

DS 1 – PROGRAMME DE PREMIÈRE ANNÉE

Durée : 4h

Calculatrices interdites

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Rendre les exercices sur copies séparées et mettre son nom sur **chaque** copie.
5. Rendre les copies les unes dans les autres **dans l'ordre des exercices**.

Exercice 1 – E3A 2024 (Exercice 1)

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E .

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2 , on pose $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E .
2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.
3. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(L)$.
4. Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\text{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1 .
5. Montrer que :
 - (a) $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
 - (b) $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$.
6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X.$$

- (a) Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E .
- (b) Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
- (c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4. et 5.
- (d) **Pour les 5/2** : Déterminer les valeurs propres de T_λ .
Pour les 3/2 : Soit μ un réel. Montrer que s'il existe un polynôme P non nul tel que $T_\lambda(P) = \mu P$, alors $\mu = 1$. Déterminer alors les polynômes $P \in E$ vérifiant $T_\lambda(P) = P$.
- (e) **Pour les 5/2** : L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

Pour les 3/2 :

- i. Soit $(f_0, \dots, f_{2n})$ une base de E dans laquelle la matrice de T_λ est diagonale. Montrer que $T_\lambda = \text{Id}_E$.

- ii. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles il existe une base de E dans laquelle la matrice de T_λ est diagonale.
- (f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E .
- (g) Pour tous réels α et β , préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
- (h) Déterminer T_λ^{-1} .

Exercice 2 – ECRICOME ECS 2020 (Exercice 2)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$. Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

- (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On se place désormais sous cette condition.

- (b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

- (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

- (d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

- (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α , la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

- (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^n}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

(e) La série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geq 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt.$$

Exercice 3 – Centrale 2025 (Maths 2) (Parties A, B.I et B.II)

Notations

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

où, pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $c_k \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n . C'est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 2π -périodiques. Pour $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $h > 0$, on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Partie A — Préliminaires

- Montrer que si g est la fonction sinus, alors, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leq h$.
- (a) Montrer que, pour tous $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $h > 0$, $\omega_g(h)$ est un réel bien défini.
(b) On suppose que $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$. Montrer que, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leq h \|g'\|_\infty$. En déduire que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ est vrai pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

- Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$.
(a) Montrer que, si $h \leq h'$, alors $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$.
(b) Montrer que $\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$.
(c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel λ strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leq n \omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda) \omega_g(h).$$

- Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

- Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t) g(t) dt.$$

Montrer que Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

Partie B

I — La fonction J_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que, pour tout réel t n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4.$$

- Montrer que φ_n et φ_n^2 appartiennent à $\mathcal{T}_n$, puis que f_n appartient à $\mathcal{T}_{2n}$.

- Montrer qu'il existe un réel strictement positif c_n tel que $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose désormais $J_n = c_n f_n$, de sorte que J_n est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

II — Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

9. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}.$

10. Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$.

11. En déduire que $\int_0^{\pi} t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du.$

Pour les 3/2 : Bien que $\frac{\sin^4 u}{u^3}$ ne soit pas défini en 0, la fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^3}$ se prolonge par continuité en 0 (on le vérifiera). On peut donc définir l'intégrale $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du.$

12. En déduire également que $\int_0^{\pi} f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du.$

Pour les 3/2 : Bien que $\frac{\sin^4 u}{u^4}$ ne soit pas défini en 0, la fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^4}$ se prolonge par continuité en 0 (on le vérifiera). On peut donc définir l'intégrale $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du.$

13. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}.$

Exercice 4 – E3A 2024 (Exercice 4)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E .

On note : $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P | Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n).$

(a) Montrer que : $(S | S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

(b) Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Quelques calculs de sommes

(a) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

(b) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*.$

- (c) Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (d) Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
- (e) Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Pour les 5/2 : Calculer S_0 , S_1 et S_2 .

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

Pour les 3/2 : Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note g_N la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_N(x) = \sum_{n=0}^N e^{-nx}$.

- Soit $N \in \mathbb{N}$. Exprimer $g_N(x)$ à l'aide de $g(x)$ pour tout $x > 0$, puis calculer $g'_N(x)$ de deux manières.
- Soit $x > 0$. Montrer que $g'_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} g'(x)$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}$, puis celle de S_1 .
- Calculer S_0 et S_2 .

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question 2.
- Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X .
 - Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.
 - En déduire la distance recherchée.

DS 1 – PROGRAMME DE PREMIÈRE ANNÉE – CORRECTION

Exercice 1 – E3A 2024 (Exercice 1)

1. Tout polynôme $P \in E$ définit une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, donc $L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$ est un réel bien défini. Soient $(P, Q) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale :

$$L(\alpha P + \beta Q) = \int_{-1}^1 (\alpha P(t) + \beta Q(t)) dt = \alpha \int_{-1}^1 P(t) dt + \beta \int_{-1}^1 Q(t) dt = \alpha L(P) + \beta L(Q).$$

Ainsi L est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur E .

2. Soit $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$. Une primitive de $t \mapsto t^k$ est $t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$, donc :

$$L(e_k) = \int_{-1}^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Si k est pair, $(-1)^{k+1} = -1$; si k est impair, $(-1)^{k+1} = 1$. D'où :

$$L(e_k) = \frac{2}{k+1} \text{ si } k \text{ est pair, } \quad L(e_k) = 0 \text{ si } k \text{ est impair.}$$

3. La forme linéaire L n'est pas nulle puisque $L(e_0) = 2 \neq 0$. Son noyau est donc un hyperplan de E , qui est de dimension $2n + 1$. Ainsi $\dim \text{Ker}(L) = 2n$.
4. D'après la question 2, $L(e_1) = 0$ (car 1 est impair), donc $e_1 \in \text{Ker}(L)$. Comme $e_1 = X \neq 0$, la famille (e_1) est une famille libre de $\text{Ker}(L)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de $\text{Ker}(L)$, qui compte $2n$ vecteurs d'après la question 3.

Ainsi il existe une base $\mathcal{U} = (e_1, u_2, \dots, u_{2n})$ de $\text{Ker}(L)$ dont le premier vecteur est e_1 .

5. (a) Soient $Q = a e_0 \in \text{Vect}(e_0)$, avec $a \in \mathbb{R}$, et $P \in \text{Ker}(L)$. Comme e_0 est le polynôme constant égal à 1 :

$$(Q | P) = \int_{-1}^1 a \cdot P(t) dt = a \int_{-1}^1 P(t) dt = a L(P) = 0.$$

Ainsi $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont orthogonaux.

