

Séance à distance – Corrigé

Séries de fonctions : convergence normale, continuité, double limite

Rappel utilisé tout au long du corrigé

Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors pour tout $x \in I$ la série $\sum f_n(x)$ converge absolument, et $\sum f_n$ converge uniformément sur I (le reste vérifie $\|R_N\|_\infty \leq \sum_{n>N} \|f_n\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$).

1 Convergence normale

Exemple 1 – guidé.

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n^2}$.

1. Soit $n \geq 1$ et soit $t \in \mathbb{R}$. On a $|\sin(nt)| \leq 1$ et $n^2 > 0$, donc

$$|f_n(t)| = \frac{|\sin(nt)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Le majorant $\frac{1}{n^2}$ ne dépend pas de t .

2. La question 1 montre que $|f_n|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{n^2}$: f_n est donc bornée sur $\mathbb{R}$, et $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)|$ existe.

Le réel $\frac{1}{n^2}$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(t)|, t \in \mathbb{R}\}$. Par définition de la borne supérieure (plus petit des majorants),

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

(Complément : il y a égalité. Pour $t_n = \frac{\pi}{2n}$, $|f_n(t_n)| = \frac{|\sin(\pi/2)|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, et $\|f_n\|_\infty$ majore $|f_n(t_n)|$, donc $\frac{1}{n^2} \leq \|f_n\|_\infty$.)

3. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (exposant $2 > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
4. Chaque f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ (question 2) et la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge (question 3) : par définition, **la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.**

Exemple 2 – même méthode, en autonomie.

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

Majoration. Soit $n \geq 1$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout réel u , $|\arctan u| < \frac{\pi}{2}$; en particulier $|\arctan(nt)| \leq \frac{\pi}{2}$. Comme $n^2 > 0$:

$$|g_n(t)| = \frac{|\arctan(nt)|}{n^2} \leq \frac{\pi}{2n^2},$$

majorant indépendant de t .

Norme infinie. Ainsi $|g_n|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{\pi}{2n^2}$: g_n est bornée sur $\mathbb{R}$. Le réel $\frac{\pi}{2n^2}$ étant un majorant de $\{|g_n(t)|, t \in \mathbb{R}\}$, par définition de la borne supérieure,

$$\|g_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

(Complément : il y a égalité. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g_n(t)| \leq \|g_n\|_\infty$; en faisant tendre t vers $+\infty$ dans cette inégalité, $\frac{\pi}{2n^2} \leq \|g_n\|_\infty$. La borne supérieure n'est cependant pas atteinte.)

Convergence de $\sum \|g_n\|_\infty$. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \|g_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2n^2}$, et $\sum \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$, multipliée par une constante). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.

Conclusion. Chaque g_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\sum \|g_n\|_\infty$ converge : $\sum g_n$ **converge normalement** sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 – avec une étude de fonction.

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, +\infty[$, $h_n(t) = t^2 e^{-nt}$.

1. Soit $n \geq 1$. La fonction h_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables, et pour $t \geq 0$:

$$h'_n(t) = 2t e^{-nt} - n t^2 e^{-nt} = t(2 - nt) e^{-nt}.$$

Pour $t \geq 0$, on a $t \geq 0$ et $e^{-nt} > 0$, donc $h'_n(t)$ est du signe de $2 - nt$, c'est-à-dire :

- $h'_n(t) \geq 0$ pour $t \in [0, \frac{2}{n}]$: h_n est croissante sur $[0, \frac{2}{n}]$;
- $h'_n(t) \leq 0$ pour $t \in [\frac{2}{n}, +\infty[$: h_n est décroissante sur $[\frac{2}{n}, +\infty[$.

De plus $h_n(0) = 0$, $h_n(\frac{2}{n}) = \frac{4}{n^2} e^{-2}$, et $h_n(t) = \frac{1}{n^2} (nt)^2 e^{-nt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées ($u^2 e^{-u} \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow +\infty$).

2. Majoration. Soit $t \geq 0$. Si $t \in [0, \frac{2}{n}]$, la croissance de h_n donne $h_n(t) \leq h_n(\frac{2}{n})$; si $t \geq \frac{2}{n}$, la décroissance donne aussi $h_n(t) \leq h_n(\frac{2}{n})$. Comme de plus $h_n(t) \geq 0$:

$$|h_n(t)| = h_n(t) \leq \frac{4}{e^2 n^2}.$$

Norme infinie. Ainsi $|h_n|$ est majorée sur $[0, +\infty[$ par $\frac{4}{e^2 n^2}$, indépendant de t : h_n est bornée sur $[0, +\infty[$. Par définition de la borne supérieure, $\|h_n\|_\infty \leq \frac{4}{e^2 n^2}$.

