|------------|--------------------------------|
| $x$                 | 0 | $x_n$      | 1                              |
| $\hline \psi'_n(x)$ | + | 0          | -                              |
| $\hline \psi_n(x)$  | 0 | $\nearrow$ | $\searrow$ $\sin(1)e^{-n} > 0$ |
| $\hline$            |   |            |                                |

Donc la fonction  $\psi_n$  atteint son maximum (sur  $[0, 1]$ , mais en fait sur  $\mathbb{R}_+$ ) en  $x_n$ , et est positive. On a alors

$$\|\psi_n\|_{\infty, [0, 1]} = \psi_n(x_n).$$

Puis,  $x_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$ , donc  $e^{-nx_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$  (par continuité de  $\exp$  en  $-1$ ), et

$$\sin(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

donc

$$\|\psi_n\|_{\infty, [0, 1]} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La suite de fonctions  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc uniformément sur  $[0, 1]$ .

La suite de fonctions  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  et sur  $[1, \infty[$ , donc sur  $\mathbb{R}_+$ , puisque : pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , si  $x \in [0, 1]$ , on a

$$|\psi_n(x)| \leq \|\psi_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \max(\|\psi_n\|_{\infty, [0, 1]}, \|\psi_n\|_{\infty, [1, \infty[})$$

et si  $x \in [1, \infty[$ , on a

$$|\psi_n(x)| \leq \|\psi_n\|_{\infty, [1, \infty[} \leq \max(\|\psi_n\|_{\infty, [0, 1]}, \|\psi_n\|_{\infty, [1, \infty[})$$

D'où

$$0 \leq \|\psi_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \max(\|\psi_n\|_{\infty, [0, 1]}, \|\psi_n\|_{\infty, [1, \infty[}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et le théorème des gendarmes conclut.

**Autre idée :** soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$|\psi_n(x)| \leq x e^{-nx}$$

(car  $|\sin(x)| \leq |x| = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ). Par conséquent,

$$0 \leq \|\psi_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \|\theta_n\|_{\infty},$$

en notant

$$\theta_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x e^{-nx} \in \mathbb{R}.$$

Or, la fonction  $\theta_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\theta'_n(x) = e^{-nx}(1 - nx)$ , d'où le tableau de variations :

|                       |   |               |              |
|-----------------------|---|---------------|--------------|
| $x$                   | 0 | $\frac{1}{n}$ | $\infty$     |
| $\hline \theta'_n(x)$ | + | 0             | -            |
| $\hline \theta_n(x)$  | 0 | $\nearrow$    | $\searrow$ 0 |
| $\hline$              |   |               |              |

(car  $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_n(x) = 0$  par croissance comparée, car  $n > 0$ ).

Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|\psi_n(x)| \leq \theta_n(x) \leq \theta_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^{-1},$$

soit

$$0 \leq \|\psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}e^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut bien (grâce au théorème des gendarmes) à la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  de la suite de fonctions  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers la fonction nulle.

### Correction de l'exercice 6.2

### Énoncé p. 48

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $f_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n - 0 = f_n$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . La convergence n'est donc pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ . On peut aussi le voir en remarquant que  $f_n(n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  : si  $f_n$  est bornée,  $\|f_n\|_\infty \geq 1$ . Sur  $[-1, 1]$  en revanche, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n},$$

donc  $f_n$  est bornée sur  $[-1, 1]$  et  $\|f_n\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . La suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[-1, 1]$ . Le même argument donne la convergence uniforme sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{n}$ .

2) Soit  $x \in [0, 1]$ . Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $x^n \rightarrow 0$ , donc  $g_n(x) \rightarrow 0$ . Si  $x = 1$ , alors  $g_n(1) = 0$  pour tout  $n$ . La suite  $(g_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$g'_n(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x).$$

Ainsi  $g_n$  est croissante sur  $[0, \frac{n}{n+1}]$  et décroissante sur  $[\frac{n}{n+1}, 1]$ . Comme  $g_n \geq 0$  sur  $[0, 1]$ , on en déduit

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite  $(g_n)$  converge donc uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

### Correction de l'exercice 6.3

### Énoncé p. 48

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n(0) = 0$ . Soit  $x > 0$ . Alors

$$h_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nx}{nx} = 1,$$

donc  $h_n(x) \rightarrow 1$ . La suite  $(h_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction  $h$  définie par  $h(0) = 0$  et  $h(x) = 1$  pour  $x > 0$ .

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $h_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  (son dénominateur  $1+nx$  est supérieur ou égal à 1), alors que  $h$  n'est pas continue en 0. D'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

On peut aussi le voir directement : pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$  et  $h\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ , donc  $\|h_n - h\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq \frac{1}{2}$ .

3) Soit  $x \geq a$ . Alors  $h(x) = 1$  et

$$|h_n(x) - h(x)| = 1 - \frac{nx}{1 + nx} = \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + na}.$$

Donc  $h_n - h$  est bornée sur  $[a, +\infty[$  et  $\|h_n - h\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{1 + na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la suite  $(h_n)$  converge uniformément vers  $h$  sur  $[a, +\infty[$ .

## Correction de l'exercice 6.4

## Énoncé p. 48

1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Ainsi  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$ . En particulier  $f'_n(0) = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  : la suite numérique  $(f'_n(0))_{n \geq 1}$  diverge, donc la suite  $(f'_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas simplement sur  $\mathbb{R}$ .

3) La suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle, qui est dérivable, mais la suite des dérivées ne converge même pas simplement. La convergence uniforme d'une suite de fonctions de classe  $C^1$  ne donne donc aucune information sur la suite des dérivées : dans le théorème de dérivabilité de la limite, l'hypothèse de convergence uniforme porte sur  $(f'_n)$  et ne peut pas être remplacée par la convergence uniforme de  $(f_n)$ .

## Correction de l'exercice 6.5

## Énoncé p. 48

1) On a  $f_n(0) = 0$  pour tout  $n$ . Pour  $x \in ]0, 1]$ ,

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx} = \frac{x^2}{\frac{1}{n} + x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = x.$$

La suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$  vers  $f : x \mapsto x$  (la formule vaut aussi en 0).

2) Pour  $x \in [0, 1]$ ,

$$f_n(x) - f(x) = \frac{nx^2 - x - nx^2}{1 + nx} = -\frac{x}{1 + nx}.$$

Si  $x = 0$ , cette quantité est nulle ; si  $x > 0$ ,  $0 \leq \frac{x}{1 + nx} \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$ . Dans tous les cas  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ , donc  $f_n - f$  est bornée et  $\|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . Les fonctions  $f_n$  sont continues sur le segment  $[0, 1]$ , donc d'après le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,

$$\int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

3) D'après le calcul précédent, pour  $x \in [0, 1]$ ,

$$f_n(x) = x - \frac{x}{1 + nx} = x - \frac{1}{n} \cdot \frac{nx}{1 + nx} = x - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(1 + nx)}.$$

Donc

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left[ \frac{\ln(1+nx)}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{\ln(1+n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

puisque  $\frac{\ln(1+n)}{n^2} \rightarrow 0$  par croissances comparées.

#### Correction de l'exercice 6.6

#### Énoncé p. 48

1) Vrai. Notons  $f$  la limite uniforme. Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $n \geq N_0$ ,  $f_n - f$  soit bornée, et alors pour tout  $x \in I$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

2) Faux. Sur  $I = [0, 1]$ , les fonctions  $f_n : x \mapsto x^n$  sont continues et convergent simplement vers la fonction  $f$  nulle sur  $[0, 1[$  et valant 1 en 1, qui n'est pas continue en 1.

3) Vrai. Par définition de la convergence uniforme, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $f_N - f$  soit bornée sur  $I$ . Alors  $f = f_N - (f_N - f)$  est bornée sur  $I$ , comme différence de deux fonctions bornées : pour tout  $x \in I$ ,  $|f(x)| \leq \|f_N\|_\infty + \|f_N - f\|_\infty$ .

4) Faux. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ , posons  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ . Pour tout  $x > 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$ , et pour  $a > 0$  et  $x \geq a$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+na}$ , donc  $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{1+na} \rightarrow 0$  : la suite converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[a, +\infty[$ . Mais pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ , donc  $\|f_n\|_{\infty, ]0, +\infty[} \geq \frac{1}{2}$  : la convergence n'est pas uniforme sur  $]0, +\infty[$ .

5) Vrai. D'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions,  $f$  est continue sur  $I$ , donc  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Soit  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $f_n - f$  soit bornée pour  $n \geq N_0$ . Pour  $n \geq N_0$ ,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|,$$

et les deux termes du majorant tendent vers 0. Donc  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ .

6) Vrai. Soit  $x \in I$ . Pour tout  $n$ ,  $0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ , et la série  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge par hypothèse. Par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum |f_n(x)|$  converge.

7) Faux. Sur  $I = \mathbb{R}$ , prenons pour  $n \geq 1$  la fonction constante  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$ . La série numérique  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge d'après le théorème spécial des séries alternées ; notons  $\ell$  sa somme et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  son reste d'ordre  $n$ . La somme partielle  $S_n$  de  $\sum f_n$  est la fonction constante égale à  $\ell - R_n$ , donc  $\|S_n - \ell\|_\infty = |R_n| \rightarrow 0$  : la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Mais  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$  et la série harmonique diverge : la convergence n'est pas normale.

8) Faux. Sur  $I = [0, 1]$ , posons  $f_n(x) = x^n(1-x)$ . On a vu plus haut que  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$ , donc  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . Pour  $x \in [0, 1]$ ,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k(1-x) = 1 - x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

et  $S_n(1) = 0$  pour tout  $n$  : la série converge simplement vers la fonction  $S$  égale à 1 sur  $[0, 1[$  et à 0 en 1. Mais pour  $x \in [0, 1[$ ,  $|S_n(x) - S(x)| = x^{n+1}$ , dont la borne supérieure sur  $[0, 1[$  vaut 1. Donc  $\|S_n - S\|_\infty \geq 1$  pour tout  $n$  : la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ . (On peut aussi invoquer le théorème de continuité : les  $f_n$  sont continues et  $S$  ne l'est pas.)

## Correction de l'exercice 6.7

## Énoncé p. 49

1) Si  $\alpha > 0$  : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

On a

$$g_n(0) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

et si  $x > 0$ , par croissance comparée,

$$g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Donc la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$g'_n(x) = e^{-nx} x^{\alpha-1} (\alpha - nx).$$

D'où le tableau de variations pour  $n \geq 1$  (en utilisant que  $g_n$  est continue en 0) :

|                 |   |                    |            |
|-----------------|---|--------------------|------------|
| $x$             | 0 | $\frac{\alpha}{n}$ | $\infty$   |
| $hline g'_n(x)$ |   | +                  | -          |
| $hline g_n(x)$  | 0 | $\nearrow$         | $\searrow$ |
| $hline$         |   |                    | 0          |

Donc

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .

Si  $\alpha = 0$ , la fonction  $g_n$  est la fonction

$$g_n : x \mapsto e^{-nx}.$$

Puis, pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$g_n(x) = e^{-nx} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

et

$$g_n(0) = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Donc la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ , car la fonction  $g$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}_+$ , alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  l'est (on applique donc la contraposée du théorème de continuité des suites de fonctions), ou bien car, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|g_n - g\|_\infty \geq \left| g_n\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right) \right| = e^{-1},$$

ce qui empêche la suite  $(\|g_n - g\|_\infty)_{n \geq 1}$  de tendre vers 0.

Si  $\alpha < 0$ , la fonction  $g_n$  n'est définie que sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Donc la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  vers la fonction nulle.

Puis,

$$\|g_n\|_\infty \geq \left| g_n \left( \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{e^{-1}}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut pas converger uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Remarque

Pour ceux qui préfèrent, on peut faire le tableau de variations : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$g'_n(x) = e^{-nx} x^{\alpha-1} (\alpha - nx) < 0$$

(car  $\alpha < 0$ ). D'où le tableau de variations :

|                 |          |              |
|-----------------|----------|--------------|
| $x$             | 0        | $\infty$     |
| $hline g'_n(x)$ |          | —            |
| $hline g_n(x)$  | $\infty$ | $\searrow$ 0 |
| $hline$         |          |              |

donc la fonction  $g_n$  n'est pas bornée, donc  $\|g_n\|_\infty = +\infty$ . Cela étant vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut pas converger uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2) Comme  $|\sin| \leq 1$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$0 \leq |\phi_n(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc le théorème des gendarmes donne :

$$\phi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

autrement dit la suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $e > 0$ , pour tout  $x \in [e, \infty[$ , on a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{x\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{e\sqrt{n}},$$

donc

$$0 \leq \|\phi_n\|_{\infty, [e, \infty[} \leq \frac{1}{e\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc, la suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[e, \infty[$ . Donc, s'il y a un problème sur la convergence uniforme, c'est vers 0.

**Première idée :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si la fonction  $\phi_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors pour tout  $x \in ]0, \infty[$  on a

$$\|\phi_n\|_\infty \geq |\phi_n(x)|.$$

En particulier,

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} |\phi_n(x)|$$

si cette limite existe. Or,

$$\phi_n(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{nx}{x\sqrt{n}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sqrt{n}.$$

Donc

$$\|\phi_n\|_\infty \geq |\sqrt{n}| = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

donc la suite numérique  $(\|\phi_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (si elle existe) ne tend pas vers 0. Donc la suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut pas converger uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Deuxième idée :** soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si la fonction  $\phi_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \left| \phi_n \left( \frac{1}{n} \right) \right| = \sqrt{n} \sin(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

(car  $\sin(1) > 0$ ), et on conclut de même.

**3)** La suite de fonctions  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$  : si  $x \in ]0, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x) = 0$  par croissance comparée, car

$$3^n x^{2^n} = \exp(n \ln(3) + 2^n \ln(x)) = \exp(2^n \ln(x) + o_{n \rightarrow \infty}(2^n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(car  $\ln(x) < 0$ ), et car

$$k_n(0) = k_n(1) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $k_n(x) = f_n(x^{2^n})$  avec

$$f_n : y \in [0, 1] \mapsto 3^n(y - y^2).$$

Donc

$$\|k_n\|_{\infty, [0, 1]} = \sup_{x \in [0, 1]} |k_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x^{2^n})| = \sup_{y \in [0, 1]} |f_n(y)| = \|f_n\|_{\infty, [0, 1]} = \frac{3^n}{4}$$

car (pour justifier la troisième égalité) la fonction

$$x \in [0, 1] \mapsto y = x^{2^n} \in [0, 1]$$

est surjective.

#### Remarque

Une étude de fonction toute simple donne que  $\|f_n\|_{\infty, [0, 1]} = |f_n(\frac{1}{2})| = \frac{3^n}{4}$

Et comme  $\frac{3^n}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , la suite de fonctions  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

#### Correction de l'exercice 6.8

#### Énoncé p. 49

**1)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $(1 - \sqrt{n}|x|)^2 \geq 0$ , on a  $1 + nx^2 \geq 2\sqrt{n}|x|$ . Si  $x \neq 0$ , on en déduit

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n(1 + nx^2)} \leq \frac{|x|}{2n\sqrt{n}|x|} = \frac{1}{2n\sqrt{n}},$$

et l'inégalité est évidente si  $x = 0$  puisque  $f_n(0) = 0$ . (Une étude de variations montre que la borne est atteinte en  $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .)

**2)** D'après la question précédente, chaque  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge car  $\frac{3}{2} > 1$ , donc par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge : la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Elle

converge donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ , et sa somme  $S$  est bien définie. Comme chaque  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (le dénominateur  $n(1 + nx^2)$  ne s'annule pas), le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions donne que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}$ , donc  $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ . La série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ , donc d'après le théorème de la double limite, la série  $\sum 0$  converge (ce qui est clair) et

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

## Correction de l'exercice 6.9

## Énoncé p. 49

1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ , donc  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$  et la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Elle converge donc simplement, ce qui définit  $S$  sur  $\mathbb{R}$ , et uniformément. Les fonctions  $f_n$  étant continues sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions donne que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est paire et  $2\pi$ -périodique. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En sommant les égalités  $f_n(-x) = f_n(x)$  et  $f_n(x + 2\pi) = f_n(x)$  pour  $n$  allant de 1 à  $+\infty$  (les séries convergent), on obtient  $S(-x) = S(x)$  et  $S(x + 2\pi) = S(x)$ . Enfin

$$S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f'_n(x) = -\frac{\sin(nx)}{n}$ , donc  $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \geq \frac{2\pi}{b-a}$ . L'intervalle  $[na, nb]$  est de longueur  $n(b-a) \geq 2\pi$ , donc il contient un réel  $u$  tel que  $\sin u = 1$ . En posant  $x_0 = \frac{u}{n} \in [a, b]$ , on a  $|f'_n(x_0)| = \frac{1}{n}$ , d'où  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{1}{n}$ .

La série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, donc la série  $\sum f'_n$  ne converge normalement sur aucun segment de  $\mathbb{R}$ . La convergence normale est le seul outil dont nous disposons pour établir la convergence uniforme de  $\sum f'_n$ , et il échoue : le théorème de dérivation terme à terme ne s'applique pas. Il ne permet donc pas de conclure, ni dans un sens ni dans l'autre. On peut d'ailleurs montrer que  $S$  coïncide sur  $[0, 2\pi]$  avec  $x \mapsto \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$ , et qu'elle n'est pas dérivable en 0.

## Correction de l'exercice 6.10

## Énoncé p. 49

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .

La suite numérique  $\left(\frac{1}{n+x_0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  (bien définie car  $x_0 > 0$ ) est positive (donc la série considérée est alternée), décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x_0)$  converge. La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  ne converge pas normalement sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$  car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $|f_n|$  étant décroissante et positive sur  $[a, b]$ , on a

$$\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{1}{n+a},$$

et c'est le terme général d'une série divergente (par critère d'équivalence des séries à termes positifs, car  $\frac{1}{n+a} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$ , avec la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  qui est divergente et à termes positifs).

**Remarque**

En fait, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$|f_n(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

avec la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  qui est divergente et à termes positifs, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x)$  ne converge pas absolument, donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  ne peut pas converger normalement sur un ensemble contenant  $x \dots$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , le critère des séries alternés (puisqu'il s'applique) donne, à  $x \in \mathbb{R}_+^*$  fixé,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

(majoration **indépendante de  $x$ !**). Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme  $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , on en déduit que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit par le théorème de continuité des séries de fonctions que la fonction  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**4. Méthode 1 :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  (cf. question 1).

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in [a, b]$ , on a

$$|f'_n(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n+a)^2},$$

donc

$$0 \leq \|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{(n+a)^2}$$

et la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+a)^2}$  converge (car  $a > 0$ , sinon il y a un problème pour  $n = 0$ ) par critère d'équivalence des séries à termes positifs, car  $\frac{1}{(n+a)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ , avec la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  qui est convergente et à termes positifs. Donc le critère de comparaison des séries à termes positifs donne que la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f'_n\|_{\infty, [a, b]}$  converge, autrement dit que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$  converge normalement sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Ainsi le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction  $S$  est de

classe  $C^1$  sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  (par « caractère local » de la propriété « être de classe  $C^1$  »). De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

**Méthode 2 :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  (conséquence directe de la question 1).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$|f'_n(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

(c'est là qu'on utilise  $n > 0$ ), donc

$$0 \leq \|f'_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge, par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f'_n\|_{\infty}$  converge, autrement dit que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f'_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction

$$S - f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$(S - f_0)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Enfin, comme la fonction  $f_0$  est aussi de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , par somme, la fonction

$$S = (S - f_0) + f_0$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$S'(x) = (S - f_0)'(x) + f'_0(x) = f'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

**Remarque**

La fonction  $f'_0$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc on ne peut pas avoir que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$ ...

5. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned} S(x) + S(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} \\ &\stackrel{p=n+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p+x} \\ &= \frac{(-1)^0}{0+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

6. Comme la fonction  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc en 1, d'après la question 3, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = S(1).$$

Or, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (xS(x) + xS(x+1)) = 1.$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} xS(x) = 1, \quad \text{soit} \quad \boxed{S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

Or, la suite numérique  $\left(\frac{1}{(x+n)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive (donc la série précédente est alternée), décroissante et tend vers 0. Donc le critère des séries alternées s'applique, et donne que  $S'(x)$  est du signe de son premier terme, à savoir  $\frac{(-1)^{0+1}}{(x+0)^2} = -\frac{1}{x^2}$ , donc

$$S'(x) \leq 0.$$

Donc la fonction  $S'$  est négative sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc la fonction  $S$  est décroissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ .

On a donc : pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$S(x+1) \leq S(x),$$

ce qui donne en additionnant  $S(x+1)$  ou  $S(x)$  (et par la question précédente) :

$$2S(x+1) \leq S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \leq 2S(x).$$

Puis, pour  $y \in ]1, \infty[$ , en posant  $x = y - 1$  (avec  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , puisque  $y > 1$ ), on a

$$2S(y) = 2S(x+1) \leq S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} = \frac{1}{y-1}.$$

Donc, pour tout  $x \in ]1, \infty[$ ,

$$\frac{1}{2x} \leq S(x) \leq \frac{1}{2(x-1)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Donc, le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2x}}.$$

## Correction de l'exercice 6.11

## Énoncé p. 50

On peut commencer par remarquer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie car par récurrence sur  $n$ , on a  $f_n$  continue sur  $I$  (et même de classe  $C^\infty$ ) :

**Initialisation** : pour  $n = 0$ ,  $f_0$  est la fonction nulle, donc est continue sur  $I$ .

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons la fonction  $f_n$  définie et continue sur  $I$ . Alors la fonction  $f_n^2$  est aussi continue sur  $I$ ,  $I$  est un intervalle, et  $0 \in I$ . Donc, le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$x \in I \mapsto \int_0^x f_n^2(t) dt$$

est une primitive de la fonction  $f_n^2$  sur  $I$ , donc est de classe  $C^1$  sur  $I$ . Enfin, la fonction

$$x \mapsto \frac{x^3}{3}$$

est polynomiale, donc de classe  $C^1$  sur  $I$ . Par addition, on a alors la fonction  $f_{n+1}$  définie et de classe  $C^1$  sur  $I$ . Donc la fonction  $f_{n+1}$  est définie et continue sur  $I$ . D'où l'hérédité.

**Conclusion** : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est définie et continue sur  $I$ .

1) Montrons le résultat demandé par récurrence sur  $n$  :

**Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a

$$|f_0(x)| = |0| = 0 \leq \frac{5}{6}$$

pour tout  $x \in I$ .

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que pour tout  $x \in I$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$ .

Alors, pour tout  $x \in I$ , par inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale (**car** « les bornes sont dans le bon sens », c'est-à-dire  $x \geq 0$ ) :

$$|f_{n+1}(x)| \leq \left| \frac{x^3}{3} \right| + \left| \int_0^x f_n^2(t) dt \right| \leq \frac{x^3}{3} + \int_0^x |f_n|^2(t) dt \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \int_0^x \left(\frac{5}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{24} + \frac{25}{36}x \leq \frac{1}{24} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18} < \frac{5}{6}.$$

D'où l'hérédité.

**Conclusion** : on a donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6}$$

pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in I$ , linéarité de l'intégrale, puis (puisque  $x \geq 0$ ) par inégalité triangulaire généralisée et croissance de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left| \int_0^x (f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)| dt = \int_0^x |f_n(t) - f_{n-1}(t)| |f_n(t) + f_{n-1}(t)| dt \\ &\leq \int_0^x |f_n(t) - f_{n-1}(t)| (|f_n(t)| + |f_{n-1}(t)|) dt \\ &\leq \int_0^x \|f_n - f_{n-1}\|_\infty (\|f_n\|_\infty + \|f_{n-1}\|_\infty) dt \\ &\leq \int_0^x \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \frac{5}{6} \times 2 dt = \frac{5}{6} \times 2 \|f_n - f_{n-1}\|_\infty x \leq \frac{5}{6} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \end{aligned}$$

(car  $x \leq \frac{1}{2}$ ).

On a donc bien

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3) Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty.$$

**Initialisation** : pour  $n = 0$ ,  $\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1$ , il y a donc égalité (ce qui est plus fort que l'inégalité voulue).

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$ . Alors, en prenant l'inégalité de la question précédente en  $n+1$  au lieu de  $n$  (c'est possible car  $n+1 \in \mathbb{N}^*$ ), on a

$$\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{5}{6} \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \stackrel{\text{H.R.}}{\leq} \frac{5}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \|f_1 - f_0\|_\infty,$$

d'où l'hérédité.

**Conclusion** : on a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$  est une série géométrique de raison  $\frac{5}{6}$ , convergente car  $\frac{5}{6} \in ]-1, 1[$ . Donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_{n+1} - f_n\|_\infty$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (f_{n+1} - f_n)$  converge normalement, donc uniformément, sur  $I$ .

Or la somme partielle d'indice  $n-1$  de cette série est  $f_n - f_0 = f_n$  (car c'est une série télescopique) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et comme la série de fonctions converge uniformément, la suite des sommes partielles converge uniformément vers la somme de la série.

D'où la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction  $f$ , somme de la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (f_{n+1} - f_n)$ .

4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in I$ ,

$$|f(x)^2 - f_n(x)^2| = |f(x) - f_n(x)| |f(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| (|f(x)| + |f_n(x)|) \leq \|f - f_n\|_\infty \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\right)$$

(car, pour tout  $x \in I$ , comme  $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément, donc simplement, vers la fonction  $f$ , on a en passant à la limite,  $|f(x)| \leq \frac{5}{6}$ . Autrement dit,  $\|f\|_\infty \leq \frac{5}{6}$ ).

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f^2 - f_n^2\|_\infty \leq \frac{5}{3} \|f - f_n\|_\infty,$$

et comme  $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , on en déduit

$$\|f^2 - f_n^2\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

autrement dit la suite de fonctions  $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f^2$ . Soit  $x \in I$  fixé. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n^2$  est continue sur  $I$ , donc sur  $[0, x]$ . La suite de fonctions  $(f_n^2)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f^2$ , donc converge uniformément sur  $[0, x]$  vers  $f^2$ , et  $[0, x]$  est un segment. Le théorème d'interversion limite/intégrale donne alors

$$\int_0^x f_n^2(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^x f^2(t) dt.$$

Donc, pour tout  $x \in I$ , l'égalité

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t) dt$$

donne, en passant à la limite pour  $n \rightarrow \infty$ ,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f^2(t) dt.$$

Comme la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  (limite uniforme de fonctions continues sur  $I$ ), et que  $0 \in I$ , le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f^2(t) dt$$

est une primitive de la fonction  $f^2$  sur  $I$ .

Donc, par somme de fonctions dérivables, la fonction  $f$  est dérivable sur  $I$ , et pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(x) = x^2 + f^2(x).$$

Puis,  $f(0) = 0$  est direct.

#### Correction de l'exercice 6.12

#### Énoncé p. 50

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{x}{n(1+x)}$  existe et  $\frac{x}{n(1+x)} \geq 0$ , donc  $1 + \frac{x}{n(1+x)} > 0$  et  $u_n(x)$  existe.

On a  $\ln(1+u) = u + O(u^2)$ , et  $\frac{x}{n(1+x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , donc

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + O_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge (Riemann,  $2 > 1$ ) et est à termes positifs.

Donc, par critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} O_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  converge absolument, donc converge.

Puis, la suite numérique  $\left( \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante positive de limite nulle, donc par le critère des séries alternées, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge, et, pour  $x \geq 0$ ,

en multipliant par la constante  $\frac{x}{1+x}$  (qui existe car  $1+x \neq 0$ ), la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x)}$  converge.

Par addition, on en déduit que la série numérique  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge pour  $x \in \mathbb{R}_+$ .

**Autre façon :** on peut appliquer directement le critère des séries alternées, mais la vérification est moins directe.

Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , la suite numérique  $\left( 1 + \frac{x}{n(1+x)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante (car  $\frac{x}{1+x} \geq 0$ ) et minorée par 1 (idem). En composant par  $\ln$  qui est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que la suite numérique  $\left( \ln \left( 1 + \frac{x}{n(1+x)} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée par  $\ln(1) = 0$ , donc positive (donc la série de terme général  $u_n(x)$  est alternée). Un calcul direct montre qu'elle tend vers 0 si  $n \rightarrow \infty$ . Alors on peut appliquer le critère des séries alternées, et la série numérique  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|u_n|$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $|u_n(x)| =$

$\ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|u_n|'(x) = \frac{\frac{(1+x)-x}{n(1+x)^2}}{1 + \frac{x}{n(1+x)}} = \frac{1}{n(1+x)^2 + x(1+x)} \geq 0.$$

Donc la fonction  $|u_n|$  est croissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$ ,  $|u_n|(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} |u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . Donc

$$\|u_n\|_\infty = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$  si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} \|u_n\|_\infty = \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge. Or, c'est une série à termes positifs,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

(car  $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ , et que  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ), et comme la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge (c'est la série harmonique), par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

#### Remarque

**Autre façon :** on remarque, pour  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$  fixé, que

$$0 \leq |u_n(x_0)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x_0}{1+x_0} \frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge, et  $\frac{x_0}{1+x_0} \neq 0$ , donc la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{x_0}{1+x_0} \frac{1}{n}$  diverge. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique  $\sum_{n \geq 1} |u_n(x_0)|$  diverge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge pas absolument en  $x_0$ . Alors, en contraposant un résultat du cours, pour tout intervalle  $I$  contenant  $x_0$  (donc en particulier pour  $\mathbb{R}_+$ ), la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne peut pas converger normalement sur  $I$ .

Le critère des séries alternées nous donne aussi que, pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , si l'on note  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$  le reste d'ordre  $n$  de la série de fonctions considérée, alors

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \|u_{n+1}\|_\infty.$$

C'est vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \|u_{n+1}\|_\infty = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Correction de l'exercice 6.13

## Énoncé p. 50

1) On montre que la fonction  $f_n$  est de classe  $C^n$  sur  $I = [a, b]$  par récurrence sur  $n$ .  
**Initialisation** : pour  $n = 0$ , il faut montrer que  $f_0 = f$  est continue sur  $I$ , ce qui est vrai par hypothèse.

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons la fonction  $f_n$  de classe  $C^n$  sur  $I$ , alors la fonction  $f_n$  est au moins continue sur  $I$ ,  $I$  est un intervalle, et  $a \in I$ , donc le théorème fondamental de l'analyse s'applique, et donne que la fonction  $f_{n+1}$  est bien définie sur  $I$  et est la primitive de la fonction  $f_n$  qui s'annule en  $a$  (donc  $f'_{n+1} = f_n$ ).  
 Donc la fonction  $f_{n+1}$  est dérivable sur  $I$ , et

$$f'_{n+1} = f_n$$

est de classe  $C^n$  sur  $I$  par hypothèse de récurrence, donc la fonction  $f_{n+1}$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ . D'où l'hérédité.

**Conclusion** : on a bien, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , que la fonction  $f_n$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ .  
 On montre par récurrence sur  $n$  la propriété  $P_n$  :

$$\text{« pour tout } x \in I, |f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \|f\|_\infty \text{ »}.$$

**Initialisation** : pour  $n = 0$ , comme  $0! = 1$  et  $(x-a)^0 = 1$ , cela revient à dire que pour tout  $x \in I$ ,

$$|f_0(x)| = |f(x)| \leq \frac{1}{1} \|f\|_\infty,$$

ce qui est vrai par définition de la norme infinie (*remarquons qu'elle existe, car la fonction  $f$  est continue sur le segment  $I$ , donc est bien bornée*).

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $P_n$  vraie, alors pour  $x \in I$ , par inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale (car  $x \geq a$ , donc « les bornes sont dans le bon sens »), on a

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)| dt \leq \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!} \|f\|_\infty dt = \frac{\|f\|_\infty}{n!} \left[ \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x = \frac{\|f\|_\infty}{n!} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

D'où  $P_{n+1}$ .

**Conclusion** : on a bien, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in I$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \|f\|_\infty.$$

On en déduit en particulier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \|f\|_\infty$$

(car, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $0 \leq x-a \leq b-a$ , et car la fonction  $t \mapsto t^n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ).

2) La série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$  converge car  $\frac{(b-a)^n}{n!}$  est le terme général d'une série exponentielle, donc convergente. Donc la série de fonctions  $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$  converge normalement, donc uniformément, sur  $I$ . Comme de plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_k$  est continue sur  $I$ , on en déduit (par le théorème de continuité des séries de fonctions) que la fonction  $g_0$  (la somme de la série de fonctions  $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$ ) est continue sur  $I$ .

Par construction, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_k$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , et

$$f'_k = f_{k-1}.$$

De plus, on a vu que la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{k=n+1} f_{k-1} = \sum_{k \geq 1} f'_k$$

converge normalement, donc uniformément, sur  $I$ .

Donc par application du théorème de dérivation terme à terme, la fonction  $g_1$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , et pour tout  $x \in I$ ,

$$g'_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = g_0(x).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout entier  $k$  avec  $k \geq n$ , la fonction  $f_k$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , pour tout entier  $k$  avec  $k \geq n$ ,

$$f_k^{(i)} = f_{k-i}$$

(récurrence immédiate), et la série de fonctions

$$\sum_{k \geq n} f_{k-i} = \sum_{j=k-i} f_j$$

converge normalement, donc uniformément, sur  $I$  (puisque  $n - i \geq 0$  et que la série de fonctions  $\sum_{j \geq 0} f_j$  converge normalement sur  $I$ ), donc par le théorème de dérivation

terme à terme, la fonction  $g_n$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ .

3) De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in I$ ,

$$g'_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f'_k(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_{k-1}(x) = \sum_{j=k-1}^{\infty} f_j(x) = g_{n-1}(x).$$

Donc

$$g'_n = g_{n-1} = g_n + f_{n-1}$$

(et par récurrence immédiate,  $g_n^{(n)} = g_0$ ).

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$g_n(a) = 0$$

car  $f_k(a) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n = 1$ , cela donne

$$\boxed{g'_1 = g_1 + f}$$

que l'on résout par la variation de la constante : l'équation homogène est  $y' = y$  dont les fonctions solutions sont les fonctions

$$y : x \in I \mapsto Ke^x$$

pour  $K \in \mathbb{R}$ .

Posons alors la fonction

$$K : x \in I \mapsto g_1(x)e^{-x}.$$

Par produit de fonctions de classe  $C^1$ , la fonction  $K$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , et pour tout  $x \in I$ , on a  $g_1(x) = K(x)e^x$ , soit pour tout  $x \in I$ ,

$$g'_1(x) = K'(x)e^x + K(x)e^x.$$

On reporte dans l'équation différentielle vérifiée par  $g_1$ , et on a, pour tout  $x \in I$ ,

$$K'(x) = e^{-x} f(x),$$

donc

$$K : x \in I \mapsto K(a) + \int_a^x e^{-t} f(t) dt$$

(car la fonction  $K$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ ). Or,

$$K(a) = g_1(a) e^{-a} = 0$$

(car  $g_1(a) = 0$ ), et donc pour tout  $x \in I$ ,

$$K(x) = \int_a^x e^{-t} f(t) dt, \quad \text{puis} \quad g_1(x) = e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt.$$

On conclut en remarquant que  $g_1 = g_0 - f$ , donc pour tout  $x \in I$ ,

$$g_0(x) - f(x) = e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt.$$

#### Correction de l'exercice 6.14

#### Énoncé p. 50

1) À  $x \in [0, 1]$  fixé, la fonction  $g_x$  est un polynôme, donc dérivable sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$g'_x(t) = 1 - t \geq 0,$$

donc la fonction  $g_x$  est croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et même strictement croissante, car  $g'_x > 0$  sur  $[0, 1[$ . Remarquons que  $g_x(0) = \frac{x}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$  (pour  $x \in [0, 1]$ ) et  $g_x(1) = \frac{1+x}{2} \in [0, 1]$  (pour  $x \in [0, 1]$ ).

|                 |               |                          |
|-----------------|---------------|--------------------------|
| $t$             | 0             | 1                        |
| $hline g'_x(t)$ | +             |                          |
| $hline g_x(t)$  | $\frac{x}{2}$ | $\nearrow \frac{x+1}{2}$ |
| $hline$         |               |                          |

2) Soit  $x \in [0, 1]$ . Tout d'abord, remarquons que, pour tout  $t \in [0, 1]$ , comme la fonction  $g_x$  est croissante, on a

$$0 \leq g_x(0) \leq g_x(t) \leq g_x(1) \leq 1.$$

On montre alors le résultat voulu sur  $u_n$  par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation** : si  $n = 0$ ,  $u_0 = 0 \in [0, 1]$ .

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $u_n$  existe et  $u_n \in [0, 1]$ , alors  $u_n$  est dans le domaine de définition de  $g_x$ , donc  $u_{n+1} = g_x(u_n)$  existe, et de plus  $u_{n+1} \in [0, 1]$  d'après la remarque faite au début de cette question. D'où l'hérédité.

**Conclusion** : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n$  qui existe et  $u_n \in [0, 1]$ .

#### Remarque

Le même résultat subsiste pour  $u_0 \in [0, 1]$  quelconque !

3) Soit  $x \in [0, 1]$ . Montrons par récurrence sur  $n$  que  $u_n \leq u_{n+1}$ .

**Initialisation** : comme  $x \in [0, 1]$ , on a

$$u_1 - u_0 = \frac{x}{2} \geq 0, \quad \text{donc} \quad u_0 \leq u_1.$$

**Hérédité :** soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $u_n \leq u_{n+1}$ , alors comme  $u_n \in [0, 1]$ ,  $u_{n+1} \in [0, 1]$  et la fonction  $g_x$  est croissante sur  $[0, 1]$ , on a

$$u_{n+1} = g_x(u_n) \leq g_x(u_{n+1}) = u_{n+2}.$$

D'où l'hérédité.

**Conclusion :** donc, par récurrence sur  $n$ , on a  $u_n \leq u_{n+1}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

#### Remarque

$u_1 - u_0 = \frac{x - u_0^2}{2}$ . Donc, si  $u_0 \leq \sqrt{x}$ , la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, et si  $u_0 \geq \sqrt{x}$ , la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Cela se montre de même que ci-dessus.

La suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, majorée par 1 donc (par le théorème de la limite monotone) converge vers un réel  $\ell$  (avec  $\ell \leq 1$ ), et comme la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0, on a  $\ell \geq 0$ .

Mais alors, par opérations algébriques sur les limites,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$  donne

$$u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell + \frac{x - \ell^2}{2}.$$

Mais

$$u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$$

(car la suite numérique  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), donc par unicité de la limite,

$$\ell = \ell + \frac{x - \ell^2}{2}, \quad \text{soit} \quad \ell^2 = x.$$

Comme  $\ell \geq 0$ , on a alors

$$\ell = \sqrt{x}.$$

#### Remarque

Le résultat subsiste pour la même raison pour  $u_0 \in [0, 1]$  quelconque.

4) Montrons par récurrence sur  $n$  que  $P_n$  est un polynôme sur  $[0, 1]$ .

**Initialisation :** pour  $n = 0$ ,  $P_0 = 0$  qui est bien un polynôme (le polynôme nul).

**Hérédité :** soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $P_n$  est un polynôme sur  $[0, 1]$ , alors  $P_n^2$  aussi, puis par combinaison linéaire de polynômes réels,  $P_{n+1}$  aussi. D'où l'hérédité.