- (b) D'après la question 5a, $\text{Vect}(e_0) \subset \text{Ker}(L)^\perp$. Or $\text{Ker}(L)$ et $\text{Ker}(L)^\perp$ sont en somme directe : si $P \in \text{Ker}(L) \cap \text{Ker}(L)^\perp$, alors P est orthogonal à lui-même, $(P | P) = 0$, donc $P = 0$ puisque $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire. A fortiori $\text{Vect}(e_0) \cap \text{Ker}(L) = \{0\}$ et la somme $\text{Vect}(e_0) + \text{Ker}(L)$ est directe. De plus, $e_0 \neq 0$ donc $\dim \text{Vect}(e_0) = 1$, et d'après la question 3 :

$$\dim (\text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)) = 1 + 2n = \dim E.$$

Le sous-espace $\text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$ de E ayant la dimension de E , il lui est égal :

$$E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L).$$

6. Soit λ un réel.

- (a) Soit $P \in E$. Le polynôme $X = e_1$ appartient à E car $1 \leq 2n$, et $L(P)$ est un réel, donc $T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$ est une combinaison linéaire d'éléments de E : $T_\lambda(P) \in E$.

Soient $(P, Q) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de L :

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha P + \beta Q) &= \alpha P + \beta Q + \lambda(\alpha L(P) + \beta L(Q))X \\ &= \alpha(P + \lambda L(P)X) + \beta(Q + \lambda L(Q)X) = \alpha T_\lambda(P) + \beta T_\lambda(Q). \end{aligned}$$

Ainsi T_λ est un endomorphisme de E .

- (b) Soit $P \in E$. Par linéarité de L , et comme $L(X) = L(e_1) = 0$:

$$(L \circ T_\lambda)(P) = L(P + \lambda L(P)X) = L(P) + \lambda L(P)L(X) = L(P).$$

Ainsi $\forall P \in E, (L \circ T_\lambda)(P) = L(P)$, c'est-à-dire $L \circ T_\lambda = L$.

- (c) Soit $\mathcal{U} = (e_1, u_2, \dots, u_{2n})$ la base de $\text{Ker}(L)$ obtenue à la question 4. Comme $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$ d'après la question 5, la famille $\mathcal{C} = (e_0, e_1, u_2, \dots, u_{2n})$, obtenue en concaténant une base de $\text{Vect}(e_0)$ et une base de $\text{Ker}(L)$, est une base de E adaptée à cette décomposition. Calculons les images des vecteurs de $\mathcal{C}$. D'une part, $L(e_0) = 2$ donne :

$$T_\lambda(e_0) = e_0 + 2\lambda X = e_0 + 2\lambda e_1.$$

D'autre part, pour tout $P \in \text{Ker}(L)$, $T_\lambda(P) = P + \lambda \cdot 0 \cdot X = P$, donc $T_\lambda(e_1) = e_1$ et $T_\lambda(u_k) = u_k$ pour tout $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$. D'où :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(T_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire la matrice identité I_{2n+1} dont le coefficient en position $(2, 1)$ a été remplacé par 2λ .

- (d) **Pour les 5/2 :** La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(T_\lambda)$ est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, tous égaux à 1. Ainsi $\text{Sp}(T_\lambda) = \{1\}$.

Pour les 3/2 : Soit μ un réel et $P \in E$ un polynôme non nul tel que $T_\lambda(P) = \mu P$. Appliquons L aux deux membres : d'après la question 6b, $L(T_\lambda(P)) = L(P)$, et par linéarité $L(\mu P) = \mu L(P)$. Donc $L(P) = \mu L(P)$, soit :

$$(1 - \mu)L(P) = 0.$$

- Si $L(P) \neq 0$, alors $\mu = 1$.
- Si $L(P) = 0$, alors $T_\lambda(P) = P + \lambda \cdot 0 \cdot X = P$, donc $\mu P = P$, soit $(\mu - 1)P = 0$. Comme $P \neq 0$, $\mu = 1$.

Dans les deux cas, $\mu = 1$.

Soit $P \in E$. On a :

$$T_\lambda(P) = P \iff \lambda L(P)X = 0 \iff \lambda L(P) = 0,$$

car $X \neq 0$.

- Si $\lambda = 0$, cette condition est toujours vérifiée : tout polynôme $P \in E$ vérifie $T_0(P) = P$, c'est-à-dire $T_0 = \text{Id}_E$.
- Si $\lambda \neq 0$, la condition équivaut à $L(P) = 0$: les solutions sont exactement les polynômes de $\text{Ker}(L)$.

Ainsi :

$$\{P \in E \mid T_\lambda(P) = P\} = \begin{cases} E & \text{si } \lambda = 0, \\ \text{Ker}(L) & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

- (e) **Pour les 5/2 :** Si $\lambda = 0$, alors $T_0(P) = P$ pour tout $P \in E$, donc $T_0 = \text{Id}_E$, dont la matrice est diagonale dans toute base de E : T_0 est diagonalisable.

Supposons $\lambda \neq 0$. D'après la question 6d, la seule valeur propre de T_λ est 1, et pour $P \in E$:

$$T_\lambda(P) = P \iff \lambda L(P)X = 0 \iff L(P) = 0,$$

car $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$. Le sous-espace propre associé à 1 est donc $E_1(T_\lambda) = \text{Ker}(L)$, de dimension $2n$ d'après la question 3. Or T_λ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut $\dim E = 2n + 1$. Comme $2n \neq 2n + 1$, T_λ n'est pas diagonalisable.

Ainsi T_λ est diagonalisable si et seulement si $\lambda = 0$.

Pour les 3/2 :

- i. Soit $(f_0, \dots, f_{2n})$ une base de E dans laquelle la matrice de T_λ est diagonale, de coefficients diagonaux $\mu_0, \dots, \mu_{2n}$. Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, pour tout $i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $T_\lambda(f_i) = \mu_i f_i$. Comme f_i est un vecteur d'une base, $f_i \neq 0$, et la question 6d donne $\mu_i = 1$: $T_\lambda(f_i) = f_i$.

Les endomorphismes T_λ et Id_E coïncident sur la base $(f_0, \dots, f_{2n})$, donc, par linéarité, sur E tout entier : $T_\lambda = \text{Id}_E$.

