

DM 2 – COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

À rendre le 13/10/2026

Exercice 1 – CCINP PSI 2021 (Problème 2)

Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $GL_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour les 5/2 : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\text{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes.

Pour les 3/2 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet que la fonction $x \mapsto \det(xI_n - M)$, définie sur $\mathbb{C}$, est polynomiale : c'est la fonction associée à un polynôme $\chi_M \in \mathbb{C}[X]$, unitaire de degré n , appelé polynôme caractéristique de M . On note $\text{Sp}(M)$ l'ensemble des racines complexes de χ_M .

On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à trois cas particuliers.

On montre d'abord que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C , où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C , c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C .

On montre ensuite que $\det(I_n + C^2) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices symétriques réelles C .

On considère enfin le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}^+$.

La **Partie II** est consacrée au cas général.

On montre que pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$.

Partie I — Trois cas particuliers

1. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. Démontrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}$ et que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

2. **Pour les 5/2 :** On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que :

$$\det(I_n + C^2) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Pour les 3/2 : On admet que pour toute matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$. Démontrer le même résultat.

3. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
4. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dédurre de la question précédente que, dans ce cas, on a :

$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$

En déduire que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}^+$ et que $\det(I_n + C^2) = 0$ si et seulement si $i \in \text{Sp}(C)$.

Pour les 3/2 : On pourra commencer par montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\lambda \in \text{Sp}(M)$ si et seulement si la matrice $\lambda I_n - M$ n'est pas inversible.

Partie II — Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on démontre que $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}^+$. Seule la **Q3** de la partie I sera utile pour la suite.

5. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\bar{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :

$$\det(I_n + C\bar{C}) = \det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix}.$$

On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix}$.

6. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1) .
7. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.
8. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour les 3/2 : On pourra montrer que $\chi_{C_0}(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel x .

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.

On considère l'application $\Omega : \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}), \quad \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix}.$$

9. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :

- a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0 \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \Omega \left(C_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$;
- b) $\Omega \circ \Omega = -\text{id}_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;
- c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Omega \left(\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \bar{\lambda} \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$.

10. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.

Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ est libre et que le plan $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ est stable par Ω .

11. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.

Montrer que :

$$E \cap \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$:

$$F_\lambda = \text{Ker}((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}).$$

On admet, pour traiter la **Q14**, que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

- 12. Montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\bar{\lambda}}$.
- 13. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.
- 14. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbb{R}^+$.