**Conclusion :** donc on a bien, par récurrence sur  $n$ , que  $P_n$  est un polynôme sur  $[0, 1]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

5) Montrons par récurrence sur  $n$  : pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

**Initialisation :** pour  $n = 0$ , comme pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\sqrt{x} - P_0(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^0 = 1,$$

l'initialisation est vraie.

**Hérédité :** soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

On a déjà vu  $0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x)$  (en effet, la suite  $(P_n(x))$  est la suite  $(u_n)$  du début de l'exercice, donc est croissante et tend vers  $\sqrt{x}$ , donc est majorée par  $\sqrt{x}$ ). Puis,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{\sqrt{x}^2 - P_n(x)^2}{2} \\ &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x))}{2} \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right) \\ &\leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

(par application de l'hypothèse de récurrence, et car  $\sqrt{x} \leq 1$ ,  $P_n(x) \leq 1$ , donc  $1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \geq 0$ ).

Or,  $P_n(x) \geq 0$ , donc

$$\frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \geq \frac{\sqrt{x}}{2}, \quad \text{puis} \quad 1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2},$$

et donc (en multipliant des inégalités **positives** et **dans le même sens**), on a bien

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1},$$

d'où l'hérédité.

**Conclusion :** donc, pour tout  $x \in [0, 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

**6) La convergence uniforme sur  $[0, 1]$  se montre alors par simple étude de fonction.** En effet, pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n,$$

alors la fonction  $f_n$  est polynomiale, donc dérivable sur  $[0, 1]$ , et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f'_n(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n + nx \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{nx}{2}\right) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{(n+1)x}{2}\right).$$

Donc, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f'_n(x)$  est du signe de  $1 - \frac{(n+1)x}{2}$ . Donc  $f_n$  est croissante sur  $\left[0, \frac{2}{n+1}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{2}{n+1}, 1\right]$  :

|                 |   |                 |                 |
|-----------------|---|-----------------|-----------------|
| $x$             | 0 | $\frac{2}{n+1}$ | 1               |
| $hline f'_n(x)$ |   | +               | -               |
| $hline f_n(x)$  | 0 | $\nearrow$      | $\searrow$      |
| $hline$         |   |                 | $\frac{1}{2^n}$ |

Donc  $f_n$  admet un maximum en  $\frac{2}{n+1}$ . On en déduit que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f_n(x) \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Or, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\sqrt{x} \in [0, 1]$ , donc

$$\sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = f_n(\sqrt{x}) \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{2}{2(n+1)}\right)^n,$$

soit, grâce à la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|\sqrt{\cdot} - P_n\|_\infty \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{2}{2(n+1)}\right)^n.$$

Or,

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} -1,$$

donc

$$\left(1 - \frac{2}{2(n+1)}\right)^n = \exp \left( n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

(car la fonction  $\exp$  est continue en  $-1$ ), donc

$$f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes, que

$$\|\sqrt{\cdot} - P_n\|_\infty \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit que la suite de fonctions  $(P_n)$  converge uniformément vers  $\sqrt{\cdot}$  sur  $[0, 1]$ , ce qui conclut.

#### Correction de l'exercice 6.15

#### Énoncé p. 51

1) Pour  $x \in ]-1, 1[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq |u_n(x)| \leq |x|^n.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$  est une série géométrique de raison  $|x|$ , convergente car  $|x| \in ]-1, 1[$ , donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$  converge absolument, donc converge.

Si  $|x| > 1$ , alors

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \infty$$

(par croissance comparée), donc la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$  diverge grossièrement.

Si  $x = 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n(1) = \frac{(-1)^n}{n}$$

est le terme général d'une série convergente par le critère des séries alternées, puisque  $(u_n(1))$  est bien alternée ( $\frac{1}{n} \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ), et la suite  $(|u_n(1)|)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroît et tend vers 0.

Si  $x = -1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n(-1) = \frac{1}{n}$$

est le terme général d'une série divergente (série harmonique).

Donc le domaine de convergence simple de la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  est

$$]-1, 1[.$$

## 2) Étude de la convergence normale

Soit  $a \in [0, 1[$ . Pour tout  $x \in [-a, a]$ , on a

$$|x| \leq a < 1,$$

donc pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|u_n(x)| \leq \frac{a^n}{n} \leq a^n.$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 \leq \|u_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^n.$$

Or la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^n$  est une série géométrique de raison  $a$ , convergente car  $a \in ]-1, 1[$ , donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|u_n\|_{\infty, [-a, a]}$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge normalement sur  $[-a, a]$ .

La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne peut pas converger normalement sur un intervalle contenant 1, car la convergence normale implique la convergence absolue en tout point, mais la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(1)$  est une série convergente qui n'est pas absolument convergente (car  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n(1)| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  est la série harmonique, donc divergente).

Regardons sur  $] -1, a]$  avec  $a \in ]-1, 1[$  : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in ] -1, a]$ ,

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

car  $|x| \leq 1$ , et

$$|u_n(x)| \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{n},$$

donc

$$\|u_n\|_{\infty, ]-1, a]} = \frac{1}{n},$$

terme général d'une série divergente. Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas normalement sur  $] -1, a]$ .

### Remarque

En particulier,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas normalement sur  $] -1, 1[$ .

Regardons sur  $[a, 1[$  avec  $a \in ]-1, 1[$  : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in [a, 1[$ ,

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

car  $|x| \leq 1$ , et

$$|u_n(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{n},$$

donc

$$\|u_n\|_{\infty, [a, 1[} = \frac{1}{n},$$

terme général d'une série divergente. Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas normalement sur  $[a, 1[$ .

De là, on sait dire s'il y a convergence normale ou non, sur tout intervalle inclus dans  $] - 1, 1]$ , ce qui doit normalement largement suffire pour répondre à la question.

#### Étude de la convergence uniforme

Pour tout  $x \in [0, 1]$ , la suite numérique  $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est positive (donc la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$  est alternée) et tend vers 0 par le théorème des gendarmes, puisque

$$0 \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, la suite numérique  $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante : comme  $x \in [0, 1]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n,$$

et bien sûr,

$$0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Or, des inégalités **positives et dans le même sens** se multiplient, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{x^n}{n},$$

d'où la décroissance annoncée.

Le critère des séries alternées s'applique donc, et donne en particulier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or, cette majoration du reste ne dépend pas de  $x$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le théorème des gendarmes donne alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|_{\infty, [0, 1]} = 0,$$

autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

Pour  $a \in ] - 1, 0[$ , on sait que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[a, 0]$ . Donc

pour tout  $a \in ] - 1, 1]$ , la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge uniformément sur  $[a, 1]$ .

En effet, pour tout  $x \in [a, 1]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

— si  $x \in [a, 0]$ , alors

$$|R_n(x)| \leq \|R_n\|_{\infty, [a, 0]} \leq \|R_n\|_{\infty, [a, 0]} + \|R_n\|_{\infty, [0, 1]},$$

— et si  $x \in [0, 1]$ , alors

$$|R_n(x)| \leq \|R_n\|_{\infty, [0,1]} \leq \|R_n\|_{\infty, [a,0]} + \|R_n\|_{\infty, [0,1]}.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty, [a,1]} \leq \|R_n\|_{\infty, [a,0]} + \|R_n\|_{\infty, [0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 0 = 0,$$

et le théorème des gendarmes conclut.

Puis, pour tout  $a \in ]-1, 0]$ , la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas uniformément sur  $] -1, a]$ . En effet,

**Méthode 1 :** on raisonne par l'absurde avec le théorème de la double limite.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} u_n(x) = \frac{1}{n},$$

et «  $-1$  est une borne de l'intervalle  $] -1, a]$  ».

Si de plus l'on suppose que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge uniformément sur  $] -1, a]$ , alors le théorème de la double limite s'applique, et donne que la fonction  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  a une limite **finie** en  $-1^+$ , qui vaut

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow -1^+} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ce qui est absurde car la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge. Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas uniformément sur  $] -1, a]$ .

**Méthode 2 :** plus « élémentaire ».

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme la série à termes positifs  $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k}$  diverge, il existe  $N \in \mathbb{N}$

avec  $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k} \geq 2$ . Donc, pour tout  $x \in ] -1, a]$ , comme pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_k(x) \geq 0$  (car  $x \leq 0$ ), on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^N u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k} \geq 2.$$

Donc il existe  $x_n \in ] -1, a]$  avec

$$\|R_n\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty, ]-1, a]} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x_n) \geq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k} - 1 \geq 2 - 1 = 1$$

(la norme infinie valant  $\infty$  par convention si la fonction  $R_n$  n'est pas bornée sur  $] -1, a]$ ).

Donc la suite numérique  $(\|R_n\|_{\infty, ]-1, a]})_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0, donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas uniformément sur  $] -1, a]$ .

**Méthode 3 :** Toujours de façon « élémentaire », basée sur la même idée que la méthode 2, mais présentée différemment :

pour  $a \in ] -1, 0]$ , pour  $x \in ] -1, a]$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_k(x) \geq 0$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}$  avec  $N > n$ , pour tout  $x \in ] -1, a]$ , on a

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty, ]-1, a]} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^N u_k(x)$$

(la norme infinie valant  $\infty$  par convention si la fonction  $R_n$  n'est pas bornée sur  $] - 1, a]$ ). Comme c'est vrai pour tout  $x \in ] - 1, a]$ , en faisant tendre  $x \rightarrow -1^+$ , on obtient (en passant à la limite dans une somme **finie**)

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty, ]-1, a]} \geq \sum_{k=n+1}^N \lim_{x \rightarrow -1^+} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k}$$

Ceci étant vrai pour tout  $N \in \mathbb{N}$  avec  $N > n$ , on peut faire tendre  $N \rightarrow \infty$ , et donc

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty, ]-1, a]} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k}$$

Or, cette dernière limite vaut  $\infty$ , car la série numérique  $\sum_{k \geq n} \frac{1}{k}$  diverge (série harmonique) et est à termes positifs. Par conséquent, le reste de notre série de fonctions n'est pas borné sur  $] - 1, a]$ , donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas uniformément sur  $] - 1, a]$ .

## Correction de l'exercice 6.16

## Énoncé p. 51

1. **Méthode 1 :** soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{(-1)^n x_0}{(1 + x_0^2)^n} = 0$$

(si  $x_0 = 0$ , c'est toujours nul, et si  $x_0 \neq 0$ , alors  $1 + x_0^2 > 1$ , donc c'est par croissance comparée). Donc

$$f_n(x_0) = O_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right),$$

et la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ) et à termes positifs. Donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x_0)$  converge.

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**Méthode 2 :** par le critère de D'Alembert : si  $x \neq 0$ ,  $f_n(x) \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{1}{1 + x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^2} < 1$$

(car  $x \neq 0$ ), donc la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x)$  converge. Et pour  $x = 0$ , on a la série nulle, qui converge.

## Remarque

Si on veut appliquer le critère de D'Alembert, il faut calculer une **limite**. Même si le quotient  $\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right|$  ne dépend pas de  $n$ , il ne faut pas oublier de passer à la limite !

**Méthode 3 :** pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \geq 0,$$

donc la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$  est alternée. Puis, la suite numérique  $\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante, de limite nulle pour  $x \neq 0$  (car c'est alors une suite géométrique de raison  $\frac{1}{1+x^2}$  avec  $\frac{1}{1+x^2} \in [0, 1[$ ), donc on peut appliquer le critère des séries alternées, et donc la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$  est convergente. On multiplie alors par  $x$ , et on a le résultat voulu pour  $x \neq 0$ . Et pour  $x = 0$ , on a la série nulle, qui converge.

**Calcul de la somme :** pour  $x \neq 0$ , c'est une série géométrique de raison  $\frac{-1}{1+x^2}$  (qui est bien dans  $] -1, 1[$  car  $x \neq 0$ ), donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} = x \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x^2}} - 1 \right) = \boxed{\frac{-x}{2+x^2}}$$

(en faisant attention que la somme part de 1 et pas de 0...). On peut remarquer que cette formule reste valable pour  $x = 0$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $0 < a < b$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $0 < a \leq x \leq b$ , donc

$$0 < 1 + a^2 \leq 1 + x^2 \leq 1 + b^2,$$

et comme la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^n}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  (car  $n > 0$ ),

$$0 < \frac{1}{(1+b^2)^n} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$

Enfin, des inégalités positives dans le même sens se multiplient, ce qui donne

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(1+x^2)^n} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Cette majoration ne dépendant pas de  $x$ , on peut affirmer

$$\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{b}{(1+a^2)^n}$  est convergente (série géométrique de raison  $\frac{1}{1+a^2}$  avec  $\frac{1}{1+a^2} \in ]-1, 1[$  car  $a > 0$ ). Donc la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement sur tout segment de  $]0, +\infty[$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudions le sens de variation de la fonction

$$|f_n| : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

(qui est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , comme quotient de deux polynômes, dont celui du dénominateur qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+$ ).

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$|f_n|'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1+x^2-2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(1-\sqrt{2n-1}x)(1+\sqrt{2n-1}x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Donc la fonction  $|f_n|$  est croissante sur  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right]$ . Puis,

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} \sqrt{2n}},$$

et la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} \sqrt{2n}}$  est divergente (Riemann,  $\frac{1}{2} \leq 1$ ) et à termes positifs. Donc, par critère de comparaison puis d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$  diverge, donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  n'est pas normalement convergente sur  $\mathbb{R}_+$ .

#### Remarque

(a) Justifions l'équivalent :

$$\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)\right],$$

or

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc par continuité de la fonction exp en  $\frac{1}{2}$ ,

$$\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}},$$

c'est un grand classique.

- (b) Une autre façon pour le voir : on évalue en  $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , et on a directement le terme d'une série divergente, encore faut-il le remarquer...
- (c) Si la somme partait de  $n = 0$ , alors comme  $f_0$  n'est pas bornée sur  $[0, +\infty[$  ( $f_0$  est la fonction  $x \mapsto x$ ), on aurait pu directement conclure à la non convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$ .
- (d) Comme  $|f_n|(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f_n|(x) = 0$  (car  $n \geq 1$ ), du tableau de variations, on a même

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \| |f_n| \|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\right|.$$

Mais ici, on a seulement utilisé une inégalité, ce qui a suffi pour conclure.

4. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n \geq N$  alors  $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} < a$ .

Comme la fonction  $|f_n|$  est décroissante sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$  (d'après l'étude faite précédemment), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n \geq N$  alors la fonction  $|f_n|$  restreint à  $[a, +\infty[$  est décroissante positive, donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \| |f_n| \|_{\infty, [a, +\infty[} = |f_n(a)|.$$

De plus, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n(a)|$  est convergente (vu à la première question), donc la série numérique

$$\sum_{n \geq N} \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$$

converge. Donc la série de fonctions

$$\sum_{n \geq N} f_n$$

est normalement convergente sur  $[a, +\infty[$ . *il reste à rajouter les premiers termes...*

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , donc sur  $[a, +\infty[$ , on en déduit que la somme

$$\sum_{n=1}^{N-1} \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$$

est finie, et donc la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$$

converge, autrement dit la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} f_n$$

est normalement convergente sur  $[a, +\infty[$ .

**Autre méthode :** une autre façon de montrer ceci, est d'utiliser l'inégalité classique  $\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$  (une retraduction de  $(1 - |x|)^2 \geq 0$ ), ce qui donne pour  $x \geq a$  et  $n \geq 1$  :

$$\left| \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{1}{2(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}.$$

C'est vrai pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}},$$

et on conclut car la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}$  est une série géométrique convergente, car de raison  $\frac{1}{1+a^2}$ , avec  $\frac{1}{1+a^2} \in ]0, 1[$  (car  $a > 0$ ).

#### Remarque

On n'a fait l'étude que sur  $[0, +\infty[$ , car  $f_n$  est impaire pour tout entier  $n$ , donc la somme de la série aussi.

## Correction de l'exercice 6.17

## Énoncé p. 51

Convergence simple :

Soit  $x_0 \in [0, \pi]$ , si  $0 < x_0 < \pi$ , on a

$$0 \leq |\sin(x_0) \cos^n(x_0)| \leq |\cos(x_0)|^n$$

et la série numérique  $\sum_{n \geq 0} |\cos(x_0)|^n$  est convergente (série géométrique de raison  $|\cos(x_0)|$  avec  $|\cos(x_0)| < 1$  puisque  $x_0 \in ]0, \pi[$ ). Donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \sin(x_0) \cos^n(x_0)$  converge absolument,

donc converge.

Si  $x_0 = 0$  ou  $\pi$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sin(x_0) \cos^n(x_0) = 0$ . Donc la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \sin(x_0) \cos^n(x_0)$  converge.

La série de fonctions converge donc simplement sur  $[0, \pi]$ .

Convergence normale sur  $[0, \pi]$  ?

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il y a convergence normale sur  $[0, \pi]$ . Essayons de nier un théorème du cours.

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n : x \in [0, \pi] \mapsto \sin(x) \cos^n(x).$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, \pi]$  (par produit de fonctions usuelles continues).
- Supposons que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge normalement sur  $[0, \pi]$ .

Alors, par le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

serait continue sur  $[0, \pi]$ .

Or

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0,$$

et pour tout  $x \in ]0, \pi[$ , on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(x) \cos^n(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

(somme d'une série géométrique convergente de raison  $\cos(x)$ , avec  $\cos(x) \in ]-1, 1[$  car  $x \in ]0, \pi[$ ). Or,

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2},$$

donc

$$\frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x}, \quad \text{en particulier} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \neq 0 = f(0),$$

donc la somme de la série de fonctions n'est pas continue en 0. Absurde.

Donc la série de fonctions étudiée ne converge pas normalement sur  $[0, \pi]$ .

**Remarque**

On a le même problème en  $\pi$ .

Convergence normale sur tous les segments de  $]0, \pi[$ .

Soit  $0 < a < b < \pi$ , alors, comme la fonction  $\cos$  est décroissante sur  $[0, \pi]$ , on a, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$\cos(a) \geq \cos(x) \geq \cos(b), \quad \text{et donc} \quad 0 \leq |\cos(x)| \leq \max(|\cos(a)|, |\cos(b)|).$$

**Remarque**

En effet,  $\alpha \geq y \geq \beta$  donne  $|y| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$ , et cela se voit en distinguant trois cas :

- si  $\beta \geq 0$ , alors  $|\alpha| = \alpha$ ,  $|\beta| = \beta$  et  $|y| = y$ , et  $\max(\alpha, \beta) = \alpha$ , et l'inégalité est directe.
- si  $\alpha \leq 0$ ,  $|\alpha| = -\alpha$ ,  $|\beta| = -\beta$  et  $|y| = -y$ , donc on a  $-\beta \geq -y = |y| \geq -\alpha \geq 0$  et  $\max(-\alpha, -\beta) = -\beta$ , et l'inégalité est directe.
- si  $\beta \leq 0 \leq \alpha$ , alors  $|\alpha| = \alpha$ ,  $|\beta| = -\beta$ , et deux cas sont possibles : si  $y \in [0, \alpha]$ , alors  $|y| = y \leq \alpha = |\alpha| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$ , et si  $y \in [\beta, 0]$ , alors  $\beta \leq y \leq 0$ , soit  $-\beta = |\beta| \geq -y = |y| \geq 0$ , et donc  $|y| \leq |\beta| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$ .

Dans tous les cas, on a bien l'inégalité annoncée.

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|f_n(x)| \leq |\cos(x)|^n \leq \max(|\cos(a)|, |\cos(b)|)^n$$

(car la fonction  $t \mapsto t^n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ).