- ii. Supposons qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de T_λ est diagonale. D'après la question i, $T_\lambda = \text{Id}_E$, donc en particulier $T_\lambda(e_0) = e_0$, soit $2\lambda e_1 = 0$ d'après le calcul de la question 6c. Comme $e_1 \neq 0$, $\lambda = 0$.

Réciproquement, si $\lambda = 0$, alors $T_0 = \text{Id}_E$ d'après la question 6d, et sa matrice dans n'importe quelle base de E est I_{2n+1} , qui est diagonale.

Ainsi :

la matrice de T_λ est diagonale dans une base de E si et seulement si $\lambda = 0$.

- (f) Soit $P \in \text{Ker}(T_\lambda)$. En appliquant L à l'égalité $T_\lambda(P) = 0$, la question 6b donne $L(P) = L(T_\lambda(P)) = L(0) = 0$. Alors $T_\lambda(P) = P + \lambda \cdot 0 \cdot X = P$, donc $P = T_\lambda(P) = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(T_\lambda) = \{0\}$: l'endomorphisme T_λ est injectif. Comme E est de dimension finie, un endomorphisme injectif de E est bijectif. Donc T_λ est un automorphisme de E .

- (g) Soient α et β deux réels et $P \in E$. En utilisant la question 6b, $L(T_\beta(P)) = L(P)$, d'où :

$$\begin{aligned} (T_\alpha \circ T_\beta)(P) &= T_\beta(P) + \alpha L(T_\beta(P))X = P + \beta L(P)X + \alpha L(P)X \\ &= P + (\alpha + \beta)L(P)X = T_{\alpha+\beta}(P). \end{aligned}$$

Ainsi $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

- (h) D'après la question 6g, $T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_{-\lambda} \circ T_\lambda = T_0$. Or $T_0(P) = P + 0 \cdot L(P)X = P$ pour tout $P \in E$, donc $T_0 = \text{Id}_E$. Ainsi $T_{-\lambda}$ est l'inverse de T_λ :

$$T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall P \in E, \quad T_\lambda^{-1}(P) = P - \lambda L(P)X.$$

Exercice 2 – ECRICOME ECS 2020 (Exercice 2)

1. **Cas** $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

- (a) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série de Riemann :

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

(b) Soit $k \geq 2$. Comme $\alpha > 1 > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Pour $t \in [k, k+1]$, on a $t \geq k$, donc $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. Par croissance de l'intégrale sur un segment de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Pour $t \in [k-1, k]$, on a $0 < k-1 \leq t \leq k$, donc $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$, et de même :

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^k \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}.$$

D'où :

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

(c) Soit $n \geq 1$ et $N \geq n+1$. Les entiers k compris entre $n+1$ et N vérifient $k \geq 2$: en sommant l'encadrement précédent pour k allant de $n+1$ à N , la relation de Chasles donne :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Pour $0 < a \leq b$, une primitive de $t \mapsto t^{-\alpha}$ étant $t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$:

$$\int_a^b \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}} \right).$$

Comme $\alpha - 1 > 0$, $\frac{1}{N^{\alpha-1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. Par ailleurs, la série $\sum u_k$ converge, donc $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} R_{1,n}$. Par passage à la limite dans l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(d) Soit $n \geq 1$. En divisant l'encadrement précédent par $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} > 0$:

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \leq \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq 1.$$

Or $\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par continuité de $x \mapsto x^{\alpha-1}$ en 1. Par le théorème d'encadrement, le quotient tend vers 1 :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(e) La série $\sum u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si la série $\sum R_{1,n}$ converge. D'après la question précédente, $R_{1,n} \sim \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, et ces deux suites sont strictement positives. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum R_{1,n}$ a la même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$.

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

- (f) Si $R_{p-1,n} \sim \frac{c}{n^\beta}$ avec $c > 0$ et $\beta > 1$, la même comparaison série-intégrale qu'aux questions 1b à 1d donne $R_{p,n} \sim \frac{c}{(\beta-1)n^{\beta-1}}$: chaque passage au reste abaisse l'exposant d'une unité. On conjecture donc que :

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ si et seulement si } \alpha > p,$$

avec, dans ce cas, $R_{p,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-p) n^{\alpha-p}}$.

2. **Cas** $u_n = \frac{1}{n^n}$

- (a) Pour $n \geq 2$, on a $n^n \geq n^2$, donc :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}$$

- (b) Soit $k \geq 3$. Par croissance de $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}_+$, $k^k \geq 3^k > 0$, d'où en passant à l'inverse :

$$\forall k \geq 3, \quad u_k \leq \frac{1}{3^k}.$$

Soit $n \geq 2$ et $N \geq n+1$. Les entiers k compris entre $n+1$ et N vérifient $k \geq 3$, donc :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^{N-n}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

La série $\sum u_k$ converge, donc le terme du milieu tend vers $R_{1,n}$ quand $N \rightarrow +\infty$. Par passage à la limite :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Le même calcul donne, pour tout réel $c \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{c}{3^k} = \frac{c}{2 \cdot 3^n}.$$

- (c) Pour $n \geq 2$, $0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$, et la série géométrique $\sum \frac{1}{2 \cdot 3^n}$, de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum R_{1,n}$ converge :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre } 2.$$

Soit $n \geq 1$. Les entiers $k \geq n+1$ vérifient $k \geq 2$, donc en sommant l'encadrement de $R_{1,k}$ pour $k \geq n+1$ (toutes les séries en jeu convergent) :

$$0 \leq R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

D'où :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

- (d) Pour $p = 1$ et $n = 1$, l'inégalité demandée est fautive : $R_{1,1} \geq u_2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$. On établit donc l'encadrement pour $n \geq 2$ lorsque $p = 1$, et pour $n \geq 1$ dès que $p \geq 2$.

Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété $\mathcal{H}_p$: « la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p

et, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ ».

— *Initialisation.* $\mathcal{H}_1$ est établie aux questions 2a et 2b.