Réciproquement, $\frac{2}{n} \in [0, +\infty[$, donc $\frac{4}{e^2 n^2} = \left| h_n\left(\frac{2}{n}\right) \right| \leq \|h_n\|_\infty$. Finalement

$$\|h_n\|_\infty = \frac{4}{e^2 n^2}.$$

3. La série $\sum \frac{4}{e^2 n^2} = \frac{4}{e^2} \sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$, multipliée par une constante). Donc $\sum \|h_n\|_\infty$ converge.
4. Chaque h_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et $\sum \|h_n\|_\infty$ converge : $\sum h_n$ **converge normalement** sur $[0, +\infty[$.

Bonus – une série qui ne converge pas normalement.

Pour $n \geq 1$ et $t \geq 0$, $u_n(t) = t e^{-nt}$.

1. Soit $n \geq 1$. u_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $u'_n(t) = (1 - nt) e^{-nt}$, du signe de $1 - nt$: u_n est croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$.

Majoration. Soit $t \geq 0$. Comme pour l'exemple précédent, la croissance puis la décroissance donnent $u_n(t) \leq u_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{en}$, et $u_n(t) \geq 0$, donc $|u_n(t)| \leq \frac{1}{en}$.

Norme infinie. u_n est donc bornée sur $[0, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure, $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{en}$. Comme $\frac{1}{n} \in [0, +\infty[$ et $\left| u_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{en}$, on a aussi $\frac{1}{en} \leq \|u_n\|_\infty$. Finalement

$$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{en}.$$

2. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum \frac{1}{en}$ aussi (multiplication par la constante non nulle $\frac{1}{e}$). Ainsi $\sum \|u_n\|_\infty$ diverge : $\sum u_n$ **ne converge pas normalement** sur $[0, +\infty[$.

Le défaut vient du voisinage de 0 : le maximum de u_n est atteint en $\frac{1}{n}$, point qui tend vers 0.

★ Soit $a > 0$.

Pour $n \geq \frac{1}{a}$. Soit $n \geq \frac{1}{a}$; alors $\frac{1}{n} \leq a$, donc $[a, +\infty[\subset \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$, intervalle sur lequel u_n est décroissante. Soit $t \geq a$: on a $0 \leq u_n(t) \leq u_n(a)$, c'est-à-dire

$$|u_n(t)| \leq a e^{-na}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t : u_n est bornée sur $[a, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure,

$$\|u_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq a e^{-na} = a (e^{-a})^n.$$

(Il y a même égalité, la valeur $a e^{-na}$ étant atteinte en $t = a$.)

Pour $1 \leq n < \frac{1}{a}$ (nombre fini d'indices) : u_n est bornée sur $[a, +\infty[$ puisqu'elle l'est sur $[0, +\infty[$ (question 1).

Convergence. Comme $a > 0$, $0 < e^{-a} < 1$: la série géométrique $\sum a (e^{-a})^n$ converge. Pour $n \geq \frac{1}{a}$, on a $0 \leq \|u_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq a (e^{-a})^n$; le théorème de comparaison des séries à termes positifs (valable à partir d'un certain rang) montre que $\sum \|u_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$ converge.

Conclusion. $\sum u_n$ **converge normalement sur** $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

2 Continuité de la limite d'une suite de fonctions

Exemple 4 – guidé.

Soit $a \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, a]$, $f_n(t) = t^n$.

1. Soit $t \in [0, a]$. On a $0 \leq t \leq a < 1$, donc $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $t \in [0, 1[$: elle tend vers 0. La suite (f_n) converge donc simplement sur $[0, a]$ vers la fonction nulle : $f = 0$.
2. *Majoration.* Soit $n \geq 1$ et soit $t \in [0, a]$. Comme $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et $0 \leq t \leq a$:

$$|f_n(t) - f(t)| = t^n \leq a^n,$$

majorant indépendant de t .

Norme infinie. Ainsi $f_n - f$ est bornée sur $[0, a]$ et, par définition de la borne supérieure,

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, a]} \leq a^n.$$

Passage à la limite. Comme $0 \leq a < 1$, $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Par encadrement, $\|f_n - f\|_{\infty, [0, a]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$: (f_n) **converge uniformément vers f sur $[0, a]$** .

3. Vérifions les hypothèses du théorème : chaque f_n est continue sur $[0, a]$ (fonction polynomiale), et (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$ (question 2). Le théorème permet de conclure que **f est continue sur $[0, a]$** .