Alors, avec les notations précédentes, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \max(|\cos(a)|, |\cos(b)|)^n$$

et la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \max(|\cos(a)|, |\cos(b)|)^n$$

est une série géométrique convergente car de raison  $\max(|\cos(a)|, |\cos(b)|)$  avec  $0 \leq \max(|\cos(a)|, |\cos(b)|) < 1$  (puisque l'on a  $0 \leq |\cos(a)| < 1$  et  $0 \leq |\cos(b)| < 1$ , puisque  $a$  et  $b$  sont dans  $]0, \pi[$ ). Donc la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$$

converge (par critère de comparaison des séries à termes positifs), autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge normalement sur tout segment de  $]0, \pi[$ .

## Correction de l'exercice 6.18

## Énoncé p. 51

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Notons

$$f_n : x \in [0, 1[ \mapsto \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)},$$

alors la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $[0, 1[$  (comme quotient de deux polynômes, dont celui du dénominateur qui ne s'annule pas sur  $[0, 1[$ , puisque  $1 - x^n > 0$  pour tout  $x \in [0, 1[$ ), et pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{(nx^{n-1} - (n+1)x^n)(1-x^n) + nx^{n-1}(x^n - x^{n+1})}{n(1-x^n)^2} \\ &= \frac{x^{n-1}}{n(1-x^n)^2} \left( n - nx^n - (n+1)x + (n+1)x^{n+1} + nx^n - nx^{n+1} \right) \\ &= \frac{x^{n-1}}{n(1-x^n)^2} (n - (n+1)x + x^{n+1}) \end{aligned}$$

Notons alors  $P : x \in [0, 1[ \mapsto n - (n+1)x + x^{n+1}$ . Alors,  $P$  est une fonction polynomiale, donc dérivable, et pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a

$$P'(x) = (n+1)(x^n - 1) < 0,$$

donc la fonction  $P$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0, 1[$ . Comme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = n - (n+1) + 1 = 0,$$

on en déduit  $P > 0$  sur  $[0, 1[$ .

Donc  $f'_n > 0$  sur  $[0, 1[$ , et donc la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0, 1[$ .

Comme, pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a

$$f_n(x) = \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)} = \frac{x^n}{n} \frac{1}{1+x+\dots+x^{n-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{n^2},$$

(en reconnaissant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $x$  avec  $x \neq 1$ ), et  $f_n(0) = 0$  (car  $n \geq 1$ ), on en déduit que, pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$  (et en fait, la limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = \frac{1}{n^2}$  donne même qu'il y a égalité).

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, donc la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$  converge.

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[0, 1[$ .

## Correction de l'exercice 6.19

## Énoncé p. 51

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 \leq \left| \frac{e^{-nx_0^2}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

et la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ) et à termes positifs. Donc, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la

série numérique  $\sum_{n \geq 1} f_n(x_0)$  converge absolument, donc converge.

Donc la série de fonctions converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , autrement dit, la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ . Donc

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2},$$

or la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ). Donc par critère

de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$

converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur

$\mathbb{R}$ . En particulier, elle converge donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction  $f$  est alors continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . De plus comme la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ , et que  $+\infty$  « est une borne de  $\mathbb{R}$  », le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'_n(x) = \frac{-2xe^{-nx^2}}{n} \quad \text{et} \quad f''_n(x) = \frac{-2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2}.$$

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ , alors pour tout  $x \in [a, b]$ , on a :

$$|f'_n(x)| \leq \frac{2be^{-na^2}}{n} \leq 2be^{-na^2} \quad \text{et (par inégalité triangulaire)} \quad |f''_n(x)| \leq \frac{(2 + 4nb^2)e^{-na^2}}{n} \leq (2 + 4b^2)e^{-na^2}$$

Ces majorations ne dépendent pas de  $x$ , donc

$$\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq 2be^{-na^2} \quad \text{et} \quad \|f''_n\|_{\infty, [a, b]} \leq (2 + 4b^2)e^{-na^2}.$$

Or, les séries numériques  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2be^{-na^2}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (2 + 4b^2)e^{-na^2}$  sont des séries

géométriques convergentes (car de raison  $e^{-a^2}$ , avec  $e^{-a^2} \in ]-1, 1[$  car  $a > 0$ ).

Donc les séries de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f'_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f''_n$  convergent normalement, donc uniformément, sur  $[a, b]$ .

Donc, par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction  $f$  est de classe  $C^2$  sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  (par caractère « local » de la propriété « être de classe  $C^2$  »). De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2xe^{-nx^2}}{n} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f''_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2 e^{-nx^2} \right).$$

Enfin, la fonction  $f$  est paire et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

## Correction de l'exercice 6.20

## Énoncé p. 51

1. Si  $x = 0$ , la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} f_n(0) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge (série de Riemann divergente).

Si  $x \leq 0$  alors pour tout  $n \geq 1$  on a

$$\frac{e^{-nx}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0,$$

or la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge. Donc d'après le critère de comparaison

des séries à terme positif, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$  est divergente.

Si  $x > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{e^{-nx}}{n} = 0$$

par croissance comparée, donc

$$\frac{e^{-nx}}{n} = O_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge (Riemann,  $2 > 1$ ) et est à termes positifs. Donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$  est (absolument) convergente, donc  $f(x)$  existe.

Ainsi

$$D_f = ]0, +\infty[.$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  (car  $n > 0$ ). De plus, pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{-n}}{n} \leq e^{-n},$$

donc  $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} \leq e^{-n}$ . De plus, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n}$  est une série géométrique de raison  $e^{-1}$ , avec  $e^{-1} \in ]-1, 1[$ , donc est convergente. Donc la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[}$  converge, donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$

converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ . Comme  $+\infty$  « est une borne de  $[1, +\infty[$  », le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

**Autre méthode :** pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $x > 0$ ,

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-nx},$$

donc (puisque les séries convergent bien car  $x > 0$ ), par croissance de la somme, on a

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$ .

3. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ , et pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x > 0$ , on

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^{k-1} e^{-nx}.$$

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Comme  $\exp$  est une fonction croissante et positive sur  $\mathbb{R}$ , on a pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| = n^{k-1} e^{-nx} \leq n^{k-1} e^{-na},$$

par conséquent

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]} \leq n^{k-1} e^{-na}$$

(en fait, il y a même égalité, car  $a \in [a, b]$ ).

De plus, par croissance comparée, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 n^{k-1} e^{-na} = 0$ , donc

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ) et à termes positifs, donc par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]}$  converge, autrement dit la série de fonctions

$\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[a, b]$ .

Donc le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  (par « caractère local » de la propriété « être de classe  $C^\infty$  »).

De plus, pour tout entier naturel  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x > 0$ ,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k n^{k-1} e^{-nx}.$$

4. De la question précédente (pour  $k = 2$ ), on déduit : pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} \geq 0.$$

Donc la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ .

5. La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

(somme d'une série géométrique de raison  $e^{-x}$ , convergente car  $e^{-x} \in ]-1, 1[$  puisque  $x > 0$ ). En intégrant (c'est de la forme  $-\frac{u'}{u}$ ), on a :

les fonctions  $f$  et  $x \mapsto -\ln(1 - e^{-x})$  sont deux primitives de  $f'$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Comme  $\mathbb{R}_+^*$  est un intervalle**, il existe  $K \in \mathbb{R}$  avec, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = -\ln(1 - e^{-x}) + K$$

**(on n'oublie pas la constante quand on primitive!).**

Cherchons  $K$  : en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on obtient  $0 = 0 + K$ . Donc  $K = 0$ .

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = -\ln(1 - e^{-x}).$$

#### Correction de l'exercice 6.21

#### Énoncé p. 52

1. Soit  $x_0 > 0$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{n + n^2 x_0} = \frac{1}{x_0}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n + n^2 x_0} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ) et à termes positifs. Donc le théorème de convergence absolue par comparaison donne que la série définissant  $f(x)$  est (absolument) convergente. Donc  $f(x)$  existe pour  $x > 0$ .

#### Remarque

- (a) On peut aussi utiliser le critère d'équivalence, puisque  $\frac{1}{n + n^2 x_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x_0}$  d'après la limite précédente...
- (b)  $f(0)$  n'existe pas, mais  $f(x)$  existe pour tout  $x < 0$  dès que  $n + n^2 x \neq 0$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donc le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ .

2. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$f_n : x \in ]0, +\infty[ \mapsto \frac{1}{n + n^2 x} \in \mathbb{R}.$$

Soit  $a \in \mathbb{R}$  avec  $0 < a$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , on a

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{n + n^2 a} \leq \frac{1}{n^2 a},$$

(car  $a > 0$ ), donc

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2 a}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 a}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$  converge. Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[a, +\infty[$ .

Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction  $f$  est continue sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ , donc par « caractère local » de la continuité, sur  $\bigcup_{a > 0} [a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .

### 3. Calcul de la limite :

**Méthode 1 :** Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Or, à la question précédente, on a montré (en prenant  $a = 1$ ) que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ . De plus, «  $+\infty$  est une borne de  $[1, +\infty[$  ». Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

**Méthode 2 :** Pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $x > 0$ , on a

$$0 \leq \frac{1}{n + n^2 x} \leq \frac{1}{n^2 x}.$$

Donc, pour tout  $x > 0$ , en sommant des inégalités dans le même sens (par croissance de la somme),

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(car cette dernière série converge (Riemann,  $2 > 1$ )), et donc si  $x \rightarrow +\infty$ , le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

### Calcul de l'équivalent :

**Méthode 1 :** Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f_n(x) = \frac{1}{n^2}$ .

Or, pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$|x f_n(x)| = \frac{x}{n + n^2 x} \leq \frac{1}{n^2},$$

donc si on note  $g_n : x \mapsto x f_n(x)$ , on a montré

$$\|g_n\|_{\infty, [1, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_{\infty, [1, +\infty[}$  converge. Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ .

De plus, «  $+\infty$  est une borne de  $[1, +\infty[$  ». Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Comme  $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > 0$ , on en déduit

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{s}{x}}.$$

**Méthode 2 :** Notons  $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (on sait (?) que  $s = \frac{\pi^2}{6}$ ). Alors, pour tout  $x > 0$ ,

$$0 \leq \frac{s}{x} - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 x} - \frac{1}{n + n^2 x} \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + n^2 x)} \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(car cette dernière série converge (Riemann,  $3 > 1$ ), et car, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{n(n + n^2 x)} \leq \frac{1}{xn^3}$ ). Donc

$$\frac{s}{x} - f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{x^2} \right) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{x} \right),$$

soit

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{s}{x}}.$$

4. Soit  $x > 0$ . On pose  $h : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t+t^2x} = \frac{1}{t(1+tx)} \end{cases}$

La fonction  $h$  est continue (par morceaux), positive, décroissante (car dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , avec pour tout  $t > 0$ ,  $h'(t) = -\frac{1+2tx}{(t+t^2x)^2} \leq 0$ ).

Pour tout  $t > 0$  et  $x > 0$ , on a :

$$\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx} = \frac{1+tx}{t(1+tx)} - \frac{tx}{t(1+tx)} = \frac{1}{t(1+tx)}$$

en réduisant au même dénominateur.

Pour tout  $n \geq 2$ , par décroissance de  $h$  :

$$\text{pour tout } t \in [n-1, n], \text{ on a } n-1 \leq t \leq n \text{ donc } h(t) \geq h(n),$$

et

$$\text{pour tout } t \in [n, n+1], \text{ on a } n \leq t \leq n+1 \text{ donc } h(n) \geq h(t).$$

Donc, par croissance de l'intégrale (qui s'applique ici sur  $[n-1, n]$  ou  $[n, n+1]$  **car on a**  $n \geq 2$  ( $h$  n'est pas continue en 0, c'est pour cela qu'on ne prend pas le terme  $n = 1 \dots$ )),

$$\int_{n-1}^n \frac{1}{t(1+tx)} dt \geq \int_{n-1}^n \frac{1}{n(1+nx)} dt = \frac{1}{n(1+nx)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n(1+nx)} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n(1+nx)} dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t(1+tx)} dt$$

Ainsi en sommant pour  $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$  (avec  $N \geq 2$ ), on a :

$$\sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t(1+tx)} dt \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(1+nx)} \geq \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t(1+tx)} dt$$

Donc, si  $N \rightarrow +\infty$  (et en utilisant la relation de Chasles), **sous réserve d'existence de la limite**,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{1}{t(1+tx)} dt \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx)} \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^N \frac{1}{t(1+tx)} dt$$

soit en additionnant  $\frac{1}{1+x}$  (qui est le terme  $n = 1$  de la somme) :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{1}{t(1+tx)} dt + \frac{1}{1+x} \geq f(x) \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^N \frac{1}{t(1+tx)} dt + \frac{1}{1+x}$$

Calculons  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{1}{t(1+tx)} dt$  (c'est-à-dire  $\int_1^{\infty} \frac{1}{t(1+tx)} dt$ ). On a :

$$\begin{aligned} \int_1^N \frac{1}{t(1+tx)} dt &= \int_1^N \frac{1}{t} dt - \int_1^N \frac{x}{1+tx} dt \\ &= \ln(N) - \ln(1+Nx) + \ln(1+x) \\ &= -\ln\left(\frac{1+Nx}{N}\right) + \ln(1+x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(x) + \ln(1+x) \end{aligned}$$

donc la limite existe bien.

Par la même méthode de calcul, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^N \frac{1}{t(1+tx)} dt = -\ln(x) - \ln(2) + \ln(1+2x)$$

(et la limite existe bien là aussi). On a donc : pour tout  $x > 0$ ,

$$-\ln(x) + \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \geq f(x) \geq -\ln(x) - \ln(2) + \ln(1+2x) + \frac{1}{1+x}.$$

Donc par double encadrement, on a  $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)}$  (on divise par  $-\ln(x)$  les inégalités précédentes et on applique le théorème des gendarmes).

## Correction de l'exercice 6.22

## Énoncé p. 52

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Si  $x_0 > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 n^{x_0} e^{-nx_0} = 0$$

par croissance comparée (car  $x_0 > 0$ ). On a donc :

$$n^{x_0} e^{-nx_0} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

or la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série convergente (Riemann,  $2 > 1$ ) à termes positifs. Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} n^{x_0} e^{-nx_0}$  converge, autrement dit  $S(x_0)$  est bien

défini.

Si  $x_0 < 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{x_0} e^{-nx_0} = +\infty \neq 0$$

par croissance comparée, donc la série numérique  $\sum_{n \geq 1} n^{x_0} e^{-nx_0}$  diverge grossièrement, en particulier  $S(x_0)$  n'existe pas.

Si  $x_0 = 0$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^0 e^{-n \cdot 0} = 1$  qui ne tend pas vers 0, donc de même, il y a divergence grossière, et  $S(0)$  n'existe pas.

Ainsi

$$D_S = ]0, +\infty[.$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto n^x e^{-nx} \in \mathbb{R}.$$

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $x \in [a, b]$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$|f_n(x)| \leq n^b e^{-na}.$$

On a donc

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq n^b e^{-na},$$

et la série numérique  $\sum_{n \geq 1} n^b e^{-na}$  converge (car  $a > 0$ , idem qu'à la première question), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$  converge.

Autrement dit, la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[a, b]$ .

Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction  $S$  est continue sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc par « caractère local » de la continuité, sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(n) - nx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln(n) - n)} = 0$$

car  $\ln(n) - n < 0$  (en effet,  $\ln(u) \leq u - 1 < u$  pour tout  $u > 0$ ).

Montrons que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudions les variations de  $f_n$  : la fonction  $f_n : x \mapsto e^{x \ln(n) - nx}$  est de classe  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$ , et pour tout  $x \in [1, +\infty[$ ,

$$f'_n(x) = (\ln(n) - n) e^{x \ln(n) - nx} \leq 0.$$

Donc la fonction  $f_n$  est décroissante sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

Le tableau de variations de la fonction  $f_n$  donne alors

$$\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = f_n(1).$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} f_n(1)$  converge (cf. question 1), donc la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[}$  converge, d'où la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ .  
Enfin,  $+\infty$  est « une borne de  $[1, +\infty[$  », donc le théorème de la double limite s'applique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

## Correction de l'exercice 6.23

## Énoncé p. 52

1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$1 + \frac{1}{2}e^{-x} > 1 > 0,$$

donc  $f(x)$  existe. Puis, par composition de fonctions de classe  $C^\infty$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2(1 + \frac{1}{2}e^{-x})},$$

et donc pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{2^{n+1}} = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^p e^{-px}}{2^p},$$

car on a reconnu la somme d'une série géométrique de raison  $-\frac{1}{2}e^{-x}$ , avec  $-\frac{1}{2}e^{-x} \in ]-\frac{1}{2}, 0[ \subset ]-1, 1[$  pour  $x \geq 0$  (car  $x \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$ ).

## Remarque

C'est même valable tant que  $\frac{1}{2}e^{-x} < 1$ , soit pour  $x > -\ln(2)$ .

2) La fonction  $f'$  est **continue** sur  $\mathbb{R}$ , et la fonction  $f$  est une primitive de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , donc pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^x f'(t) dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = f(x) - \ln(3) + \ln(2).$$

Puis, fixons  $x \in \mathbb{R}_+$ . Notons, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f_p : t \in [0, x] \mapsto \frac{(-1)^p e^{-pt}}{2^p},$$

alors la fonction  $f_p$  est continue sur  $[0, x]$ .

Montrons que la série de fonctions  $\sum_{p \geq 1} f_p$  converge normalement (donc uniformément) sur  $[0, x]$  : pour tout  $t \in [0, x]$ , on a

$$0 \leq |f_p(t)| = \frac{e^{-pt}}{2^p} \leq \frac{1}{2^p}$$

(car  $t \geq 0$ , car  $x \geq 0$ ), donc

$$0 \leq \|f_p\|_{\infty, [0, x]} \leq \frac{1}{2^p}.$$

Or la série numérique  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^p}$  converge (série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  avec  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ ), donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \|f_p\|_{\infty, [0, x]}$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} f_p$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, x]$ .

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3) - \ln(2) + \int_0^x \sum_{p=1}^{\infty} f_p(t) dt \\ &= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^x f_p(t) dt \\ &= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \int_0^x e^{-pt} dt \\ &= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^x \\ &= \boxed{\ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1 - e^{-px}}{p}} \end{aligned}$$

3) Pour tout  $x > 0$ , par inégalité triangulaire (et car les séries suivantes convergent), on a

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p 2^p} e^{-px} \right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p 2^p} e^{-px} \leq \sum_{p=1}^{\infty} e^{-px} = \frac{1}{1 - e^{-x}} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison  $e^{-x}$ , avec  $e^{-x} \in ]0, 1[$  pour  $x > 0$ ) (on fait attention : la somme de la série géométrique part de  $p = 1$ , et pas  $p = 0$ ...). Donc le théorème des gendarmes conclut.

#### Remarque

1. On peut aussi majorer ainsi : pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p 2^p} e^{-px} \right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p 2^p} e^{-x} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} e^{-x} = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2. On peut aussi utiliser le théorème de la double limite, car la série de fonctions  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p 2^p} e^{-px}$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ , mais c'est plus long à rédiger que la simple majoration ci-dessus...

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1}{p}.$$

Or, de la définition de  $f$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-x} \right) = 0.$$

Donc, par unicité de la limite, on a  $\ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1}{p} = 0$ , et donc pour tout  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{-e^{-px}}{p} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2^p} \frac{e^{-px}}{p}$$

d'après la question précédente.

## Correction de l'exercice 6.24

## Énoncé p. 52

Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{cases}$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 |f_n(x_0)| = \frac{1}{x_0^2} \quad \text{donc} \quad |f_n(x_0)| = O_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right),$$

or la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ) et à termes positifs.

Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison (car  $x_0 > 0$ ), la série numérique  $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$  est absolument convergente, donc convergente.

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Étudions la continuité.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ , alors pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 + a^2}$$

(même pour  $n = 0$ , car on suppose  $a > 0$ ), donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

De plus, la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + a^2}$  est convergente (car  $\frac{1}{n^2 + a^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ ),

donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$  converge.