— *Hérédité.* Soit $p \geq 1$. On suppose que $\mathcal{H}_p$ est vraie. Pour $n \geq 2$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ converge : par comparaison de séries à termes positifs, $\sum R_{p,n}$ converge, c'est-à-dire que $\sum u_n$ converge à l'ordre $p + 1$. Pour $n \geq 2$, en sommant l'encadrement de $R_{p,k}$ pour $k \geq n + 1$:

$$0 \leq R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p \cdot 3^k} = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2^{p+1} \cdot 3^n}.$$

Ainsi $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

Par récurrence, $\mathcal{H}_p$ est vraie pour tout $p \geq 1$: la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à tout ordre, et :

$$\boxed{\forall p \geq 1, \quad \forall n \geq 2, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

Enfin, pour $p \geq 2$, les entiers $k \geq 2$ relèvent de $\mathcal{H}_{p-1}$, donc :

$$0 \leq R_{p,1} = \sum_{k=2}^{+\infty} R_{p-1,k} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p-1} \cdot 3^k} = \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2^p \cdot 3}.$$

L'encadrement vaut donc aussi pour $n = 1$ dès que $p \geq 2$.

- (e) D'après la question précédente, la série $\sum u_n$ converge à tout ordre, donc $R_{n,n}$ est défini pour tout $n \geq 1$, et pour $n \geq 2$ (en prenant $p = n$) :

$$0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n \cdot 3^n} = \frac{1}{6^n}.$$

La série géométrique $\sum \frac{1}{6^n}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} R_{n,n} \text{ converge.}}$$

3. **Cas** $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $1+t \geq 1$ et $t^n \geq 0$, donc $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème d'encadrement donne :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0.}$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$, donc $u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n dt = \int_0^1 (-t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La somme étant finie, la linéarité de l'intégrale donne :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-t)^n dt.$$

Pour $t \in [0, 1]$, $-t \neq 1$, et la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t$ vaut :

$$\sum_{n=0}^N (-t)^n = \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.}$$

(c) Pour $N \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire puis la question 3a :

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après la question 3b, les sommes partielles de $\sum u_n$ convergent donc vers $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge,}}$ et sa somme vaut $\ln 2$.

Soit $n \geq 0$. Le reste est la différence entre la somme et la somme partielle d'indice n :

$$R_{1,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right).$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \geq 0, \quad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.}$$

(d) Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété $\mathcal{H}_p$: « la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p ».

et, pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$.

— *Initialisation.* $\mathcal{H}_1$ est la question 3c.

— *Hérédité.* Soit $p \geq 1$. On suppose que $\mathcal{H}_p$ est vraie. Soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale (somme finie), puis somme géométrique de raison $-t \neq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N R_{p,n} &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{n=0}^N (-t)^n dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \cdot \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt. \end{aligned}$$

Pour $t \in [0, 1]$, $(1+t)^{p+1} \geq 1$, donc :

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt \right| \leq \int_0^1 t^{N+p+1} dt = \frac{1}{N+p+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Les sommes partielles de $\sum R_{p,n}$ convergent donc vers $S_p = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt$: la série $\sum R_{p,n}$ converge, c'est-à-dire que $\sum u_n$ converge à l'ordre $p+1$. Pour $n \geq 0$, le reste vaut :

$$\begin{aligned} R_{p+1,n} &= S_p - \sum_{k=0}^n R_{p,k} = S_p - \left(S_p - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt \right) \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+(p+1)}}{(1+t)^{p+1}} dt. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

Par récurrence, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à tout ordre $p \geq 1$, et :

$$\forall p \geq 1, \quad \forall n \geq 0, \quad R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt.$$

Exercice 3 – Centrale 2025 (Maths 2) (Parties A, B.I et B.II)

Partie A — Préliminaires

1. Soit $h > 0$ et soient s et t deux réels tels que $|t - s| \leq h$. La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée cos bornée par 1, donc l'inégalité des accroissements finis donne

$$|\sin s - \sin t| \leq |s - t| \leq h.$$

L'ensemble $\{|g(s) - g(t)| \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2, |t - s| \leq h\}$ est donc majoré par h , et sa borne supérieure vérifie $\omega_g(h) \leq h$.

2. (a) Soient $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $h > 0$. La fonction g est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc bornée sur ce segment par un réel M ; par 2π -périodicité, $|g| \leq M$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour tous réels s et t , $|g(s) - g(t)| \leq |g(s)| + |g(t)| \leq 2M$. L'ensemble

$$A_h = \{|g(s) - g(t)| \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2, |t - s| \leq h\}$$

est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient $|g(0) - g(0)| = 0$) et majorée par $2M$: elle admet une borne supérieure. Ainsi $\omega_g(h) = \sup A_h$ est un réel bien défini.

- (b) Supposons $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$. La fonction g' est continue et 2π -périodique, donc bornée d'après l'argument précédent : $\|g'\|_\infty$ est un réel. Soient s et t deux réels tels que $|t - s| \leq h$. Les rôles de s et t étant symétriques, on peut supposer $t \leq s$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$, $g(s) - g(t) = \int_t^s g'(u) du$. Par l'inégalité triangulaire, puis par croissance de l'intégrale (les bornes vérifiant $t \leq s$),

$$|g(s) - g(t)| = \left| \int_t^s g'(u) du \right| \leq \int_t^s |g'(u)| du \leq \int_t^s \|g'\|_\infty du = (s - t) \|g'\|_\infty \leq h \|g'\|_\infty.$$

Le réel $h \|g'\|_\infty$ majore A_h , donc $\omega_g(h) \leq h \|g'\|_\infty$.

Par ailleurs, A_h est une partie de $\mathbb{R}_+$ (une valeur absolue est positive), donc sa borne supérieure est positive : $\omega_g(h) \geq 0$. On a ainsi $0 \leq \omega_g(h) \leq h \|g'\|_\infty$ pour tout $h > 0$, et $h \|g'\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Par encadrement, $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

3. (a) Si $h \leq h'$, tout couple (s, t) vérifiant $|t - s| \leq h$ vérifie aussi $|t - s| \leq h'$: avec la notation de la question 2a, $A_h \subset A_{h'}$. Le réel $\omega_g(h')$ majore $A_{h'}$, donc majore A_h , et il est donc supérieur ou égal à la borne supérieure de A_h : $\boxed{\omega_g(h) \leq \omega_g(h')}$.

- (b) Soient s et t deux réels tels que $|t - s| \leq h + h'$. Posons $u = s + \frac{h}{h + h'}(t - s)$. Alors

$$|u - s| = \frac{h}{h + h'} |t - s| \leq h \quad \text{et} \quad |t - u| = \frac{h'}{h + h'} |t - s| \leq h',$$

donc, par l'inégalité triangulaire et par définition de $\omega_g(h)$ et $\omega_g(h')$,

$$|g(s) - g(t)| \leq |g(s) - g(u)| + |g(u) - g(t)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h').$$

Le réel $\omega_g(h) + \omega_g(h')$ majore $A_{h+h'}$, donc $\boxed{\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')}$.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— *Initialisation.* Pour $n = 1$, $\omega_g(1 \cdot h) = \omega_g(h) = 1 \cdot \omega_g(h)$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après la question 3b appliquée aux réels strictement positifs nh et h , puis d'après $\mathcal{P}_n$,

$$\omega_g((n+1)h) = \omega_g(nh + h) \leq \omega_g(nh) + \omega_g(h) \leq n\omega_g(h) + \omega_g(h) = (n+1)\omega_g(h),$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)}$.