(Ici on le savait déjà puisque f est la fonction nulle ; l'intérêt est de vérifier les hypothèses dans un cas simple.)

Bonus. *Calcul de g .* Soit $t \in [0, 1]$. Si $t \in [0, 1[$, $t^n \rightarrow 0$ (suite géométrique de raison dans $[0, 1[)$. Si $t = 1$, $1^n = 1 \rightarrow 1$. Donc

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Continuité en 1. Pour $t \in [0, 1[$, $g(t) = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = 0 \neq 1 = g(1)$: **g n'est pas continue en 1.**

Conséquence. Raisonnons par l'absurde : si $(t \mapsto t^n)$ convergerait uniformément vers g sur $[0, 1]$, comme chaque $t \mapsto t^n$ est continue sur $[0, 1]$, le théorème affirmerait que g est continue sur $[0, 1]$, en particulier en 1 : contradiction. **La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$** , bien qu'elle le soit sur chaque $[0, a]$ avec $a < 1$.

Remarque

Le théorème sert ici « à l'envers » : par contraposée, si la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas continue, la convergence n'est pas uniforme. C'est un outil efficace pour nier une convergence uniforme.

Exemple 5 – en autonomie.

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, +\infty[$, $f_n(t) = \arctan(nt)$.

Limite simple. Soit $t \geq a$. Comme $t > 0$, $nt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et $\arctan u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, donc $f_n(t) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. La limite simple est la fonction constante $f = \frac{\pi}{2}$.

Un résultat préliminaire. Pour tout $u > 0$, $\arctan u + \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$. En effet, $\theta : u \mapsto \arctan u + \arctan \frac{1}{u}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$\theta'(u) = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{u^2+1} = 0;$$

θ est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, égale à $\theta(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Majoration. Soit $n \geq 1$ et soit $t \geq a$. Comme $nt > 0$:

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(nt) = \arctan\left(\frac{1}{nt}\right).$$

Or $t \geq a > 0$ donne $0 < \frac{1}{nt} \leq \frac{1}{na}$, et $\arctan$ est croissante, donc

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \arctan\left(\frac{1}{na}\right),$$

majorant indépendant de t .

Norme infinie. Ainsi $f_n - f$ est bornée sur $[a, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure,

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \arctan\left(\frac{1}{na}\right).$$

Passage à la limite. $\frac{1}{na} \rightarrow 0$ et $\arctan$ est continue en 0 avec $\arctan 0 = 0$, donc $\arctan\left(\frac{1}{na}\right) \rightarrow 0$. Par encadrement, $\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \rightarrow 0 : (f_n)$ **converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.**

(Variante : $\arctan v \leq v$ pour $v \geq 0$ fournit le majorant $\frac{1}{na}$.)

Conclusion. Chaque f_n est continue sur $[a, +\infty[$ et la convergence y est uniforme : d'après le théorème, f est continue sur $[a, +\infty[$, ce qui est cohérent avec le fait que f est constante.

Bonus : étude sur $\mathbb{R}$.

Limite simple. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t > 0$, $f_n(t) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (comme ci-dessus). Si $t = 0$, $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$. Si $t < 0$, $nt \rightarrow -\infty$ donc $f_n(t) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Convergence uniforme ? f n'est pas continue en 0 (par exemple $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = f(0)$), alors que chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Par contraposée du théorème, **la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.**

Vérification directe. Pour $n \geq 1$, $f_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (par π). Avec $t_n = \frac{1}{n}$: $|f_n(t_n) - f(t_n)| = |\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{4}$. La norme infinie majorant toutes les valeurs $|f_n(t) - f(t)|$, on a $\|f_n - f\|_{\infty} \geq \frac{\pi}{4}$ pour tout $n \geq 1$: elle ne tend pas vers 0.

En revanche, par imparité de $\arctan$, la convergence est uniforme sur $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$: tout se dégrade au voisinage de 0.

3 Continuité de la somme d'une série de fonctions

Exemple 6 – guidé.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$. On note $v_n(t) = \frac{t^n}{n^2}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé; on étudie la série numérique $\sum v_n(t)$.

Cas $|t| \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$, $|v_n(t)| = \frac{|t|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum |v_n(t)|$ converge : la série $\sum v_n(t)$ converge absolument, donc converge.

Cas $|t| > 1$. Alors $\ln |t| > 0$ et $|v_n(t)| = \frac{e^{n \ln |t|}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées. Le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

Conclusion : G est définie sur $D = [-1, 1]$.