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique : la fonction  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  est continue sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  par « caractère local » de la continuité.

**Autre façon :**

On a  $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Puis, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  (et pas juste  $\mathbb{R}_+^*$ ), et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},$$

puis

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann,  $2 > 1$ ), par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$  converge. Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}_+$ .

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne alors que la fonction

$$T : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par addition, la fonction

$$S : x \mapsto T(x) + \frac{1}{x^2}$$

est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

#### Remarque

1. On constate ainsi que le problème en 0 provient uniquement de  $f_0$ .
2. La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  ne peut pas converger normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$ , car la fonction  $f_0$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

#### Correction de l'exercice 6.25

#### Énoncé p. 52

Pour tout entier  $n \geq 2$  et  $x \in [0, 1]$ , on a

$$n - x \geq 2 - 1 = 1 > 0 \quad \text{et} \quad n + x \geq 2 + 0 = 2 > 0,$$

donc

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

existe.

Puis, à  $x \in ]0, 1]$  fixé,

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 2} \frac{2x}{n^2}$  converge (Riemann,  $2 > 1$ ), est à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique  $\sum_{n \geq 2} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$  converge, donc  $f(x)$  existe.

Enfin,  $f(0)$  existe, car c'est la somme de la série nulle.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ , notons

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

Alors la fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$  (comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ ), et pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{n^2 - 1},$$

donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2 - 1}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{n^2 - 1}$  converge (série à terme positif,  $\frac{2}{n^2 - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} \dots$ ), donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 2} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, 1]$ .

Donc, par le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  (donc l'intégrale de l'énoncé existe), et par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \left( \frac{1}{n-t} - \frac{1}{n+t} \right) dt = \sum_{n=2}^{\infty} [-\ln(n-t) - \ln(n+t)]_0^1 = \sum_{n=2}^{\infty} (2 \ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)).$$

Or, pour tout entier  $N \geq 2$ ,

$$\sum_{n=2}^N (2 \ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)) = \sum_{n=2}^N (\ln(n) - \ln(n-1)) + \sum_{n=2}^N (\ln(n) - \ln(n+1)) = \ln(N) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(N+1)$$

(en reconnaissant des sommes télescopiques). Et donc

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N (2 \ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \right) = \boxed{\ln(2)}.$$

#### Correction de l'exercice 6.26

#### Énoncé p. 52

Notons

$$f : x \mapsto x^{-x} = e^{-x \ln(x)}.$$

Alors la fonction  $f$  est définie et continue sur  $]0, 1]$ , par composition de fonctions usuelles. Puis,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

car par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$  (et car  $\exp$  est continue en 0). Donc on prolonge la fonction  $f$  par continuité en 0, en posant  $f(0) = 1$  (d'où la célèbre convention  $0^0 = 1$ ). Donc la fonction  $f$  ainsi définie est continue sur  $[0, 1]$ , donc l'intégrale  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^{-x} dx$  est bien définie.

Pour tout  $x \in ]0, 1]$ , on a

$$x^{-x} = e^{-x \ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$$

(car  $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$  pour tout réel  $u \in \mathbb{R}$ ).

Notons alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n : x \in ]0, 1] \mapsto (-x \ln(x))^n.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  continue sur  $]0, 1]$  par produit de fonctions continues, et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

(car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ ), et donc on prolonge la fonction  $f_n$  par continuité en 0 en posant  $f_n(0) = 0$ . Pour  $n = 0$ , on a  $f_0 : x \mapsto 1$  qui se prolonge naturellement par continuité en 0 en posant  $f_0(0) = 1$ .

On a alors, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!}.$$

En effet, pour  $x \in ]0, 1]$ , c'est l'égalité vue précédemment :

$$x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!},$$

et pour  $x = 0$ , c'est car

$$1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n!}.$$

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, 1]$ .

En effet, la fonction  $f_0$  (constante égale à 1) est bornée sur  $[0, 1]$  par 1, puis pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f_n = (f_1)^n$$

(en distinguant  $x = 0$  et  $x \in ]0, 1]$ ). Or,  $f_1$  est une fonction continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc est bornée par un réel  $M > 0$  : pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$|f_1(x)| \leq M.$$

Donc, par élévation à la puissance  $n$ , on a pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|f_n(x)| \leq M^n.$$

Cela reste vrai pour  $n = 0$  avec la convention usuelle  $M^0 = 1$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty} \leq \frac{M^n}{n!}.$$

Comme la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}$  converge (c'est une série exponentielle), par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}$  converge, autrement dit, la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, 1]$ .

#### Remarque

Si on fait une étude de fonction, on constate que la fonction  $f_1$  est positive, et prend son maximum en  $x = e^{-1}$ , donc  $M = f_1(e^{-1}) = e^{-1}$  convient. Mais on n'a pas besoin d'être aussi précis.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, et donc on a

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln(x))^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n(x) dx.$$

Pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ , notons

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p(x) dx$$

(c'est une intégrale convergente, par le théorème de convergence absolue par comparaison, car la fonction  $x \mapsto x^n \ln^p(x)$  est continue sur  $]0, 1]$ , et négligeable devant  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  en 0 par croissance comparée, alors que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  (Riemann,  $\frac{1}{2} < 1$ )).

Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions

$$u : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \ln^p(x)$$

sont de classe  $C^1$  sur  $]0, 1]$ , de dérivées respectives

$$u' : x \mapsto x^n \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto \frac{p}{x} \ln^{p-1}(x).$$

Enfin,

$$u(x)v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln^p(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

(par croissance comparée, car  $n+1 > 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ), donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et comme on sait que l'intégrale

$$I_{n,p} = \int_0^1 u'(x)v(x) dx$$

converge, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^1 u(x)v'(x) dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{p}{x} \ln^{p-1}(x) dx$$

converge, et de plus on a

$$I_{n,p} = \underbrace{\left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln^p(x) \right]_0^1}_{=0-0} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{p}{x} \ln^{p-1}(x) dx = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

Par récurrence directe sur  $p \in \mathbb{N}$  (à  $n \in \mathbb{N}$  fixé), on en déduit

$$I_{n,p} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} I_{n,0}$$

pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ . Or,  $I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ . D'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Donc

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_{n,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}.$$

Correction de l'exercice 6.27

Énoncé p. 52

1) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(t)$  existe (car  $n^2 + 1$  ne s'annule pas), et

$|u_n(t)| \leq \frac{1}{n^2+1}$  car  $e^{-nt^2} \leq 1$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$  converge (par critère de comparaison des séries à termes positifs, car on a  $0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$  pour tout  $n \geq 1$  et la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  qui converge (Riemann,  $2 > 1$ )), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_\infty$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, cette série de fonctions converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Comme pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est continue (composition de la fonction exponentielle avec un polynôme, puis multiplication avec une constante), et que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}$ ,

le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction  $f$  (la somme de cette série de fonctions) est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2)  $u_0 = 1$ , donc la fonction  $u_0$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et  $u'_0 = 0$ , donc  $\|u'_0\|_\infty = 0$ .

Puis, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  (à une constante près, c'est une exponentielle), et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$u'_n(t) = \frac{-2nt}{n^2+1} e^{-nt^2} \quad \text{et} \quad u''_n(t) = -\frac{2n}{n^2+1} (1 - 2nt^2) e^{-nt^2},$$

donc  $u''_n(t)$  est du signe de  $2nt^2 - 1$ .

Donc la fonction  $u'_n$  est décroissante sur l'intervalle  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$  et croissante sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty\right]$ .

Or,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'_n(t) = 0$  (par croissance comparée, car  $n \geq 1$ ) et  $u'_n(0) = 0$ , d'où le tableau de variations :

| $t$        | 0 | $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ | $+\infty$    |
|------------|---|-----------------------|--------------|
| $u''_n(t)$ | − | 0                     | +            |
| $u'_n(t)$  | 0 | $\searrow$            | $\nearrow$ 0 |
| $u_n(t)$   |   |                       |              |

Donc, pour  $n \geq 1$ ,

$$\|u'_n\|_\infty = -u'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{\sqrt{2n}}{n^2+1} e^{-\frac{1}{2}}.$$

#### Remarque

Cette formule reste vraie pour  $n = 0$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Puis,

$$\|u'_n\|_\infty = \frac{\sqrt{2n}}{n^2+1} e^{-\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

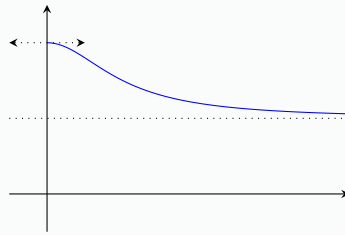
pour  $n \geq 1$  (et  $\|u'_0\|_\infty = 0$ , l'important est que  $u'_0$  soit bornée), et la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  converge (Riemann,  $\frac{3}{2} > 1$ ), donc le critère d'équivalence des séries à termes

positifs conclut : la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \|u'_n\|_\infty$  converge, donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}_+$ .

Comme enfin la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ , le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2nt}{n^2 + 1} e^{-nt^2}.$$

4) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f'(t) < 0$  pour  $t > 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$ . De plus,  $f'(0) = 0$ , d'où une tangente horizontale à la courbe représentative de  $f$  en 0. Enfin, la fonction  $f$  est décroissante et positive, donc minorée par 0, donc admet une limite finie en  $+\infty$  (par le théorème de la limite monotone), d'où une allure de courbe :



5)

**Méthode 1 :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

De plus, on a vu que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}$  (cf. question 1). Comme «  $+\infty$  est une borne de  $\mathbb{R}$  », le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1.$$

**Méthode 2 :** le terme en  $n = 0$  vaut 1 (ne dépend pas de  $t$ ), et sinon on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq u_n(t) \leq e^{-nt^2}$$

(car  $n^2 + 1 \geq 1$ ), ce qui donne (en sommant des inégalités dans le même sens, et car les séries convergent), pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$  :

$$1 = u_0(t) \leq u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = f(t) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t^2})^n = \frac{1}{1 - e^{-t^2}}$$

(car on reconnaît une série géométrique convergente, puisque de raison  $e^{-t^2}$ , et qu'on a toujours  $e^{-t^2} \in ]0, 1[$  pour  $t \neq 0$ ). Si on fait tendre  $t \rightarrow +\infty$ , le théorème des gendarmes donne la limite voulue.

**Autre majoration possible :** pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-nt^2} \leq e^{-t^2}$ , et donc

$$0 \leq f(t) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt^2}}{n^2 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{n^2 + 1} = K e^{-t^2},$$

en notant  $K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$  (qui est un réel, car la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1}$  converge).

Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} K e^{-t^2} = 0$ , le théorème des gendarmes donne  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) - 1) = 0$ .

6) Pour l'approximation, on veut encadrer  $R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$  (puisque  $f(0) - \sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1} = R_{100}$ ). Pour cela, on utilise une comparaison série/intégrale : pour  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $t \in [n, n+1]$ , on a (car la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$  est clairement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ ) les inégalités :

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Par croissance de l'intégrale (« les bornes sont dans le bon sens »), on a alors

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2+1} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2+1} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2+1} dt = \frac{1}{n^2+1}$$

En sommant l'inégalité de gauche de 100 à  $N$  (pour  $N \in \mathbb{N}$  avec  $N \geq 100$ ), on a par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=101}^{N+1} \frac{1}{k^2+1} = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \sum_{n=100}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2+1} dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_{100}^{N+1} \frac{dt}{t^2+1},$$

et si  $N \rightarrow +\infty$  (comme la série et l'intégrale considérée convergent), on a

$$R_{100} \leq \int_{100}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}.$$

Or, cette intégrale se calcule :

$$\int_{100}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan(t)]_{100}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(100) = \arctan\left(\frac{1}{100}\right)$$

(car il est bien connu que  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$  si  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ...).

Or,  $\arctan$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ , donc par inégalité des accroissements finis, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\arctan(x) = \arctan(x) - \arctan(0) \leq 1 \times (x - 0) = x.$$

Donc

$$\arctan\left(\frac{1}{100}\right) \leq \frac{1}{100}, \quad \text{puis} \quad R_{100} \leq \frac{1}{100},$$

qui est bien ce que l'on voulait ( $R_{100} \geq 0$  est direct).

#### Remarque

Ici, il y a une astuce qui permet d'aller beaucoup plus vite : pour tout  $n \geq 101$ , on a  $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2-n}$ , donc

$$0 \leq R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \sum_{n=101}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=101}^N \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{101-1} - \frac{1}{N} \right) =$$

par somme télescopique. Ce n'est évidemment pas exigible de trouver cette astuce.

## Correction de l'exercice 6.28

## Énoncé p. 53

Remarquons déjà que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n + n^3 x^2 \geq n > 0$ , donc  $f_n(x)$  existe.

Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 x^2}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3 x^2}$  est une série de Riemann convergente, car  $3 > 1$ , à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  converge. D'où la convergence simple sur  $\mathbb{R}^*$ .

Puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f'_n(x) = \frac{-2n^3 x}{(n + n^3 x^2)^2},$$

donc  $f'_n < 0$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ , donc la fonction  $f_n$  est décroissante (strictement) sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \frac{1}{n},$$

on en déduit

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge (série harmonique), donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  **ne** converge **pas** normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit ensuite  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ . Alors pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $0 < a \leq x \leq b$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme la fonction  $f_n$  est décroissante et positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a

$$f_n(a) \geq f_n(x) \geq 0.$$

Donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq f_n(a)$$

(en fait, il y a égalité). Comme la série numérique  $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$  converge (vu au début de l'exercice, car  $a > 0$ ), la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  est continue sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  par « caractère local » de la continuité.

## Correction de l'exercice 6.29

## Énoncé p. 53

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n : t \mapsto \ln(1 + e^{-nt}).$$

La fonction  $u_n$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , car la fonction exponentielle est positive sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

Si  $t = 0$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln(1 + e^{-n \cdot 0}) = \ln(2)$  qui ne tend pas vers 0 si  $n \rightarrow +\infty$ , donc qui est le terme d'une série grossièrement divergente.

Si  $t < 0$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\ln(1 + e^{-nt}) \geq \ln(2) > 0$$

donc là encore, on a divergence grossière (*l'expression  $\ln(1 + e^{-nt})$  ne peut pas tendre vers 0 si  $n \rightarrow +\infty$* ).

Si  $t > 0$ , on a

$$\ln(1 + e^{-nt}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-nt} = (e^{-t})^n$$

(car  $e^{-nt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ) et la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (e^{-t})^n$  est une série géométrique de raison  $e^{-t}$ , convergente car  $e^{-t} \in ]-1, 1[$  (car  $t > 0$ ), et à termes positifs. Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1 + e^{-nt})$  converge, autrement dit  $S(t)$  existe.

On a donc

$$D_S = \mathbb{R}_+^*.$$

## 2. Méthode 1 : Une approche directe.

Soit  $(t_0, t_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , supposons  $t_0 > t_1$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $-nt_0 < -nt_1$ , et donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ ,

$$e^{-nt_0} < e^{-nt_1},$$

puis par stricte croissance du logarithme

$$u_n(t_0) = \ln(1 + e^{-nt_0}) < \ln(1 + e^{-nt_1}) = u_n(t_1)$$

(ce que l'on aurait pu obtenir en étudiant les variations de  $u_n$  grâce au signe de sa dérivée...). Donc (par sommation d'inégalités dans le même sens), pour tout  $N \in \mathbb{N}$  avec  $N \geq 2$ ,

$$\sum_{n=2}^N u_n(t_0) < \sum_{n=2}^N u_n(t_1).$$

En faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$  (les séries considérées convergent, grâce à la question 1 et car  $t_0 > 0, t_1 > 0$ ), on en déduit

$$S(t_0) - u_1(t_0) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(t_0) \leq \sum_{n=2}^{\infty} u_n(t_1) = S(t_1) - u_1(t_1)$$

(en effet, à la limite une inégalité stricte devient large). Enfin,  $u_1(t_0) < u_1(t_1)$ , donc par addition d'inégalités dans le même sens,

$$S(t_0) = (S(t_0) - u_1(t_0)) + u_1(t_0) < (S(t_1) - u_1(t_1)) + u_1(t_1) = S(t_1).$$

Donc la fonction  $S$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Méthode 2 :** On cherche les variations de  $S$  par l'étude de  $S'$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$u'_n(t) = \frac{-ne^{-nt}}{1 + e^{-nt}}.$$

Pour tout  $a > 0$ , pour tout  $t \in [a, +\infty[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$|u'_n(t)| = \frac{ne^{-nt}}{1 + e^{-nt}} \leq ne^{-nt} \leq ne^{-na}.$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq \|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq ne^{-na},$$

puis

$$0 \leq n^2 \|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq n^3 e^{-na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissance comparée (**car**  $a > 0$ ), donc le théorème des gendarmes donne

$$\|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge (Riemann,  $2 > 1$ ) et est à termes positifs, donc par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[a, +\infty[$ .

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors et donne que la fonction  $S$  est de classe  $C^1$  sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ , donc par caractère local de la propriété « être de classe  $C^1$  », sur  $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ , et de plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$S'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nt}}{1 + e^{-nt}} < 0.$$

Donc la fonction  $S$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. **Méthode 1 :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t) = \ln(1) = 0$  par continuité de la fonction  $\ln$  en 1.

Puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $t \in [1, +\infty[$ , on a  $-nt \leq -n$ , donc par croissance et positivité de la fonction  $\exp$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$$0 \leq e^{-nt} \leq e^{-n} \quad \text{puis} \quad 1 \leq 1 + e^{-nt} \leq 1 + e^{-n}.$$

Enfin, par croissance de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit

$$0 = \ln(1) \leq \ln(1 + e^{-nt}) = u_n(t) \leq \ln(1 + e^{-n}) = u_n(1)$$

(en fait, on a directement ceci en exploitant que la fonction  $u_n$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puisque  $u'_n \leq 0$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ ). Donc

$$0 \leq \|u_n\|_{\infty, [1, +\infty[} \leq u_n(1).$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} u_n(1)$  converge (cf. question 1, car  $1 > 0$ ), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \|u_n\|_{\infty, [1, +\infty[}$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[1, +\infty[$ .

Enfin, «  $+\infty$  est une borne de  $[1, +\infty[$  ».

Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

**Méthode 2 : par inégalité.**

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq \ln(1 + e^{-nt}) \leq e^{-nt}$$

(car  $e^{-nt} > 0 > -1$ , et que l'on sait, pour tout  $u > -1$ , que  $\ln(1 + u) \leq u$ ), alors en sommant des inégalités dans le même sens (et car les séries qui interviennent convergent), on a

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \leq S(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

donc le théorème des gendarmes conclut :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0}.$$

4. Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose

$$\phi_t : u \mapsto \ln(1 + e^{-ut})$$

qui est une fonction continue et décroissante (comme à la question 2) sur  $\mathbb{R}_+$ . On a donc pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $u \in [k, k+1]$  :

$$\phi_t(u) \leq \phi_t(k),$$

et pour tout  $u \in [k-1, k]$ ,

$$\phi_t(k) \leq \phi_t(u).$$

Alors, par croissance de l'intégrale sur  $[k, k+1]$  pour la première inégalité, sur  $[k-1, k]$  pour la seconde (les bornes « étant bien dans le bon sens »), on a :

$$\int_k^{k+1} \phi_t(u) du \leq \int_k^{k+1} \phi_t(k) du = \phi_t(k) = u_k(t) = \phi_t(k) = \int_{k-1}^k \phi_t(k) du \leq \int_{k-1}^k \phi_t(u) du$$

En sommant les inégalités (et par la relation de Chasles) pour  $k$  variant de 1 à  $n$  (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ), on a :

$$\int_1^{n+1} \phi_t(u) du \underset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \phi_t(u) du \leq \sum_{k=1}^n u_k(t) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \phi_t(u) du \underset{\text{Chasles}}{=} \int_0^n \phi_t(u) du$$

Calcul de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \phi_t(u) du$  :

On effectue le changement de variable  $v = e^{-tu}$  : la fonction

$$u \mapsto e^{-tu}$$

est de classe  $C^1$  sur  $[0, n]$ , on a «  $dv = -te^{-tu} du$  » donc «  $\frac{-dv}{tv} = du$  ». D'où le théorème de changement de variable donne :

$$\int_0^n \phi_t(u) du = \int_1^{e^{-tn}} \frac{\ln(1+v)}{tv} (-1) dv = \frac{1}{t} \int_{e^{-tn}}^1 \frac{\ln(1+v)}{v} dv.$$

Notons  $h$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $h(0) = 1$  et  $h(v) = \frac{\ln(1+v)}{v}$  pour  $v \in ]0, 1]$ . Elle est continue sur  $]0, 1]$ , et continue en 0 car  $\ln(1+v) \underset{v \rightarrow 0}{\sim} v$ , donc continue sur le segment  $[0, 1]$ . La fonction  $y \mapsto \int_y^1 h(v) dv$  est alors continue

sur  $[0, 1]$  (c'est l'opposée d'une primitive de  $h$ , à une constante près), et comme  $e^{-tn} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on obtient

$$\int_0^n \phi_t(u) du \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{C}{t} \quad \text{en notant} \quad C = \int_0^1 h(v) dv.$$

De même, par la relation de Chasles,

$$\int_1^{n+1} \phi_t(u) du = \int_0^{n+1} \phi_t(u) du - \int_0^1 \phi_t(u) du \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{C}{t} - \int_0^1 \phi_t(u) du,$$

et

$$0 \leq \int_0^1 \phi_t(u) du \leq \ln(2)$$

par croissance de l'intégrale (car  $0 \leq \ln(1 + e^{-ut}) \leq \ln(2)$  pour tout  $u \in [0, 1]$ ).

Enfin,  $\sum_{k=1}^n u_k(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S(t)$  d'après la question 1. En passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans l'encadrement des sommes partielles, on a donc

$$\frac{C}{t} - \ln(2) \leq S(t) \leq \frac{C}{t}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .

La fonction  $h$  est continue, positive et non nulle sur  $[0, 1]$  (car  $h(0) = 1$ ), donc par stricte positivité de l'intégrale,  $C > 0$ . En divisant l'encadrement par  $\frac{C}{t} > 0$ , on obtient, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$1 - \frac{t \ln(2)}{C} \leq \frac{S(t)}{C/t} \leq 1,$$

et le théorème des gendarmes donne

$$S(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{C}{t}.$$

#### Correction de l'exercice 6.30

#### Énoncé p. 53

On peut supposer  $r \in ]-1, 1[$  au lieu de  $0 \leq r < 1$  pour les quatre premières questions, ce qu'on va faire dans la correction (il y aura juste  $|r|$  au lieu de  $r$  à certaines majorations...).

1) Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n : x \in ]-1, 1[ \mapsto \frac{x^n}{n}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$|u_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n} \right| \leq |x|^n$$

et la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$  est une série géométrique de raison  $|x|$ , convergente car  $|x| \in ]-1, 1[$ . Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la

série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$  est absolument convergente, donc convergente. Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ , et pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$u'_n(x) = x^{n-1}.$$

Soit  $a \in [0, 1[$ . Pour tout  $x \in [-a, a]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $|x| \leq a$ , puis

$$|u'_n(x)| = |x^{n-1}| = |x|^{n-1} \leq a^{n-1},$$

et donc

$$0 \leq \|u'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^{n-1}.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^{n-1}$  est une série géométrique de raison  $a$ , convergente car  $a \in ] -1, 1[$ , donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|u'_n\|_{\infty, [-a, a]}$  converge, autrement dit la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u'_n$  converge normalement sur  $[-a, a]$ .

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors, et donne que la fonction  $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[-a, a]$ , pour tout  $a \in [0, 1[$ , donc par caractère local de la propriété « être de classe  $C^1$  », sur  $\bigcup_{a \in [0, 1[} [-a, a] = ] -1, 1[$ . De plus, pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{k=n-1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Donc les fonctions  $f$  et  $x \mapsto -\ln(1-x)$  sont deux primitives de  $f'$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$ , donc il existe  $K \in \mathbb{R}$  avec

$$f : x \mapsto -\ln(1-x) + K.$$

Or,  $f(0) = 0$ , donc  $K = 0$ , et donc pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\boxed{f(x) = -\ln(1-x)}.$$

2) Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq |r^n \sin(n\theta)| \leq |r|^n$$

et la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |r|^n$  est une série géométrique de raison  $|r|$ , convergente car  $|r| \in ] -1, 1[$ . Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} r^n \sin(n\theta)$  converge absolument, donc converge.

On peut donc définir

$$g : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta) \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq |r^n e^{in\theta}| \leq |r|^n,$$

donc de même, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} r^n e^{in\theta}$  converge absolument, donc converge.

Puis, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} \right) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \right)$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison  $re^{i\theta}$ , (absolument) convergente car  $|re^{i\theta}| = |r| < 1$ .

Donc, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , en multipliant/divisant par le conjugué du dénominateur,

$$g(\theta) = \operatorname{Im} \left( \frac{1 - re^{-i\theta}}{(1 - r \cos(\theta))^2 + r^2 \sin^2(\theta)} \right) = \boxed{\frac{r \sin(\theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta)}}.$$

3) Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \leq \left| r^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \right| \leq |r|^n,$$

donc de même qu'à la question 2, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$  converge absolument, donc converge.

On peut donc définir

$$\phi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \in \mathbb{R}.$$

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$v_n : \theta \in \mathbb{R} \mapsto r^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $v_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$v'_n(\theta) = -r^n \sin(n\theta).$$

On a vu, au début de la correction de cette question, que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a

$$|v'_n(\theta)| = |-r^n \sin(n\theta)| \leq |r|^n,$$

donc

$$0 \leq \|v'_n\|_{\infty} \leq |r|^n.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |r|^n$  converge (déjà vu), donc par critère de comparaison

des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|v'_n\|_{\infty}$  converge, autrement dit

la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors : la fonction  $\phi$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v'_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -r^n \sin(n\theta) = 0 - g(\theta) = -\frac{r \sin(\theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta)}$$

(le 0 correspond au terme  $n = 0$  de la somme définissant  $g$ ).

Comme  $\mathbb{R}$  est un intervalle, on en déduit qu'il existe  $K \in \mathbb{R}$  avec

$$\phi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos(\theta) + r^2) + K$$

(on a reconnu une forme du type  $\frac{u'}{u}$  à constante près, que l'on sait donc primitiver directement).

Comme  $\phi(0) = -\ln(1 - r)$  par la question 1 (car  $r \in ]-1, 1[$ ), on a

$$K = \frac{1}{2} \ln((1 - r)^2) - \ln(1 - r) = 0.$$

Donc pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\boxed{\phi(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos(\theta) + r^2)}.$$

4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $v_n$  est continue sur  $[0, 2\pi]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on a

$$|v_n(\theta)| \leq \frac{|r|^n}{n} \leq |r|^n,$$

donc

$$\|v_n\|_{\infty, [0, 2\pi]} \leq |r|^n.$$

Or, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |r|^n$  converge (déjà vu), donc par critère de comparaison

des séries à termes positifs, la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|v_n\|_{\infty, [0, 2\pi]}$  converge, autrement

dit la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, 2\pi]$ .

Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment s'applique alors :

$$\int_0^{2\pi} \phi(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} v_n(\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r^n}{n} \cos(n\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \left[ \frac{\sin(n\theta)}{n} \right]_0^{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos(\theta) + r^2) d\theta = \int_0^{2\pi} -2\phi(\theta) d\theta = -2 \times 0 = \boxed{0}.$$

5) Soit  $r \in \mathbb{R}$  avec  $|r| > 1$ . L'idée est de mettre  $r^2$  en facteur dans le  $\ln$  : pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\ln(1 - 2r \cos(\theta) + r^2) = \ln(r^2) + \ln\left(1 - 2\frac{1}{r} \cos(\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right)$$

(donc l'expression de gauche existe et a une intégrale convergente sur  $[0, 2\pi]$ , puisque c'est le cas pour celle de droite par ce qui précède, puisque  $|\frac{1}{r}| < 1$ ), puis la linéarité de l'intégrale donne alors

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos(\theta) + r^2) d\theta = \ln(r^2) 2\pi + \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\frac{1}{r} \cos(\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right) d\theta = \ln(r^2) 2\pi = \boxed{4\pi \ln |r|}.$$

## Correction de l'exercice 6.31

## Énoncé p. 53

1) Soit  $x \in [0, 1]$ . Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $x^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et comme  $f$  est continue en 0,  $g_n(x) = f(x^n) \rightarrow f(0)$ . Si  $x = 1$ , alors  $g_n(1) = f(1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . La suite  $(g_n)$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = f(0) \text{ si } x \in [0, 1[ \quad \text{et} \quad g(1) = f(1).$$

2) Si  $f$  est constante, égale à  $c$ , alors  $g_n = c$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et la suite  $(g_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction constante  $c$ .

Réciproquement, supposons que  $(g_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ . Sa limite uniforme est alors sa limite simple  $g$  : pour  $n$  assez grand,  $g_n - g$  est bornée sur  $[0, 1]$  et  $\|g_n - g\|_{\infty, [0, 1]} \rightarrow 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $x \mapsto x^n$  est une bijection de  $[0, 1[$  sur  $[0, 1[$ , de réciproque  $t \mapsto t^{1/n}$ . Donc, quand  $x$  décrit  $[0, 1[$ ,  $t = x^n$  décrit  $[0, 1[$ , et

$$\sup_{x \in [0, 1[} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} |f(x^n) - f(0)| = \sup_{t \in [0, 1[} |f(t) - f(0)|.$$

Notons  $M$  cette dernière quantité, qui ne dépend pas de  $n$  et qui est finie car  $f$  est bornée sur  $[0, 1]$ . On a donc, pour  $n$  assez grand,  $0 \leq M \leq \|g_n - g\|_{\infty, [0, 1]}$ , et en passant à la limite,  $M = 0$ . Ainsi  $f(t) = f(0)$  pour tout  $t \in [0, 1[$ , puis  $f(1) = f(0)$  par continuité de  $f$  en 1 : la fonction  $f$  est constante.

3) Soit  $a \in ]0, 1[$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue en 0, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $t \in [0, \delta]$ ,  $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$ . Comme  $a \in ]0, 1[$ ,  $a^n \rightarrow 0$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $a^n \leq \delta$ .

Soient  $n \geq N$  et  $x \in [0, a]$ . Alors  $0 \leq x^n \leq a^n \leq \delta$ , donc  $|g_n(x) - f(0)| = |f(x^n) - f(0)| \leq \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $n \geq N$ , la fonction  $g_n - f(0)$  est bornée sur  $[0, a]$  et

$$\|g_n - f(0)\|_{\infty, [0, a]} \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que  $\|g_n - f(0)\|_{\infty, [0, a]} \rightarrow 0$  : la suite  $(g_n)$  converge uniformément sur  $[0, a]$  vers la fonction constante  $f(0)$ , qui est bien la restriction de  $g$  à  $[0, a]$ .

4) La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc bornée : notons  $M = \|f\|_{\infty, [0, 1]}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n$  est continue sur  $[0, 1]$  (composée de fonctions continues) et, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|g_n(x) - f(0)| \leq 2M$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $2M(1 - a) \rightarrow 0$  quand  $a \rightarrow 1^-$ , on peut fixer  $a \in ]0, 1[$  tel que  $2M(1 - a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

D'après la question 3, la suite  $(g_n)$  de fonctions continues converge uniformément sur le segment  $[0, a]$  vers la constante  $f(0)$ . Par le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,

$$\int_0^a g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^a f(0) dx = af(0).$$

Il existe donc  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\left| \int_0^a g_n(x) dx - af(0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $n \geq N$ . Par la relation de Chasles,

$$\int_0^1 g_n(x) dx - f(0) = \left( \int_0^a g_n(x) dx - af(0) \right) + \int_a^1 (g_n(x) - f(0)) dx,$$

et par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^1 g_n(x) dx - f(0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^1 |g_n(x) - f(0)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M(1 - a) \leq \varepsilon.$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on conclut :

$$\int_0^1 f(x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

5) La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $f(0) = 1$ , donc, d'après la question 4,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{1}.$$

De même, la fonction  $f : t \mapsto \ln(1+t)$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $f(0) = 0$ , donc

$$\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}.$$

### Correction de l'exercice 6.32

### Énoncé p. 54

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Si  $x \leq 0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-n^2x \geq 0$  donc  $f_n(x) \geq 1$  : le terme général de la série  $\sum f_n(x)$  ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement.

Si  $x > 0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^2x \geq nx$ , donc

$$0 \leq f_n(x) = e^{-n^2x} \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n.$$

Or la série géométrique  $\sum (e^{-x})^n$  converge car  $e^{-x} \in ]0, 1[$ . Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum f_n(x)$  converge.

Ainsi  $D = ]0, +\infty[$ .

2) Soit  $a > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $[a, +\infty[$ , et pour tout  $x \geq a$ ,

$$0 \leq f_n(x) = e^{-n^2x} \leq e^{-n^2a} \leq e^{-na},$$

donc  $f_n$  est bornée sur  $[a, +\infty[$  et  $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq (e^{-a})^n$ . La série géométrique  $\sum (e^{-a})^n$  converge car  $e^{-a} \in ]0, 1[$ , donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$  converge : la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[a, +\infty[$ .

Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions,  $S$  est continue sur  $[a, +\infty[$ , et ce pour tout  $a > 0$ . Par caractère local de la continuité,  $S$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

3) D'après la question 2 (avec  $a = 1$ ), la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[1, +\infty[$ , dont  $+\infty$  est une borne. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = e^{-n^2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Par le théorème de la double limite, la série  $\sum 0$  converge (ce qui est clair) et

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = \boxed{0}.$$

Pour l'équivalent, isolons le premier terme : pour tout  $x > 0$ ,

$$S(x) = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-n^2x}.$$

Pour tout  $n \geq 2$ ,  $n^2 \geq 2n$ , donc  $0 \leq e^{-n^2x} \leq e^{-2nx}$ . En sommant ces inégalités (les deux séries convergent, la seconde étant géométrique de raison  $e^{-2x} \in ]0, 1[$ ),

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-n^2x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \frac{e^{-4x}}{1 - e^{-2x}},$$

puis

$$0 \leq e^x \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-n^2 x} \leq \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par le théorème des gendarmes,  $\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-n^2 x} = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-x})$ , et donc

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}.$$

4) Soit  $x > 0$ . La fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t^2 x}$  est continue et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , car  $t \mapsto -t^2 x$  y est décroissante et  $\exp$  est croissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [n, n+1]$ ,  $\varphi(t) \leq \varphi(n)$ , et pour tout  $t \in [n-1, n]$ ,  $\varphi(n) \leq \varphi(t)$ . En intégrant sur ces segments de longueur 1 (croissance de l'intégrale),

$$\int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq e^{-n^2 x} \leq \int_{n-1}^n \varphi(t) dt.$$

En sommant ces inégalités pour  $n$  allant de 1 à  $N$ , la relation de Chasles donne

$$\int_1^{N+1} e^{-t^2 x} dt \leq \sum_{n=1}^N e^{-n^2 x} \leq \int_0^N e^{-t^2 x} dt.$$

5) Soit  $x > 0$ . Calculons les intégrales de la question 4 à l'aide du changement de variable affine  $u = t\sqrt{x}$  : pour tout  $A > 0$ ,

$$\int_0^A e^{-t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{A\sqrt{x}} e^{-u^2} du.$$

Comme  $A\sqrt{x} \rightarrow +\infty$  quand  $A \rightarrow +\infty$ , la limite admise dans l'énoncé donne, par composition des limites,

$$\int_0^A e^{-t^2 x} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

En particulier, quand  $N \rightarrow +\infty$ , le majorant de la question 4 tend vers  $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ . Pour le minorant, par la relation de Chasles,

$$\int_1^{N+1} e^{-t^2 x} dt = \int_0^{N+1} e^{-t^2 x} dt - \int_0^1 e^{-t^2 x} dt \geq \int_0^{N+1} e^{-t^2 x} dt - 1,$$

car  $0 \leq e^{-t^2 x} \leq 1$  sur  $[0, 1]$ . Ainsi, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_0^{N+1} e^{-t^2 x} dt - 1 \leq \sum_{n=1}^N e^{-n^2 x} \leq \int_0^N e^{-t^2 x} dt.$$

Les trois membres ont une limite quand  $N \rightarrow +\infty$  (la série converge d'après la question 1), et le passage à la limite dans les inégalités donne

$$\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - 1 \leq S(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

En multipliant par  $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} > 0$ , on obtient, pour tout  $x > 0$ ,

$$1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} S(x) \leq 1,$$

et le théorème des gendarmes donne  $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ , c'est-à-dire

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

En particulier,  $S(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

## Correction de l'exercice 6.33

## Énoncé p. 54

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $f_n : s \mapsto \frac{1}{n^s}$ . Pour tout  $s \geq 2$ , comme  $\ln n \geq 0$ ,

$$0 \leq f_n(s) = e^{-s \ln n} \leq e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2},$$

donc  $f_n$  est bornée sur  $[2, +\infty[$  et  $\|f_n\|_{\infty, [2, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge ( $2 > 1$ ), donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum f_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[2, +\infty[$ , dont  $+\infty$  est une borne.

De plus,  $f_1 = 1$  tend vers 1 en  $+\infty$ , et pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n(s) = e^{-s \ln n} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$  car  $\ln n > 0$ . Par le théorème de la double limite,

$$\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = \boxed{1}.$$

Pour l'équivalent, écrivons, pour tout  $s > 1$  (par linéarité de la somme d'une série convergente),

$$2^s (\zeta(s) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^s}{n^s} = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n(s) \quad \text{où} \quad h_n : s \mapsto \left(\frac{2}{n}\right)^s.$$

Pour tout  $n \geq 2$  et tout  $s \geq 2$ , comme  $0 < \frac{2}{n} \leq 1$ ,

$$0 \leq h_n(s) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2},$$

donc  $\|h_n\|_{\infty, [2, +\infty[} \leq \frac{4}{n^2}$  et, comme ci-dessus, la série  $\sum_{n \geq 2} h_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[2, +\infty[$ . Par ailleurs,  $h_2 = 1$  tend vers 1 en  $+\infty$ , et pour tout  $n \geq 3$ ,  $h_n(s) = e^{s \ln(2/n)} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$  car  $\ln \frac{2}{n} < 0$ . Par le théorème de la double limite,

$$2^s (\zeta(s) - 1) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} 0 = 1,$$

c'est-à-dire

$$\zeta(s) - 1 \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}.$$

2) Soit  $s > 1$ . La fonction  $\psi : t \mapsto \frac{1}{t^s}$  est continue et décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [n, n+1]$ ,  $\psi(t) \leq \psi(n)$ , donc, en intégrant sur ce segment de longueur 1,  $\int_n^{n+1} \psi(t) dt \leq \frac{1}{n^s}$ . Si de plus  $n \geq 2$ , pour tout  $t \in [n-1, n]$ ,  $\psi(n) \leq \psi(t)$ , donc  $\frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^n \psi(t) dt$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . En sommant la première inégalité pour  $n$  allant de 1 à  $N$ , et la seconde pour  $n$  allant de 2 à  $N$  (en ajoutant le terme  $n = 1$ , égal à 1), la relation de Chasles donne

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^s}.$$

Or, comme  $s \neq 1$ , pour tout  $A \geq 1$ ,

$$\int_1^A \frac{dt}{t^s} = \left[ \frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_1^A = \frac{1 - A^{1-s}}{s-1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{s-1},$$

car  $1-s < 0$ . Les trois membres de l'encadrement ont donc une limite quand  $N \rightarrow +\infty$  (la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^s}$  converge car  $s > 1$ ), et le passage à la limite donne

$$\boxed{\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}}.$$

En multipliant par  $s-1 > 0$ , on obtient  $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$  pour tout  $s > 1$ , et le théorème des gendarmes donne  $(s-1)\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} 1$ , c'est-à-dire

$$\boxed{\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}}.$$

En particulier,  $\zeta(s) \rightarrow +\infty$  quand  $s \rightarrow 1^+$ .