Soit $\lambda > 0$ et $n = \lfloor \lambda \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. On a $\lambda < n \leq \lambda + 1$. Comme $\lambda h \leq nh$, la question 3a puis ce qui précède donnent

$$\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g(nh) \leq n\omega_g(h) \leq (1 + \lambda)\omega_g(h),$$

la dernière inégalité utilisant $\omega_g(h) \geq 0$ (question 2b). Ainsi $\boxed{\omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda)\omega_g(h)}$.

4. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, donc y admet une primitive G . Pour $x \in \mathbb{R}$, posons

$$\Phi(x) = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = G(\pi+x) - G(-\pi+x).$$

La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, par 2π -périodicité de g ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = g(\pi+x) - g(-\pi+x) = g(\pi+x) - g(\pi+x-2\pi) = 0.$$

Les parties réelle et imaginaire de Φ ont une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc Φ est constante sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \Phi(0)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.}$$

5. Soit $p \in \mathcal{T}_n$: il existe $(c_k)_{-n \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tel que $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto p(x-t)g(t)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, donc $\Delta(p)(x)$ est bien défini, et par linéarité de l'intégrale,

$$\Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik(x-t)} g(t) dt = \sum_{k=-n}^n c_k \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt \right) e^{ikx}.$$

Posons $\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt \in \mathbb{C}$ pour $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$: ces nombres ne dépendent pas de x , et

$$\Delta(p)(x) = \sum_{k=-n}^n (c_k \gamma_k) e^{ikx} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ donc } \Delta(p) \in \mathcal{T}_n.$$

Soient $p, q \in \mathcal{T}_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale,

$$\Delta(\lambda p + q)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda p(x-t) + q(x-t)) g(t) dt = \lambda \Delta(p)(x) + \Delta(q)(x),$$

donc $\Delta(\lambda p + q) = \lambda \Delta(p) + \Delta(q)$. Ainsi Δ est un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

Partie B

I — La fonction J_n

6. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Alors $e^{it} \neq 1$ et la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it} donne

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}.$$

Or, pour tout réel θ , $e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) = 2i e^{i\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}$. Comme $\frac{t}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$, $\sin \frac{t}{2} \neq 0$ et

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{2i e^{i(n+1)t/2} \sin((n+1)\frac{t}{2})}{2i e^{it/2} \sin \frac{t}{2}} = e^{int/2} \frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin \frac{t}{2}}.$$

En multipliant par $e^{-int/2}$: $\varphi_n(t) = \frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin \frac{t}{2}}$, puis, en élevant à la puissance quatrième,

$$f_n(t) = \left(\frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4.$$

7.

Erreur d'énoncé

φ_n n'appartient pas à $\mathcal{T}_n$ si n est impair. Cette erreur figure dans le sujet d'origine, tel que les candidats l'ont eu le jour du concours en 2025.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{i(k-\frac{n}{2})t}$.

Si n est pair, $\frac{n}{2}$ est un entier, donc pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'exposant $k - \frac{n}{2}$ est un entier vérifiant $-n \leq -\frac{n}{2} \leq k - \frac{n}{2} \leq \frac{n}{2} \leq n$. Ainsi φ_n est de la forme $t \mapsto \sum_{m=-n}^n c_m e^{imt}$ (avec $c_m = 1$ si $m + \frac{n}{2} \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $c_m = 0$ sinon) : $\varphi_n \in \mathcal{T}_n$.

Si n est impair, $\varphi_n \notin \mathcal{T}_n$. En effet, tout élément de $\mathcal{T}_n$ est 2π -périodique, comme combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto e^{imt}$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Or $\varphi_n(0) = n+1$ et $\varphi_n(2\pi) = e^{-in\pi} \sum_{k=0}^n e^{2ik\pi} = (-1)^n (n+1) = -(n+1) \neq \varphi_n(0)$, donc φ_n n'est pas 2π -périodique. Par exemple, $\varphi_1(t) = e^{-it/2} + e^{it/2} = 2 \cos \frac{t}{2}$ est 4π -périodique mais pas 2π -périodique.

Quoi qu'il en soit, l'appartenance de φ_n à $\mathcal{T}_n$ n'est plus utilisée dans la suite du problème.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en développant le produit,

$$\varphi_n(t)^2 = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n e^{i(j-\frac{n}{2})t} e^{i(k-\frac{n}{2})t} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n e^{i(j+k-n)t}.$$

Pour $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $j+k-n$ est un entier de $\llbracket -n, n \rrbracket$. En regroupant les termes selon la valeur de $m = j+k-n$, on obtient $\varphi_n(t)^2 = \sum_{m=-n}^n d_m e^{imt}$, où d_m est le nombre de couples $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tels que $j+k = m+n$. Ainsi $\varphi_n^2 \in \mathcal{T}_n$.

Plus généralement, si p et q sont deux éléments de $\mathcal{T}_n$, $p(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$ et $q(t) = \sum_{l=-n}^n b_l e^{ilt}$, alors

$$p(t)q(t) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n a_k b_l e^{i(k+l)t}$$

avec $k+l \in \llbracket -2n, 2n \rrbracket$: en regroupant de même les termes selon la valeur de $k+l$, $pq \in \mathcal{T}_{2n}$.

Appliqué à $p = q = \varphi_n^2$, cela donne $f_n = (\varphi_n^2)^2 \in \mathcal{T}_{2n}$.

8. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le changement d'indice $j = n - k$ donne

$$\overline{\varphi_n(t)} = \sum_{k=0}^n e^{-i(k-\frac{n}{2})t} = \sum_{j=0}^n e^{i(j-\frac{n}{2})t} = \varphi_n(t),$$

donc φ_n est à valeurs réelles et $f_n = \varphi_n^4$ est à valeurs réelles positives. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, comme somme et produit de fonctions continues, et $f_n(0) = (n+1)^4 > 0$. L'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle est strictement positive :

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt > 0.$$

Le réel $c_n = \frac{1}{I_n}$ est strictement positif et vérifie

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = \frac{I_n}{I_n} = 1.$$

Ainsi $c_n = \frac{1}{I_n}$ convient.

II — Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

9. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(-t) = \overline{\varphi_n(t)} = \varphi_n(t)$ d'après le calcul de la question 8 : φ_n est paire, donc f_n aussi. Les fonctions $t \mapsto |t| f_n(t)$ et f_n sont continues et paires sur $[-\pi, \pi]$, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = c_n \int_{-\pi}^{\pi} |t| f_n(t) dt = 2c_n \int_0^{\pi} t f_n(t) dt \quad \text{et} \quad 1 = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 2c_n \int_0^{\pi} f_n(t) dt.$$

La seconde égalité montre que $\int_0^{\pi} f_n(t) dt \neq 0$ et donne $2c_n = \left(\int_0^{\pi} f_n(t) dt \right)^{-1}$. En reportant dans la première :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}.$$

10. *Première méthode : étude de fonctions.* Posons $u(t) = t - \sin t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction u est dérivable, $u'(t) = 1 - \cos t \geq 0$, donc u est croissante ; comme $u(0) = 0$, $u \geq 0$, c'est-à-dire $\sin t \leq t$.

Posons $v(t) = \sin t - \frac{2}{\pi} t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction v est dérivable, $v'(t) = \cos t - \frac{2}{\pi}$ est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $v'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $v'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$. Il existe donc $t_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $v' \geq 0$ sur $[0, t_0]$ et $v' \leq 0$ sur $\left[t_0, \frac{\pi}{2}\right]$: v est croissante sur $[0, t_0]$

et décroissante sur $\left[t_0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $v(0) = 0$ et $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$, $v \geq 0$ sur chacun des deux intervalles, c'est-à-dire $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t$. Ainsi

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t.$$

Seconde méthode : concavité. La fonction sinus est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin'' = -\sin \leq 0$ sur cet intervalle : elle y est concave.

Une fonction concave est en dessous de ses tangentes. La tangente en 0 a pour équation $y = \sin'(0)t + \sin 0 = t$, donc, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \leq t$.

Une fonction concave est au-dessus de ses cordes. La corde joignant les points $(0, \sin 0) = (0, 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ a pour équation $y = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}t = \frac{2}{\pi}t$, donc, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$.

On retrouve l'encadrement.

11. Soit $t \in]0, \pi]$. Alors $\frac{t}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la question 10 donne $\sin \frac{t}{2} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi} > 0$, donc, d'après la question 6,

$$f_n(t) = \frac{\sin^4\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin^4 \frac{t}{2}} \leq \pi^4 \frac{\sin^4\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{t^4} \quad \text{puis} \quad t f_n(t) \leq \pi^4 \frac{\sin^4\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{t^3}.$$

La fonction $\psi : t \mapsto \frac{\sin^4\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{t^3}$ est continue sur $]0, \pi]$ et $\psi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{n+1}{2}\right)^4 t$, donc ψ se prolonge par continuité en 0 par $\psi(0) = 0$; l'inégalité $t f_n(t) \leq \pi^4 \psi(t)$ reste vraie en $t = 0$, où les deux membres sont nuls. Par croissance de l'intégrale sur $[0, \pi]$,

$$\int_0^\pi t f_n(t) dt \leq \pi^4 \int_0^\pi \psi(t) dt.$$

La fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^3}$ se prolonge de même par continuité en 0 par la valeur 0, et le changement de variable affine $t = \frac{2u}{n+1}$ donne

$$\int_0^\pi \psi(t) dt = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{\left(\frac{2u}{n+1}\right)^3} \cdot \frac{2}{n+1} du = \frac{(n+1)^2}{4} \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du.$$

Comme $\pi^4 \frac{(n+1)^2}{4} = \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, on obtient

$$\int_0^\pi t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du.$$

12. Soit $t \in]0, \pi]$. La question 10 donne $0 < \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$, donc, d'après la question 6,

$$f_n(t) = \frac{\sin^4\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin^4 \frac{t}{2}} \geq 16 \frac{\sin^4\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{t^4}.$$

La fonction $\chi : t \mapsto \frac{\sin^4\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{t^4}$ est continue sur $]0, \pi]$ et tend vers $\left(\frac{n+1}{2}\right)^4$ en 0 : on la prolonge par continuité en 0 par cette valeur, et l'inégalité $f_n(t) \geq 16 \chi(t)$ reste vraie en $t = 0$, où les deux membres valent $(n+1)^4$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^\pi f_n(t) dt \geq 16 \int_0^\pi \chi(t) dt.$$

La fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^4}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1, et le changement de variable $t = \frac{2u}{n+1}$ donne

$$\int_0^\pi \chi(t) dt = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{\left(\frac{2u}{n+1}\right)^4} \cdot \frac{2}{n+1} du = \frac{(n+1)^3}{8} \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du.$$

Comme $16 \cdot \frac{(n+1)^3}{8} = 2(n+1)^3$, on obtient

$$\boxed{\int_0^\pi f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $X = (n+1)\frac{\pi}{2}$, de sorte que $X \geq \frac{\pi}{2} > 1$. La fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^3}$, prolongée par 0 en 0, est continue et positive sur $[0, X]$, et l'on coupe son intégrale en 1 par la relation de Chasles.

Pour $u \in]0, 1]$, $0 \leq \sin u \leq u$ d'après la question 10, donc $0 \leq \frac{\sin^4 u}{u^3} \leq u$; l'inégalité reste vraie en 0 et, par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{\sin^4 u}{u^3} du \leq \int_0^1 u du = \frac{1}{2}$.

Pour $u \in [1, X]$, $0 \leq \sin^4 u \leq 1$, donc $0 \leq \frac{\sin^4 u}{u^3} \leq \frac{1}{u^3}$ et $\int_1^X \frac{\sin^4 u}{u^3} du \leq \int_1^X \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{X^2}\right) \leq \frac{1}{2}$.

En sommant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du \leq 1$.

D'autre part, la fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^4}$, prolongée par 1 en 0, est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Posons $D = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$: c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $D > 0$. Comme $(n+1)\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2}$ et que l'intégrande est positive, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du \geq D$.