2. *Majoration.* Soit $n \geq 1$ et soit $t \in [-1, 1]$. Comme $|t| \leq 1$, $|t|^n \leq 1$ et

$$|v_n(t)| = \frac{|t|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

majorant indépendant de t .

Norme infinie. v_n est donc bornée sur $[-1, 1]$ et, par définition de la borne supérieure, $\|v_n\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \frac{1}{n^2}$. (Égalité, car $|v_n(1)| = \frac{1}{n^2}$.)

Convergence. $0 \leq \|v_n\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge : par comparaison, $\sum \|v_n\|_{\infty, [-1, 1]}$ converge. **La série $\sum v_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.**

3. La convergence normale sur $[-1, 1]$ entraîne la convergence uniforme sur $[-1, 1]$. De plus, chaque v_n est continue sur $[-1, 1]$ (fonction polynomiale). D'après le théorème de continuité, **G est continue sur $[-1, 1]$.**

Exemple 7 – guidé : la fonction ζ de Riemann.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann : elle converge si et seulement si $x > 1$. Donc $D =]1, +\infty[$.
2. Soit $a > 1$.

Majoration. Soit $n \geq 1$ et soit $x \geq a$. Comme $n \geq 1$, $\ln n \geq 0$, et $x \geq a$ donne $x \ln n \geq a \ln n$. Par croissance de l'exponentielle, $n^x = e^{x \ln n} \geq e^{a \ln n} = n^a > 0$, d'où

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a},$$

majorant indépendant de x .

Norme infinie. f_n est donc bornée sur $[a, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n^a}$. Réciproquement, $a \in [a, +\infty[$ et $|f_n(a)| = \frac{1}{n^a}$, donc $\frac{1}{n^a} \leq \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$. Finalement

$$\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{1}{n^a}.$$

Convergence normale. Comme $a > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge : **$\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.**

3. D'après la question 2, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Chaque $f_n : x \mapsto e^{-x \ln n}$ est continue sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème de continuité, la somme, c'est-à-dire la restriction de ζ à $[a, +\infty[$, est continue : **ζ est continue sur $[a, +\infty[$.**

4. (a) Soit $x_0 > 1$. Posons $a = \frac{1+x_0}{2}$. Alors $a-1 = \frac{x_0-1}{2} > 0$ et $x_0 - a = \frac{x_0-1}{2} > 0$, donc $1 < a < x_0$.

- (b) Avec ce a , la question 3 donne la continuité de $\zeta_{[a, +\infty[}$ en x_0 . Posons $\delta = x_0 - a > 0$. Pour $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a $x > x_0 - \delta = a$, donc $x \in [a, +\infty[$ et $\zeta(x) = \zeta_{[a, +\infty[}(x)$. Ainsi, au voisinage de x_0 , ζ coïncide avec sa restriction à $[a, +\infty[$, et

$$\zeta(x) = \zeta_{[a, +\infty[}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \zeta_{[a, +\infty[}(x_0) = \zeta(x_0).$$

ζ est donc continue en x_0 .

Pourquoi $a < x_0$ et pas seulement $a \leq x_0$? Si $a = x_0$, alors $\delta = 0$: l'intervalle $[a, +\infty[$ ne contient aucun point à gauche de x_0 , et la question 3 ne donne que la continuité à droite de ζ en x_0 . Il faut que x_0 soit *intérieur* à $[a, +\infty[$.

- (c) Le réel $x_0 > 1$ étant quelconque, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Remarque

On ne pouvait pas conclure directement sur $]1, +\infty[$. Soit $n \geq 1$. Pour tout $x > 1$, $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n}$, donc par définition de la borne supérieure $\|f_n\|_{\infty,]1, +\infty[} \leq \frac{1}{n}$. Réciproquement, pour tout $x > 1$, $\frac{1}{n^x} \leq \|f_n\|_{\infty,]1, +\infty[}$, et en faisant tendre x vers 1^+ on obtient $\frac{1}{n} \leq \|f_n\|_{\infty,]1, +\infty[}$. Donc $\|f_n\|_{\infty,]1, +\infty[} = \frac{1}{n}$ et, la série harmonique divergeant, **il n'y a pas convergence normale sur $]1, +\infty[$** . D'où la stratégie : convergence normale sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, puis argument local pour la continuité.

Bonus – suite du bonus de la partie 1.

Pour $t \geq 0$, $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t).$

1. *Continuité sur tout $[a, +\infty[$.* Soit $a > 0$. D'après la question $\star$ de la partie 1, $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$. Chaque u_n est continue sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème, S est continue sur $[a, +\infty[$.