3) Soit  $s > 0$ . La suite  $(\frac{1}{n^s})_{n \geq 1}$  est à termes positifs, décroissante (car  $s > 0$ ) et de limite nulle (car  $s > 0$ ). Par le théorème spécial des séries alternées, la série  $\sum g_n(s) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$  converge. La série de fonctions  $\sum g_n$  converge donc simplement sur  $]0, +\infty[$ .

4) Soit  $a > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $R_n$  le reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum g_n$  : pour tout  $s > 0$ ,  $R_n(s) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$ . Par le théorème spécial des séries alternées, le reste est majoré en valeur absolue par son premier terme : pour tout  $s \geq a$ ,

$$|R_n(s)| \leq \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{(n+1)^a},$$

car  $\ln(n+1) \geq 0$ . Donc  $R_n$  est bornée sur  $[a, +\infty[$  et

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car  $a > 0$ . Ainsi  $\|R_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \rightarrow 0$  : la série  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n : s \mapsto (-1)^{n-1} e^{-s \ln n}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions,  $\eta$  est continue sur  $[a, +\infty[$ , et ce pour tout  $a > 0$ . Par caractère local de la continuité,  $\eta$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

5) Soit  $s > 1$ . Les séries  $\sum \frac{1}{n^s}$  (Riemann,  $s > 1$ ) et  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$  convergent, donc, par linéarité,

$$\zeta(s) - \eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Le terme général de cette série vaut 0 si  $n$  est impair, et  $\frac{2}{n^s}$  si  $n$  est pair. Pour tout  $P \in \mathbb{N}^*$ , sa somme partielle d'ordre  $2P$  vaut donc

$$\sum_{n=1}^{2P} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{p=1}^P \frac{2}{(2p)^s} = 2^{1-s} \sum_{p=1}^P \frac{1}{p^s}.$$

Quand  $P \rightarrow +\infty$ , le membre de gauche tend vers  $\zeta(s) - \eta(s)$  (suite extraite de la suite convergente des sommes partielles) et le membre de droite tend vers  $2^{1-s}\zeta(s)$ . Donc  $\zeta(s) - \eta(s) = 2^{1-s}\zeta(s)$ , c'est-à-dire

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

6) D'après la question 4,  $\eta$  est continue en 1, donc

$$\eta(1) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

Or  $1 - 2^{1-s} = 1 - e^{(1-s) \ln 2}$ , et comme  $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ ,

$$1 - 2^{1-s} \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} (s - 1) \ln 2.$$

Avec l'équivalent  $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$  de la question 2, le produit des équivalents donne  $(1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \ln 2$ , donc  $(1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \ln 2$ . Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \eta(1) = \ln 2.$$

#### Correction de l'exercice 6.34

#### Énoncé p. 55

1) Soit  $x \in [0, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n(x)| = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq x^{2n} = (x^2)^n.$$

Or la série géométrique  $\sum (x^2)^n$  converge car  $x^2 \in [0, 1[$ . Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum u_n(x)$  converge absolument, donc converge. La série  $\sum u_n$  converge donc simplement sur  $[0, 1[$ .

2) Soit  $a \in [0, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$ , et pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$u'_n(x) = (-1)^n x^{2n}.$$

Pour tout  $x \in [0, a]$ ,  $|u'_n(x)| = x^{2n} \leq a^{2n}$ , donc  $u'_n$  est bornée sur  $[0, a]$  et  $\|u'_n\|_{\infty, [0, a]} \leq (a^2)^n$ . La série géométrique  $\sum (a^2)^n$  converge car  $a^2 \in [0, 1[$ , donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum u'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, a]$ . Enfin, la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, a]$  d'après la question 1.

Par le théorème de dérivation terme à terme,  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, a]$  et, pour tout  $x \in [0, a]$ ,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2},$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison  $-x^2 \in ]-1, 1[$ . Ceci valant pour tout  $a \in [0, 1[$ , par caractère local,  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$  et  $S'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pour tout  $x \in [0, 1[$ .

La fonction  $S - \arctan$  est donc dérivable, de dérivée nulle, sur l'intervalle  $[0, 1[$  : elle y est constante. Comme  $S(0) = 0 = \arctan(0)$ , cette constante est nulle et

$$\forall x \in [0, 1[, \quad S(x) = \arctan(x).$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  est croissante sur  $[0, 1[$  et tend vers  $\frac{1}{2n+1}$  en  $1^-$ , donc

$$\|u_n\|_{\infty, [0, 1[} = \sup_{x \in [0, 1[} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Or  $\frac{1}{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$  et la série harmonique diverge, donc la série  $\sum \|u_n\|_{\infty, [0, 1[}$  diverge : la série  $\sum u_n$  **ne** converge **pas** normalement sur  $[0, 1[$ .

Soit  $x \in [0, 1[$ . La suite  $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est à termes positifs, décroissante (car  $x^{2n+3} \leq x^{2n+1}$  et  $2n+3 \geq 2n+1$ ) et de limite nulle. Par le théorème spécial des séries alternées,

la série  $\sum u_n(x)$  converge et son reste d'ordre  $n$ ,  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ , est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n$  est bornée sur  $[0, 1[$  et  $0 \leq \|R_n\|_{\infty, [0, 1[} \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

La série  $\sum u_n$  converge donc uniformément sur  $[0, 1[$ .

4) Le réel 1 est une borne de  $[0, 1[$ , la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $[0, 1[$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Par le théorème de la double limite, la série  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge et

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Or, d'après la question 2,  $S(x) = \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ . Par unicité de la limite,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

5) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1[$ ,  $|u'_n(x)| = x^{2n}$ , et  $x^{2n} \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 1^-$ , donc  $\|u'_n\|_{\infty, [0, 1[} = 1$ .

Supposons que la série  $\sum u'_n$  converge uniformément sur  $[0, 1[$ , et notons  $T$  sa somme et  $(T_n)$  la suite de ses sommes partielles. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u'_n = T_n - T_{n-1} = (T_n - T) - (T_{n-1} - T)$ , donc, par inégalité triangulaire,

$$1 = \|u'_n\|_{\infty, [0, 1[} \leq \|T_n - T\|_{\infty, [0, 1[} + \|T_{n-1} - T\|_{\infty, [0, 1[} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui est absurde. La série  $\sum u'_n$  **ne** converge **pas** uniformément sur  $[0, 1[$  : le théorème de dérivation terme à terme ne s'applique pas directement sur  $[0, 1[$ , d'où le passage par les segments  $[0, a]$  à la question 2.

## Correction de l'exercice 6.35

## Énoncé p. 55

1) Par la seconde inégalité triangulaire dans l'espace vectoriel normé  $(B, \|\cdot\|_\infty)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|\|f_n\|_\infty - \|f\|_\infty| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Comme  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , on a  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , donc  $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$ .

La réciproque est fautive : pour  $f_n$  la fonction constante égale à  $(-1)^n$ , on a  $\|f_n\|_\infty = 1$  pour tout  $n$ , donc  $\|f_n\|_\infty \rightarrow 1 = \|f\|_\infty$  avec  $f$  la fonction constante égale à 1, mais  $(f_n)$  ne converge pas vers  $f$ , ni même simplement, puisque  $f_n(0) = (-1)^n$  n'a pas de limite.

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ . En intégrant sur  $[0, 1]$ , segment de longueur 1, la croissance de l'intégrale donne

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Puis, par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions.

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $g_n$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ , donc

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 nx^n(1-x) dx = n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit  $x \in [0, 1]$ . Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $nx^n = ne^{n \ln x} \rightarrow 0$  par croissances comparées, car  $\ln x < 0$ , donc  $g_n(x) \rightarrow 0$ . Si  $x = 1$ , alors  $g_n(1) = 0$  pour tout  $n$ . La suite  $(g_n)$  converge donc simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

Si  $(g_n)$  convergeait uniformément sur  $[0, 1]$ , sa limite uniforme serait sa limite simple, la fonction nulle. Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en évaluant en  $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0, 1]$ ,

$$\|g_n\|_\infty \geq g_n(x_n) = n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1},$$

car  $(n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ . Donc  $\|g_n\|_\infty$  ne tend pas vers 0 : la suite  $(g_n)$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

Ainsi, la suite  $(g_n)$  converge vers la fonction nulle pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , mais ne converge pas pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Une suite n'a pas la même nature pour les deux normes : on retrouve que les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes sur  $C$ , alors même que  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$  d'après la question 2.

4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n$  est bornée sur  $[0, 1]$  et  $\|h_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} x^n = 1$ . La suite  $(h_n)$

est donc bornée dans  $(B, \|\cdot\|_\infty)$ .

Soit  $(h_{\varphi(n)})$  une suite extraite de  $(h_n)$ , où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante. Comme  $\varphi(n) \rightarrow +\infty$ , pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $h_{\varphi(n)}(x) = x^{\varphi(n)} \rightarrow 0$ , et  $h_{\varphi(n)}(1) = 1$  pour tout  $n$ . La suite  $(h_{\varphi(n)})$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $h$  définie par  $h(x) = 0$  si  $x \in [0, 1[$  et  $h(1) = 1$ .

Si  $(h_{\varphi(n)})$  convergeait uniformément sur  $[0, 1]$ , sa limite uniforme serait sa limite simple  $h$ . Or les fonctions  $h_{\varphi(n)}$  sont continues sur  $[0, 1]$  : par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions,  $h$  serait continue sur  $[0, 1]$ , ce qui est faux en 1. Aucune suite extraite de  $(h_n)$  ne converge donc uniformément sur  $[0, 1]$ .

Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass). Cette propriété tombe en défaut dans  $(B, \|\cdot\|_\infty)$ .



★ POUR ALLER PLUS LOIN

**Exercice 6.36** ● ● ● Correction p. 128

*Le théorème de Dini.*

Le cours montre que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, et que la réciproque est fautive. Ce problème établit une situation où elle devient vraie : sur un segment, une suite *monotone* de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction *continue* converge uniformément. La **partie I** démontre ce théorème, dû à Ulisse Dini, et la **partie II** montre que chacune de ses hypothèses est indispensable, puis l'applique à des suites et à des séries de fonctions.

Dans la partie I,  $[a, b]$  désigne un segment de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs réelles, qui converge simplement sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ . On suppose de plus la suite  $(f_n)$  croissante, c'est-à-dire que

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $g_n = f - f_n$ .

**Partie I — Le théorème**

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  est continue et positive sur  $[a, b]$ , que  $g_{n+1} \leq g_n$ , et que la suite  $(g_n)$  converge simplement sur  $[a, b]$  vers la fonction nulle.
2. Justifier que  $\|g_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |g_n(x)|$  existe pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puis que la suite réelle  $(\|g_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell \geq 0$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in [a, b]$  tel que  $g_n(x_n) \geq \ell$ .
4. Justifier l'existence d'une extractrice  $\varphi$  telle que la suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $c \in [a, b]$ .
5. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $g_m(x_{\varphi(n)}) \geq \ell$  pour tout  $n \geq m$ , puis que  $g_m(c) \geq \ell$ .
6. En déduire que  $\ell = 0$ , puis que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .
7. Énoncer le résultat correspondant pour une suite décroissante de fonctions.

**Partie II — Hypothèses et applications**

8. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(x) = x^n$ . Vérifier que la suite  $(f_n)$  est décroissante, formée de fonctions continues, et qu'elle converge simplement sur  $[0, 1]$ , mais pas uniformément. Quelle hypothèse du théorème n'est pas satisfaite ?
9. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$ . Vérifier que la suite  $(f_n)$  est décroissante, formée de fonctions continues, qu'elle converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers une fonction continue, mais pas uniformément. Quelle hypothèse du théorème n'est pas satisfaite ? Que peut-on dire sur un segment  $[0, A]$ , avec  $A > 0$  ?

10. Pour  $x \in [0, 1]$ , on pose  $P_0(x) = 0$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$  (suite déjà rencontrée à l'exercice 6.14). Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x},$$

puis que la suite  $(P_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers  $x \mapsto \sqrt{x}$ . En déduire, sans aucune majoration supplémentaire, que la convergence est uniforme sur  $[0, 1]$ .

11. Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions continues et positives sur un segment  $[a, b]$ , qui converge simplement sur  $[a, b]$  et dont la somme  $S$  est continue sur  $[a, b]$ . Montrer que la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$ .
12. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $u_n(x) = \frac{x^n(1-x)}{n}$ . On rappelle que, pour  $x \in [0, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ . Montrer que la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, 1]$ , calculer sa somme, et montrer que la convergence est uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.37** ●● Correction p. 130

*Limites uniformes sur  $\mathbb{R}$  tout entier.*

Dans le cours, la convergence uniforme est presque toujours obtenue sur un segment, ou sur tout segment. Ce problème examine ce que signifie une convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  tout entier : la **partie I** montre qu'une limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  de fonctions polynomiales est encore polynomiale, la **partie II** donne un exemple de convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction non dérivable.

**Partie I — Suites de fonctions polynomiales**

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions polynomiales à coefficients réels, qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ .

- Montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , la fonction  $P_n - P_N$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer qu'une fonction polynomiale bornée sur  $\mathbb{R}$  est constante.
- En déduire qu'il existe une suite réelle  $(c_n)_{n \geq N}$  telle que  $P_n = P_N + c_n$  pour tout  $n \geq N$ , puis que  $(c_n)_{n \geq N}$  converge. Conclure que  $f$  est une fonction polynomiale.
- Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $E_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ . On rappelle que  $(E_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $\exp$ . La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$  ? sur tout segment de  $\mathbb{R}$  ?

**Partie II — Un exemple de convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ .

- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq f_n(x) - |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  (*indication : utiliser la quantité conjuguée*). En déduire que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $x \mapsto |x|$ .
- Montrer que chaque  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et déterminer la limite simple de la suite  $(f'_n)$ .
- La suite  $(f'_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[-1, 1]$  ? sur  $[1, 2]$  ? Quelle hypothèse du théorème de dérivation des suites de fonctions n'est pas satisfaite sur  $[-1, 1]$  ?

**Exercice 6.38** ★

Correction p. 131

*Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass.*

Le théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme, sur ce segment, d'une suite de fonctions polynomiales. L'exercice 6.14 en donne un cas particulier pour la racine carrée. Ce problème le démontre en général, en suivant une construction explicite due à Bernstein : la **partie I** établit trois identités, la **partie II** en déduit la convergence uniforme, et la **partie III** en tire deux conséquences.

Dans tout le problème,  $f$  désigne une fonction continue sur  $[0, 1]$ , à valeurs réelles. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x).$$

La fonction  $B_n(f)$  est polynomiale : c'est le  $n$ -ième *polynôme de Bernstein* de  $f$ .

**Partie I – Trois identités**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ .

1. Montrer que  $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = 1$ . Que vaut  $B_n(f)$  lorsque  $f$  est constante ?
2. Montrer que, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ . En déduire que  $\sum_{k=0}^n k b_{n,k}(x) = nx$ .
3. Montrer de même que  $\sum_{k=0}^n k(k-1) b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$ , puis que  $\sum_{k=0}^n k^2 b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx$ .
4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 b_{n,k}(x) = nx(1-x) \leq \frac{n}{4}.$$

5. Calculer  $B_n(f)$  pour  $f : x \mapsto x^2$ , et en déduire  $\|B_n(f) - f\|_\infty$  dans ce cas.

**Partie II – Convergence uniforme**

On rappelle le théorème de Heine :  $f$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ , elle y est uniformément continue, c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On fixe  $\varepsilon > 0$  et un tel réel  $\delta > 0$ , et on note  $M = \|f\|_\infty$ .

6. Justifier l'existence de  $M$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{n,k}(x).$$

7. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ . On note  $A$  l'ensemble des  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tels que  $\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \delta$ , et  $B$  son complémentaire dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer que

$$\sum_{k \in A} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{n,k}(x) \leq \varepsilon.$$

8. Montrer que, pour  $k \in B$ ,  $1 \leq \frac{(k - nx)^2}{n^2 \delta^2}$ , puis que

$$\sum_{k \in B} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{n,k}(x) \leq \frac{M}{2n\delta^2}.$$

9. En déduire que  $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , puis que la suite  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

### Partie III — Conséquences

Soient  $a < b$  deux réels.

10. Soit  $g$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On pose, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t) = g(a + t(b - a))$ . Montrer que  $g$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions polynomiales.

11. Soit  $g$  une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que  $\int_a^b g(t) t^n dt = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\int_a^b g(t) P(t) dt = 0$  pour toute fonction polynomiale  $P$ , puis que

$$\int_a^b g(t)^2 dt = 0. \text{ En déduire que } g = 0.$$

**Exercice 6.39** ● ● ● [Correction p. 134](#)

*Le lemme de Riemann-Lebesgue.*

Soient  $a < b$  deux réels. Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , à valeurs réelles, et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n(f) = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt.$$

L'objet de ce problème est de montrer que  $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , résultat connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue. La **partie I** traite le cas d'une fonction de classe  $C^1$ , la **partie II** celui d'une fonction continue, en s'appuyant sur le théorème de Weierstrass démontré à l'exercice 6.38, et la **partie III** en tire une application.

#### Partie I — Le cas d'une fonction de classe $C^1$

1. Dans cette question seulement,  $[a, b] = [0, \pi]$ . Montrer que la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $g_n(t) = \sin(nt)$  ne converge pas simplement sur  $[0, \pi]$  (*indication : considérer  $t = \frac{\pi}{2}$* ). Le théorème d'intégration sur un segment du cours permet-il d'obtenir la limite de  $I_n(f)$  pour  $f$  constante égale à 1 ?
2. Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|I_n(f)| \leq \frac{2 \|f\|_\infty + (b - a) \|f'\|_\infty}{n},$$

et en déduire que  $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

#### Partie II — Le cas d'une fonction continue

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et soit  $\varepsilon > 0$ .

3. Justifier l'existence d'une fonction polynomiale  $P$  telle que  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ , la norme étant prise sur  $[a, b]$ . On pourra utiliser le résultat de l'exercice 6.38, c'est-à-dire que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme, sur ce segment, d'une suite de fonctions polynomiales.

4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|I_n(f)| \leq |I_n(P)| + (b-a)\varepsilon$ . En déduire que  $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
5. Montrer que l'on a de même  $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

### Partie III — Applications

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ .

6. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt$ .
7. Montrer que  $\int_0^\pi |\sin(nt)| dt = 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que, pour  $[a, b] = [0, \pi]$ , la suite  $\left( \int_a^b |f(t) \sin(nt)| dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0 en général.