Les questions 11 et 12 donnent

$$0 \leq \int_0^\pi t f_n(t) dt \leq \pi^4 \frac{(n+1)^2}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 D > 0,$$

d'où, avec la question 9,

$$\int_{-\pi}^\pi |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^\pi t f_n(t) dt}{\int_0^\pi f_n(t) dt} \leq \frac{\pi^4 \frac{(n+1)^2}{4}}{2(n+1)^3 D} = \frac{\pi^4}{8D} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Le réel $a = \frac{\pi^4}{8D}$ est strictement positif et ne dépend pas de n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^\pi |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}.$$

Exercice 4 – E3A 2024 (Exercice 4)

1. Le produit $R = PQ$ est un polynôme (de degré $p + q$), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|2^{-n}P(n)Q(n)| = |R(n)| 2^{-n}$. Par croissances comparées, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n^k (\sqrt{2})^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; $R(n)$ étant une combinaison linéaire finie de puissances n^k , on en déduit $R(n) (\sqrt{2})^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|R(n)| (\sqrt{2})^{-n} \leq 1$, d'où :

$$\forall n \geq N, \quad |2^{-n}P(n)Q(n)| = |R(n)| (\sqrt{2})^{-n} \cdot (\sqrt{2})^{-n} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

La série géométrique $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ converge car $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |2^{-n}P(n)Q(n)|$ converge : la série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n}P(n)Q(n)$ est absolument convergente.

2. (a) Soit $S \in E$. Si $S = 0$, alors $S(n) = 0$ pour tout n et $(S | S) = 0$.

Réciproquement, supposons $(S | S) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}S(n)^2 = 0$. Cette série est à termes positifs, donc ses sommes partielles sont majorées par sa somme : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 2^{-N}S(N)^2 \leq \sum_{n=0}^N 2^{-n}S(n)^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}S(n)^2 = 0.$$

Ainsi $S(N) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$: le polynôme S admet une infinité de racines, donc $S = 0$.

On a montré : $(S | S) = 0 \iff S = 0$.

- (b) D'après la question 1, pour tous $P, Q \in E$, la série $\sum 2^{-n}P(n)Q(n)$ converge, donc $(P | Q)$ est un réel bien défini.

— *Symétrie*. Pour tous $P, Q \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $P(n)Q(n) = Q(n)P(n)$, donc $(P | Q) = (Q | P)$.

— *Linéarité à gauche*. Soient $P, P', Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2^{-n}(\lambda P + \mu P')(n)Q(n) = \lambda 2^{-n}P(n)Q(n) + \mu 2^{-n}P'(n)Q(n).$$

Les séries $\sum 2^{-n}P(n)Q(n)$ et $\sum 2^{-n}P'(n)Q(n)$ convergent, donc par linéarité de la somme d'une série convergente, $(\lambda P + \mu P' | Q) = \lambda(P | Q) + \mu(P' | Q)$. Avec la symétrie, l'application est bilinéaire.

— *Positivité*. Pour tout $P \in E$, $(P | P) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}P(n)^2 \geq 0$, comme somme d'une série à termes positifs.

— *Caractère défini*. C'est la question 2a.

Ainsi $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

3. (a) La série géométrique $\sum t^n$ converge si et seulement si $|t| < 1$. Ainsi f est définie sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

- (b) Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, et $0 < e^{-x} < 1$ car $x > 0$. La série $\sum e^{-nx}$ est donc une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$: la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge.

- (c) Soit $x > 0$. D'après la question 3b et la question 3a appliquée à $t = e^{-x} \in] -1, 1[$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = f(e^{-x}), \quad \text{soit} \quad \forall x > 0, \quad g(x) = f(e^{-x}) = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]0, 1[\subset] -1, 1[$, et $f : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (d) Soit $x > 0$. On a $g(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$. En posant $u(x) = 1 - e^{-x}$, on a $u'(x) = e^{-x}$, $u''(x) = -e^{-x}$ et $g = \frac{1}{u}$, d'où :

$$g'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2},$$

$$g''(x) = -\frac{u''(x)u(x) - 2u'(x)^2}{u(x)^3} = \frac{e^{-x}(1 - e^{-x}) + 2e^{-2x}}{(1 - e^{-x})^3}.$$

Ainsi :

$$g(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}, \quad g'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}, \quad g''(x) = \frac{e^{-x}(1 + e^{-x})}{(1 - e^{-x})^3}.$$

- (e) Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la série $\sum n^\alpha 2^{-n}$ converge d'après la question 1 appliquée à $P = X^\alpha$ et $Q = 1$, donc S_α est bien défini. Pour $x > 0$, on a $e^{-nx} = 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $x = \ln 2$; la question 3c donne alors $S_0 = g(\ln 2) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Pour les 5/2 : On calcule S_1 et S_2 de deux manières.

Première méthode : dérivation terme à terme de la série définissant g . Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n : x \mapsto e^{-nx}$. Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $u'_n(x) = -n e^{-nx}$ et $u''_n(x) = n^2 e^{-nx}$.

- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, de somme g (question 3b).
- Soit $x > 0$. Par croissances comparées, $n e^{-nx} = o(e^{-nx/2})$ quand $n \rightarrow +\infty$, et la série géométrique $\sum e^{-nx/2}$ converge (question 3b avec $x/2$), donc $\sum u'_n(x)$ converge : la série $\sum u'_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|u''_n(x)| = n^2 e^{-nx} \leq n^2 e^{-na}$, et $\sum n^2 e^{-na}$ converge par le même argument ($n^2 e^{-na} = o(e^{-na/2})$). La série $\sum u''_n$ converge donc normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} = -g'(x) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-nx} = g''(x).$$

En $x = \ln 2$, avec les expressions de la question 3d et $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$:

$$S_1 = -g'(\ln 2) = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2, \quad S_2 = g''(\ln 2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{(\frac{1}{2})^3} = 6.$$

Seconde méthode : dérivation terme à terme d'une série entière. D'après la question 3a, f est la somme de la série entière $\sum t^n$, de rayon de convergence 1. Sur l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et se dérive terme à terme :

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \quad \text{et} \quad f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) t^{n-2} = \frac{2}{(1-t)^3}.$$

En $t = \frac{1}{2}$:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{-n} = \frac{1}{2} f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) 2^{-n} = \frac{1}{4} f''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4,$$

puis, par linéarité de la somme, $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n) 2^{-n} = 4 + S_1 = 6$.

