

Séance à distance

Séries de fonctions : convergence normale, continuité, double limite

Mode d'emploi

- Vous travaillez **par groupe de colle** dans votre salle. Je passe régulièrement dans chaque groupe. Si vous êtes bloqués, signalez-le (chat ou main levée) plutôt que d'attendre.
- Pour chaque notion : un **rappel ou énoncé admis** (les démonstrations et le bilan sur les modes de convergence seront faits en classe), puis des **exemples**, d'abord guidés, puis en autonomie.
- Si vous avez tout terminé, des exercices supplémentaires sont proposés en fin de fiche.

Dans toute la fiche, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Convergence normale

Rappel

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. La série $\sum f_n$ **converge normalement** sur I si chaque f_n est bornée sur I et si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Exemple 1 – guidé.

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n^2}$.

1. Soit $n \geq 1$. Majorer $|f_n(t)|$, pour $t \in \mathbb{R}$, par une quantité indépendante de t .
2. En déduire que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$, et donner une majoration de $\|f_n\|_\infty$.
3. À l'aide d'un théorème de comparaison, montrer que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
4. Conclure : la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 – même méthode, en autonomie.

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 – avec une étude de fonction.

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, +\infty[$, on pose $h_n(t) = t^2 e^{-nt}$.

1. Soit $n \geq 1$. Étudier les variations de h_n sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que h_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et calculer $\|h_n\|_\infty$.
3. Montrer que la série $\sum \|h_n\|_\infty$ converge.
4. Conclure.

Bonus – une série qui ne converge pas normalement.

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, +\infty[$, on pose $u_n(t) = t e^{-nt}$.

1. Calculer $\|u_n\|_\infty$ (en s'inspirant de l'exemple 3).
 2. La série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge-t-elle ? Conclure.
- * Soit $a > 0$. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. (On pourra remarquer que u_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ dès que $n \geq 1/a$.)

2 Continuité de la limite d'une suite de fonctions

Théorème (admis)

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$. Si chaque f_n est continue en a et si (f_n) converge uniformément vers f sur I , alors f est continue en a .
En particulier, une limite uniforme sur I de fonctions continues sur I est continue sur I .

Exemple 4 – guidé.

Soit $a \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, a]$, on pose $f_n(t) = t^n$.

1. Déterminer la limite simple f de (f_n) sur $[0, a]$.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$.
3. À l'aide du théorème, conclure quant à la continuité de f sur $[0, a]$.

Bonus. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $g(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} t^n$. La fonction g est-elle continue en 1 ? Que peut-on en déduire sur la convergence de (f_n) sur $[0, 1]$?

Exemple 5 – en autonomie.

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, +\infty[$, on pose $f_n(t) = \arctan(nt)$.

Déterminer la limite simple de (f_n) sur $[a, +\infty[$, montrer que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, et conclure.

Bonus. Même étude sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3 Continuité de la somme d'une série de fonctions

Théorème (admis)

Si chaque f_n est continue sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Indication pour tous les exemples. Déterminer l'ensemble de définition, c'est trouver pour quelles valeurs de la variable la formule a un sens. Ici, on doit donc chercher pour quelles valeurs de la variable la série *numérique* converge.

Exemple 6 – guidé.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de G . (On distinguera les cas $|t| \leq 1$ et $|t| > 1$.)
2. Montrer que la série $\sum \frac{t^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1, 1]$ (même méthode qu'en partie 1).
3. Conclure : G est continue sur $[-1, 1]$.

Exemple 7 – guidé : la fonction ζ de Riemann.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de ζ .
2. Soit $a > 1$. Calculer $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$, puis montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. En déduire que ζ est continue sur $[a, +\infty[$.
4. On montre maintenant que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
 - (a) Soit $x_0 > 1$. Justifier qu'il existe a tel que $1 < a < x_0$ (en donner un explicitement).
 - (b) En utilisant la question 3 avec ce a , justifier que ζ est continue en x_0 . (Pourquoi demande-t-on $a < x_0$ et pas seulement $a \leq x_0$?)

(c) Conclure.

Bonus – suite du bonus de la partie 1.

Pour $t \geq 0$, on pose $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt}$.

1. En utilisant la question $\star$ du bonus de la partie 1 et le même raisonnement que dans l'exemple 7, montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $S(t)$ pour $t > 0$ (série géométrique), ainsi que $S(0)$. La fonction S est-elle continue en 0 ?
3. Qu'en déduit-on sur la convergence uniforme de $\sum t e^{-nt}$ sur $[0, +\infty[$?

4 Théorème de la double limite pour les séries

Théorème (admis)

Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I (par exemple une borne de I , éventuellement $\pm\infty$). On suppose que :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I ;
- pour tout n , $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, et

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Exemple 8 – guidé : limite de ζ en $+\infty$.

1. Justifier que $\sum \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$. (Utiliser l'exemple 7.)
2. Pour $n \geq 1$ fixé, déterminer $\ell_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x}$. (Attention au cas $n = 1$.)
3. Conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

Exemple 9 – en autonomie.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $T(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Montrer que T est définie et continue sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser l'exemple 2.)
2. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$, puis $\lim_{t \rightarrow -\infty} T(t)$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Bonus – un équivalent de $\zeta(x) - 1$ en $+\infty$.

D'après l'exemple 8, $\zeta(x) - 1 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. On cherche un équivalent.

1. Montrer que, pour $x > 1$, $2^x(\zeta(x) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$.
2. Montrer que cette série converge normalement sur $[2, +\infty[$. (Pour $n \geq 2$ et $x \geq 2$, comparer $\left(\frac{2}{n}\right)^x$ et $\left(\frac{2}{n}\right)^2$.)
3. Pour $n \geq 2$ fixé, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$. (Attention au cas $n = 2$.)
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x(\zeta(x) - 1)$, puis un équivalent de $\zeta(x) - 1$ en $+\infty$.

Exercices supplémentaires (si vous avez tout terminé)

E1. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa limite en $+\infty$.

E2. Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$. Déterminer l'ensemble de définition de g , montrer que g y est continue, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

E3. Soit $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$.

(a) Calculer $\|f_n\|_{\infty,]0, +\infty[}$ où $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. Y a-t-il convergence normale sur $]0, +\infty[$?

(b) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

★★ Montrer que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2}$. (*Penser aux sommes de Riemann ou à une comparaison série-intégrale.*) φ est-elle continue en 0 ?

E4. (*Utilise le critère spécial des séries alternées.*) Soit $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x \geq 0$.

(a) Montrer que la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$ (on majorera le reste), mais pas normalement.

(b) En déduire que ψ est continue sur $[0, +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.