## Correction de l'exercice 6.36

## Énoncé p. 123

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $g_n = f - f_n$  est continue sur  $[a, b]$  comme différence de deux fonctions continues. Soit  $x \in [a, b]$  : la suite réelle  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et converge vers  $f(x)$ , donc elle est majorée par sa limite :  $f_n(x) \leq f(x)$ , c'est-à-dire  $g_n(x) \geq 0$ . De plus  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  donne  $g_{n+1}(x) = f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x) = g_n(x)$ . Enfin,  $g_n(x) = f(x) - f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  par convergence simple de  $(f_n)$  vers  $f$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $g_n$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , donc elle y est bornée :  $\|g_n\|_\infty$  existe. Pour tout  $x \in [a, b]$ , la question 1 donne

$$|g_{n+1}(x)| = g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \leq \|g_n\|_\infty,$$

et en passant à la borne supérieure sur  $x$ ,  $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$ . La suite  $(\|g_n\|_\infty)$  est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel  $\ell \geq 0$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $g_n$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , donc elle y atteint sa borne supérieure : il existe  $x_n \in [a, b]$  tel que  $g_n(x_n) = \|g_n\|_\infty$ . Par ailleurs, une suite décroissante est minorée par sa limite, donc  $\|g_n\|_\infty \geq \ell$ . Ainsi  $g_n(x_n) \geq \ell$ .
4. La suite  $(x_n)$  est à valeurs dans  $[a, b]$ , donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge vers un réel  $c$ . Comme  $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$  pour tout  $n$ , le passage à la limite dans ces inégalités larges donne  $c \in [a, b]$ .
5. Soit  $n \geq m$ . Comme  $\varphi$  est strictement croissante,  $\varphi(n) \geq n \geq m$ , et la question 1 donne alors  $g_m \geq g_{\varphi(n)}$  sur  $[a, b]$ . Donc, avec la question 3,

$$g_m(x_{\varphi(n)}) \geq g_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geq \ell.$$

La fonction  $g_m$  est continue en  $c$  et  $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ , donc  $g_m(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g_m(c)$ . En passant à la limite dans l'inégalité large précédente, valable pour tout  $n \geq m$ , on obtient  $g_m(c) \geq \ell$ .

6. L'inégalité  $g_m(c) \geq \ell$  vaut pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Or  $g_m(c) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  d'après la question 1, donc  $0 \geq \ell$ . Avec  $\ell \geq 0$ , il vient  $\ell = 0$ , c'est-à-dire  $\|f - f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .
7. Si  $(f_n)$  est une suite décroissante de fonctions continues sur un segment  $[a, b]$ , qui converge simplement sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$  continue, alors la convergence est uniforme sur  $[a, b]$ . En effet, la suite  $(-f_n)$  est croissante, formée de fonctions continues, et converge simplement vers  $-f$ , qui est continue : d'après la question 6,  $(-f_n)$  converge uniformément vers  $-f$ , et comme  $\|(-f_n) - (-f)\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .
8. Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $x^{n+1} = x \cdot x^n \leq x^n$ , donc la suite  $(f_n)$  est décroissante, et chaque  $f_n$  est continue. Pour  $x \in [0, 1[$ ,  $x^n \rightarrow 0$ , et  $f_n(1) = 1$  pour tout  $n$  : la suite converge simplement vers la fonction  $f$  nulle sur  $[0, 1[$  et valant 1 en 1. Cette limite n'est pas continue en 1, alors que les  $f_n$  le sont : d'après le cours, la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ . L'hypothèse manquante est la continuité de la limite.
9. Pour  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n+x \leq n+1+x$  donne  $f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1+x} \leq \frac{x}{n+x} = f_n(x)$ , donc la suite est décroissante, et chaque  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $x$  fixé,  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la limite simple est la fonction nulle, qui est continue.

Mais pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ , donc  $\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f_n(x) \geq 1$  (et en fait cette borne vaut 1, car  $0 \leq f_n < 1$ ) : la suite ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ . L'hypothèse manquante est que  $\mathbb{R}_+$  n'est pas un segment.

Sur un segment  $[0, A]$ , toutes les hypothèses de la question 7 sont satisfaites, donc la convergence est uniforme sur  $[0, A]$ . On peut aussi le voir directement :

$f_n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $\sup_{x \in [0, A]} f_n(x) = f_n(A) = \frac{A}{n+A} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

10. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $H_n$  la propriété : « pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$  ».

*Initialisation.*  $P_0 = 0$  et  $P_1(x) = \frac{x}{2}$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , on a  $x \leq \sqrt{x}$  (car  $x^2 \leq x$ ),

donc  $0 \leq 0 \leq \frac{x}{2} \leq \sqrt{x}$  :  $H_0$  est vraie.

*Hérédité.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $H_n$ . Soit  $x \in [0, 1]$ . D'abord  $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$ . Ensuite,  $0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$  donne  $P_{n+1}(x)^2 \leq x$ , donc  $P_{n+2}(x) - P_{n+1}(x) = \frac{x - P_{n+1}(x)^2}{2} \geq 0$ . Enfin,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+2}(x) &= \left( \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \right) - \frac{(\sqrt{x} - P_{n+1}(x))(\sqrt{x} + P_{n+1}(x))}{2} \\ &= \left( \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{x} + P_{n+1}(x)}{2} \right), \end{aligned}$$

et les deux facteurs sont positifs, car  $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$  et  $\sqrt{x} + P_{n+1}(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$ . Ainsi  $H_{n+1}$  est vraie.

*Conclusion.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ .

Soit  $x \in [0, 1]$ . La suite  $(P_n(x))$  est croissante et majorée par  $\sqrt{x}$ , donc elle converge vers un réel  $\lambda \in [0, \sqrt{x}]$ . En passant à la limite dans la relation

$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$ , on obtient  $\lambda = \lambda + \frac{x - \lambda^2}{2}$ , soit  $\lambda^2 = x$ , et comme  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda = \sqrt{x}$ . La suite  $(P_n)$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$  vers  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

Une récurrence immédiate montre que chaque  $P_n$  est une fonction polynomiale, donc continue sur  $[0, 1]$ . La limite  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, 1]$ , la suite  $(P_n)$  est croissante et  $[0, 1]$  est un segment : d'après la question 6, la convergence est uniforme sur  $[0, 1]$ .

11. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  la somme partielle. Chaque  $S_n$  est continue sur  $[a, b]$  comme somme finie de fonctions continues, et  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ , donc la suite  $(S_n)$  est croissante. Par hypothèse,  $(S_n)$  converge simplement sur  $[a, b]$  vers  $S$ , qui est continue. D'après la question 6,  $(S_n)$  converge uniformément vers  $S$  sur  $[a, b]$ , ce qui est exactement la convergence uniforme de la série  $\sum u_n$  sur  $[a, b]$ .
12. Soit  $x \in [0, 1]$ . Si  $x = 1$ , alors  $u_n(1) = 0$  pour tout  $n$ , et la série converge, de somme 0. Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $0 \leq u_n(x) \leq x^n$ , terme général d'une série géométrique convergente, donc  $\sum u_n(x)$  converge, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -(1-x) \ln(1-x).$$

La somme  $S$  est donc définie sur  $[0, 1]$  par  $S(x) = -(1-x) \ln(1-x)$  si  $x \in [0, 1[$  et  $S(1) = 0$ .

Les fonctions  $u_n$  sont continues et positives sur  $[0, 1]$ . La somme  $S$  est continue sur  $[0, 1[$  comme produit de fonctions continues, et continue en 1 car, en posant  $h = 1 - x$ ,  $S(x) = -h \ln h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0 = S(1)$  par croissances comparées. D'après la question 11, la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

## Correction de l'exercice 6.37

## Énoncé p. 124

1. Comme  $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|P_n - f\|_\infty \leq 1$  pour tout  $n \geq N$ . Soit  $n \geq N$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |P_n(x) - P_N(x)| &\leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_N(x)| \\ &\leq \|P_n - f\|_\infty + \|P_N - f\|_\infty \leq 2, \end{aligned}$$

donc  $P_n - P_N$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $P$  une fonction polynomiale non constante, de degré  $d \geq 1$  et de coefficient dominant  $a_d \neq 0$ . Alors  $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_d x^d$ , donc  $|P(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $P$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ . Par contraposée, une fonction polynomiale bornée sur  $\mathbb{R}$  est constante.
3. Soit  $n \geq N$ . La fonction  $P_n - P_N$  est polynomiale et bornée sur  $\mathbb{R}$  (question 1), donc constante d'après la question 2 : il existe  $c_n \in \mathbb{R}$  tel que  $P_n = P_N + c_n$ . En évaluant en 0,  $c_n = P_n(0) - P_N(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) - P_N(0)$  par convergence simple en 0 ; notons  $c$  cette limite. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_N(x) + c_n) = P_N(x) + c,$$

donc  $f = P_N + c$  est une fonction polynomiale.

4. Si  $(E_n)$  convergeait uniformément sur  $\mathbb{R}$ , sa limite exp serait polynomiale d'après la question 3. Or une fonction polynomiale  $P$  de degré au plus  $d$  vérifie  $P^{(d+1)} = 0$ , alors que  $\exp^{(d+1)} = \exp$  n'est pas nulle :  $\exp$  n'est pas polynomiale, et la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $A > 0$ . Pour  $x \in [-A, A]$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{A^k}{k!}$ , terme général d'une série

numérique convergente (série exponentielle) : la série  $\sum \frac{x^k}{k!}$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[-A, A]$ , ce qui signifie que  $(E_n)$  converge uniformément sur  $[-A, A]$ . Tout segment étant inclus dans un tel  $[-A, A]$ , la convergence est uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

5. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} > 0$  et  $\sqrt{x^2} = |x|$ ,

$$f_n(x) - |x| = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}.$$

Ce quotient est positif, et comme  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$ , il est majoré par  $\frac{1/n}{1/\sqrt{n}} =$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Ainsi  $\|f_n - |\cdot|\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $x \mapsto |x|$ .

6. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $\sqrt{\cdot}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  : par composition,  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}.$$

Pour  $x > 0$ ,  $f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = 1$  ; pour  $x < 0$ ,  $f'_n(x) \rightarrow -1$  ; et  $f'_n(0) = 0$  pour tout  $n$ . La suite  $(f'_n)$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $g(x) = -1$  si  $x < 0$  et  $g(0) = 0$ .

7. Les fonctions  $f'_n$  sont continues sur  $[-1, 1]$ , mais leur limite simple  $g$  n'est pas continue en 0 : d'après le cours, la convergence n'est pas uniforme sur  $[-1, 1]$ . Sur  $[1, 2]$ , pour tout  $x \in [1, 2]$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - f'_n(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x \right)} \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

car  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \geq x \geq 1$ . Donc  $\sup_{x \in [1, 2]} |f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0$  : la convergence est uniforme sur  $[1, 2]$ .

Sur  $[-1, 1]$ , la suite  $(f_n)$  converge simplement (et même uniformément) vers  $x \mapsto |x|$ , chaque  $f_n$  est de classe  $C^1$ , mais la suite des dérivées  $(f'_n)$  ne converge pas uniformément : c'est cette hypothèse du théorème de dérivation qui fait défaut. On constate d'ailleurs que la limite  $x \mapsto |x|$  n'est pas dérivable en 0.

## Correction de l'exercice 6.38

## Énoncé p. 125

1. D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

Si  $f$  est constante égale à  $c$ , alors  $B_n(f)(x) = c \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = c : B_n(f) = f$ .

2. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= \frac{k n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)! ((n-1) - (k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Le terme d'indice  $k = 0$  de la somme est nul, donc, en posant  $j = k - 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k b_{n,k}(x) &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx (x + (1-x))^{n-1} = nx. \end{aligned}$$

3. Si  $n = 1$ , les termes d'indices  $k = 0$  et  $k = 1$  sont nuls et la somme vaut  $0 = n(n-1)x^2$ . Si  $n \geq 2$ , le même calcul qu'à la question 2 donne, pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ , donc, en posant  $j = k-2$ ,

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} = n(n-1)x^2.$$

Comme  $k^2 = k(k-1) + k$ , on en déduit avec la question 2 que  $\sum_{k=0}^n k^2 b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx$ .

4. En développant  $(k-nx)^2 = k^2 - 2nxx + n^2x^2$  et en utilisant les questions 1 à 3,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 b_{n,k}(x) &= (n(n-1)x^2 + nx) - 2nx \cdot nx + n^2x^2 \cdot 1 \\ &= nx - nx^2 = nx(1-x). \end{aligned}$$

Enfin,  $\frac{1}{4} - x(1-x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ , donc  $nx(1-x) \leq \frac{n}{4}$ .

5. Pour  $f : x \mapsto x^2$ , la question 3 donne

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_{n,k}(x) = \frac{n(n-1)x^2 + nx}{n^2} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Ainsi  $B_n(f)(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{n}$ , et d'après la question 4,  $\|B_n(f) - f\|_\infty = \frac{1}{4n}$ , valeur atteinte en  $x = \frac{1}{2}$ . On observe que  $B_n(f) \neq f$ , mais que  $\|B_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

6. La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc bornée :  $M$  existe. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ . D'après la question 1,  $f(x) = f(x) \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x)$ , donc

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) b_{n,k}(x).$$

Comme  $x \in [0, 1]$ , chaque  $b_{n,k}(x)$  est positif, et l'inégalité triangulaire donne la majoration demandée.

7. Pour  $k \in A$ ,  $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \delta$ , donc  $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$  par définition de  $\delta$ . Les  $b_{n,k}(x)$  étant positifs,

$$\sum_{k \in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| b_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k \in A} b_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = \varepsilon.$$

8. Pour  $k \in B$ ,  $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta$ , donc  $(k-nx)^2 = n^2 \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 > n^2 \delta^2$ , d'où  $1 \leq \frac{(k-nx)^2}{n^2 \delta^2}$ . Par ailleurs,  $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq |f(x)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2M$ . Donc, avec la

question 4,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{n,k}(x) &\leq \sum_{k \in B} 2M \frac{(k - nx)^2}{n^2 \delta^2} b_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 b_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{n^2 \delta^2} \cdot \frac{n}{4} = \frac{M}{2n\delta^2}. \end{aligned}$$

9. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ , en découpant la somme de la question 6 selon  $A$  et  $B$ , les questions 7 et 8 donnent

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de  $x$ , donc  $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$ .

Comme  $\frac{M}{2n\delta^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{M}{2n\delta^2} \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq n_0$ , et alors  $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq 2\varepsilon$ . Le réel  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, cela signifie que  $\|f - B_n(f)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la suite  $(B_n(f))$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

10. La fonction  $t \mapsto a + t(b - a)$  est continue et envoie  $[0, 1]$  sur  $[a, b]$ , donc  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  par composition. D'après la question 9, la suite  $(P_n) = (B_n(f))$  de fonctions polynomiales converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $s \in [a, b]$ , posons  $Q_n(s) = P_n\left(\frac{s-a}{b-a}\right)$  :  $Q_n$  est une fonction polynomiale de  $s$ . Pour  $s \in [a, b]$ , le réel  $t = \frac{s-a}{b-a}$  appartient à  $[0, 1]$  et  $g(s) = f(t)$ , donc

$$|g(s) - Q_n(s)| = |f(t) - P_n(t)| \leq \|f - P_n\|_\infty.$$

Ainsi  $\sup_{s \in [a, b]} |g(s) - Q_n(s)| \leq \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : la suite  $(Q_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[a, b]$ .

11. Soit  $P = \sum_{k=0}^d c_k t^k$  une fonction polynomiale. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b g(t) P(t) dt = \sum_{k=0}^d c_k \int_a^b g(t) t^k dt = 0.$$

D'après la question 10, il existe une suite  $(Q_n)$  de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers  $g$  sur  $[a, b]$ . Pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$|g(t) Q_n(t) - g(t)^2| = |g(t)| |Q_n(t) - g(t)| \leq \|g\|_\infty \|Q_n - g\|_\infty,$$

donc la suite  $(gQ_n)$ , formée de fonctions continues, converge uniformément vers  $g^2$  sur  $[a, b]$ . D'après le théorème d'intégration sur un segment,

$$\int_a^b g(t) Q_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t)^2 dt.$$

Or le membre de gauche est nul pour tout  $n$ , donc  $\int_a^b g(t)^2 dt = 0$ . La fonction  $g^2$  est continue et positive sur  $[a, b]$ , d'intégrale nulle : elle est nulle sur  $[a, b]$ , et donc  $g = 0$ .

## Correction de l'exercice 6.39

## Énoncé p. 126

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  vaut 0 si  $n$  est pair, 1 si  $n \equiv 1 [4]$  et  $-1$  si  $n \equiv 3 [4]$ . La suite  $(g_n\left(\frac{\pi}{2}\right))$  prend une infinité de fois les valeurs 1 et  $-1$ , donc elle ne converge pas : la suite  $(g_n)$  ne converge pas simplement sur  $[0, \pi]$ .

Pour  $f = 1$ , on a  $I_n(f) = \int_0^\pi g_n(t) dt$ . Le théorème d'intégration sur un segment demande la convergence uniforme, donc au moins simple, de la suite  $(g_n)$  : il ne s'applique pas ici.

2. Les fonctions  $f$  et  $t \mapsto -\frac{\cos(nt)}{n}$  sont de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , et la seconde a pour dérivée  $t \mapsto \sin(nt)$ . Par intégration par parties,

$$I_n(f) = \left[ -\frac{f(t) \cos(nt)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt.$$

Comme  $|\cos| \leq 1$ , il vient

$$|I_n(f)| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt \leq \frac{2\|f\|_\infty + (b-a)\|f'\|_\infty}{n},$$

où  $\|f\|_\infty$  et  $\|f'\|_\infty$  existent car  $f$  et  $f'$  sont continues sur le segment  $[a, b]$ . Le majorant tend vers 0, donc  $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

3. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(Q_k)$  de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire que  $\|f - Q_k\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ . Il existe donc un entier  $k$  tel que  $\|f - Q_k\|_\infty \leq \varepsilon$ , et  $P = Q_k$  convient.
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par linéarité de l'intégrale,  $I_n(f) - I_n(P) = \int_a^b (f(t) - P(t)) \sin(nt) dt$ , donc

$$|I_n(f) - I_n(P)| \leq \int_a^b |f(t) - P(t)| |\sin(nt)| dt \leq (b-a) \|f - P\|_\infty \leq (b-a)\varepsilon,$$

et l'inégalité triangulaire donne  $|I_n(f)| \leq |I_n(P)| + (b-a)\varepsilon$ .

La fonction  $P$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , donc  $I_n(P) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  d'après la question 2 : il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $|I_n(P)| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq n_0$ , et alors  $|I_n(f)| \leq (1 + b - a)\varepsilon$ . Le réel  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, cela signifie que  $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

5. Pour  $f$  de classe  $C^1$ , l'intégration par parties avec  $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$  donne, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_a^b f(t) \cos(nt) dt = \left[ \frac{f(t) \sin(nt)}{n} \right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \sin(nt) dt,$$

et la même majoration qu'à la question 2 montre que cette intégrale tend vers 0. Pour  $f$  continue, les questions 3 et 4 se reproduisent mot pour mot, la seule propriété utilisée étant  $|\cos| \leq 1$ .

6. Pour tout  $t$ ,  $\sin^2(nt) = \frac{1 - \cos(2nt)}{2}$ , donc

$$\int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{2} \int_a^b f(t) \cos(2nt) dt.$$

La suite  $\left(\int_a^b f(t) \cos(2nt) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de la suite de la question 5, donc elle tend vers 0. Ainsi

$$\int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt.$$

7. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le changement de variable  $u = nt$  donne

$$\int_0^\pi |\sin(nt)| dt = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\sin u| du = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| du.$$

La fonction  $|\sin|$  est  $\pi$ -périodique, donc chacune de ces  $n$  intégrales vaut  $\int_0^\pi |\sin u| du = \int_0^\pi \sin u du = 2$ , et l'intégrale cherchée vaut  $\frac{1}{n} \cdot 2n = 2$ .

Pour  $f$  constante égale à 1 sur  $[0, \pi]$ , on obtient  $\int_0^\pi |f(t) \sin(nt)| dt = 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors que  $I_n(f) = \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} = \frac{1 - (-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . La convergence de  $I_n(f)$  vers 0 ne provient donc pas de la petitesse de  $\sin(nt)$ , mais des compensations entre les valeurs positives et négatives de  $\sin(nt)$ , dont les oscillations sont de plus en plus rapides.