Dans les deux cas : $S_0 = 2, \quad S_1 = 2, \quad S_2 = 6.$

Pour les 3/2 :

- i. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$, $e^{-x} \neq 1$ et la formule de la somme géométrique donne :

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^N (e^{-x})^n = \frac{1 - e^{-(N+1)x}}{1 - e^{-x}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{g_N(x) = g(x) (1 - e^{-(N+1)x})}.$$

D'une part, g_N est une somme finie de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en dérivant terme à terme cette somme finie :

$$\forall x > 0, \quad g'_N(x) = - \sum_{n=0}^N n e^{-nx}.$$

D'autre part, en dérivant le produit $g(x) (1 - e^{-(N+1)x})$:

$$\forall x > 0, \quad g'_N(x) = g'(x) (1 - e^{-(N+1)x}) + (N+1) e^{-(N+1)x} g(x).$$

- ii. Soit $x > 0$. Par croissances comparées, comme $x > 0$:

$$e^{-(N+1)x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad (N+1) e^{-(N+1)x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

La seconde expression de $g'_N(x)$ donne donc : $\boxed{g'_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} g'(x)}.$

D'après la première expression, $-g'_N(x)$ est la somme partielle d'indice N de la série $\sum n e^{-nx}$. Cette suite de sommes partielles converge vers $-g'(x)$, donc la série converge et :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} = -g'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

Pour $x = \ln 2$, on a $e^{-x} = \frac{1}{2}$ et $e^{-nx} = 2^{-n}$ pour tout n , d'où :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{-n} = -g'(\ln 2) = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2}, \quad \text{soit} \quad \boxed{S_1 = 2}.$$

- iii. On a vu que $S_0 = g(\ln 2) = 2$. Pour S_2 , on propose deux méthodes.

Première méthode. Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $h_N(x) = 1 - e^{-(N+1)x}$, de sorte que $h'_N(x) = (N+1) e^{-(N+1)x}$ et $h''_N(x) = -(N+1)^2 e^{-(N+1)x}$. En dérivant une seconde fois les deux expressions de g'_N obtenues en (i), la seconde par la formule de Leibniz :

$$\forall x > 0, \quad g''_N(x) = \sum_{n=0}^N n^2 e^{-nx} = g''(x) h_N(x) + 2 g'(x) h'_N(x) + g(x) h''_N(x).$$

Pour $x > 0$ fixé, $h_N(x) \rightarrow 1$, $h'_N(x) \rightarrow 0$ et $h''_N(x) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, donc $g''_N(x) \rightarrow g''(x)$: la série $\sum n^2 e^{-nx}$ converge et sa somme vaut $g''(x)$. En $x = \ln 2$, d'après la question 3d :

$$S_2 = g''(\ln 2) = \frac{\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})}{(1 - \frac{1}{2})^3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = 6.$$

Seconde méthode. La série $\sum n^2 2^{-n}$ converge d'après la question 1. Son terme d'indice 0 est nul, donc en multipliant par 2 puis en posant $n = m + 1$:

$$2S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-(n-1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)^2 2^{-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m^2 + 2m + 1) 2^{-m} = S_2 + 2S_1 + S_0,$$

par linéarité de la somme, les séries $\sum m^2 2^{-m}$, $\sum m 2^{-m}$ et $\sum 2^{-m}$ étant convergentes. Ainsi $S_2 = 2S_1 + S_0 = 4 + 2 = 6$. Le même décalage redonne S_1 : $2S_1 = S_1 + S_0$, soit $S_1 = S_0 = 2$.

Dans les deux cas : $\boxed{S_0 = 2, \quad S_1 = 2, \quad S_2 = 6}.$

4. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Par définition du produit scalaire et linéarité de la somme, puis d'après la question 3e :

$$(X^2 - aX - b \mid 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - an - b) = S_2 - aS_1 - bS_0 = 6 - 2a - 2b,$$

$$(X^2 - aX - b \mid X) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^3 - an^2 - bn) = S_3 - aS_2 - bS_1 = 26 - 6a - 2b.$$

Le polynôme $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X si et seulement si :

$$\begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = -2. \end{cases}$$

Ainsi $a = 5$ et $b = -2$: le polynôme $P_0 = X^2 - 5X + 2$ est orthogonal à 1 et à X .

- (b) Notons $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Pour $(c, d) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2 = (X^2 - cX - d \mid X^2 - cX - d) = \|X^2 - (cX + d)\|^2.$$

Lorsque (c, d) décrit $\mathbb{R}^2$, le polynôme $cX + d$ décrit le plan $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$. L'ensemble considéré est donc l'ensemble des carrés des distances de X^2 aux points du plan $\mathbb{R}_1[X]$. Or $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E : la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ est atteinte en un unique point, le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. D'après la question 4a, $X^2 - (5X - 2) = P_0$ est orthogonal à 1 et à X , donc à $\mathbb{R}_1[X]$: le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $5X - 2$. Ainsi :

$$\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ admet un minimum, égal à } \|P_0\|^2,$$

atteint pour $(c, d) = (5, -2)$.

Rappelons pourquoi la distance est minimale au projeté orthogonal. Pour $(c, d) \in \mathbb{R}^2$:

$$X^2 - cX - d = P_0 + Q_{c,d}, \quad \text{avec} \quad Q_{c,d} = (5 - c)X + (-2 - d) \in \mathbb{R}_1[X].$$

Comme P_0 est orthogonal à $Q_{c,d}$, le théorème de Pythagore donne :

$$\|X^2 - cX - d\|^2 = \|P_0\|^2 + \|Q_{c,d}\|^2 \geq \|P_0\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $Q_{c,d} = 0$, c'est-à-dire $(c, d) = (5, -2)$.

- (c) La distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ est $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - Q\|$. Les éléments de $\mathbb{R}_1[X]$ sont exactement les polynômes $cX + d$ avec $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, donc :

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \inf_{(c,d) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - cX - d\| = \inf_{(c,d) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2}.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, cette borne inférieure est la racine carrée du minimum obtenu à la question 4b, soit $\|P_0\|$. Calculons $\|P_0\|^2$. Comme P_0 est orthogonal à $5X - 2 \in \mathbb{R}_1[X]$:

$$\begin{aligned} \|P_0\|^2 &= (P_0 \mid P_0) = (P_0 \mid X^2 - 5X + 2) = (P_0 \mid X^2) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - 5n + 2) n^2 = S_4 - 5S_3 + 2S_2 = 150 - 130 + 12 = 32. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

distance atteinte pour $Q = 5X - 2$.