Continuité en tout $t_0 > 0$. Soit $t_0 > 0$ et $a = \frac{t_0}{2}$, de sorte que $0 < a < t_0$. On pose $\delta = t_0 - a = \frac{t_0}{2} > 0$: pour $t \geq 0$ tel que $|t - t_0| < \delta$, on a $t > a$, donc S coïncide au voisinage de t_0 avec sa restriction à $[a, +\infty[$, qui est continue en t_0 . Exactement comme dans la question 4(b) de l'exemple précédent, S est continue en t_0 .

$t_0 > 0$ étant quelconque, S est continue sur $]0, +\infty[$.

2. *Calcul pour $t > 0$.* Soit $t > 0$ et $q = e^{-t}$; alors $0 < q < 1$, donc la série géométrique $\sum_{n \geq 1} q^n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$. Par linéarité,

$$S(t) = t \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n = t \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{t}{e^t - 1}$$

(en multipliant numérateur et dénominateur par e^t).

Calcul en 0. Pour tout $n \geq 1$, $u_n(0) = 0$, donc $S(0) = 0$.

Continuité en 0. On sait que $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ (dérivée de l'exponentielle en 0), donc $S(t) = \frac{1}{\frac{e^t - 1}{t}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1$. Comme $1 \neq 0 = S(0)$, S n'est pas continue en 0.

3. Raisonnons par l'absurde : si $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $[0, +\infty[$, comme chaque u_n est continue sur $[0, +\infty[$, le théorème donnerait S continue sur $[0, +\infty[$, donc en 0 : contradiction avec la question 2. **La convergence de $\sum t e^{-nt}$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.**

Pour aller plus loin : elle n'est même pas uniforme sur $]0, +\infty[$. Sinon, le théorème de la double limite (partie 4) appliqué en 0, point adhérent à $]0, +\infty[$, donnerait $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = \sum_{n \geq 1} \lim_{t \rightarrow 0} u_n(t) = 0$, alors que cette limite vaut 1.

4 Théorème de la double limite pour les séries

Exemple 8 – guidé : limite de ζ en $+\infty$.

1. D'après la question 2 de l'exemple 7, appliquée avec $a = 2 > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$; elle y converge donc uniformément.
2. Soit $n \geq 1$ fixé.
 - Si $n = 1$: pour tout x , $\frac{1}{1^x} = 1$, donc $\ell_1 = 1$.
 - Si $n \geq 2$: $\ln n > 0$, donc $x \ln n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $n^x = e^{x \ln n} \rightarrow +\infty$. Ainsi $\ell_n = 0$.
3. Vérifions les hypothèses du théorème de la double limite sur $I = [2, +\infty[$:
 - $+\infty$ est adhérent à I (car I n'est pas majoré) ;
 - $\sum f_n$ converge uniformément sur I (question 1) ;
 - pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n \in \mathbb{R}$ (question 2).

Le théorème assure que $\sum \ell_n$ converge (ce qui est évident ici) et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

Exemple 9 – en autonomie.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $T(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t).$

1. D'après l'exemple 2, $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Définition. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, $|g_n(t)| \leq \|g_n\|_\infty$ (la norme infinie majore toutes les valeurs), et $\sum \|g_n\|_\infty$ converge. Par comparaison, $\sum g_n(t)$ converge absolument, donc converge : **T est définie sur $\mathbb{R}$.**
Continuité. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, et chaque g_n est continue sur $\mathbb{R}$ (composée et produit de fonctions continues). D'après le théorème de continuité, **T est continue sur $\mathbb{R}$.**
2. *Limite en $+\infty$.* Soit $n \geq 1$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $nt \rightarrow +\infty$, donc $g_n(t) \rightarrow \ell_n = \frac{\pi}{2n^2}$.
 Hypothèses du théorème de la double limite sur $I = \mathbb{R}$: $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}$, $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (question 1), et chaque g_n admet la limite finie ℓ_n en $+\infty$. Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^3}{12}.$$

Limite en $-\infty$. $\arctan$ étant impaire, pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $g_n(-t) = -g_n(t)$. En sommant (les séries convergent) : $T(-t) = -T(t)$, donc T est impaire. Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} T(t) = \lim_{u \rightarrow +\infty} T(-u) = - \lim_{u \rightarrow +\infty} T(u) = -\frac{\pi^3}{12}.$$

(On peut aussi appliquer directement le théorème en $-\infty$, avec $g_n(t) \rightarrow -\frac{\pi}{2n^2}$.)

Bonus – un équivalent de $\zeta(x) - 1$ en $+\infty$.

1. Soit $x > 1$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge, donc $\zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (série convergente privée de son premier terme). En multipliant cette série convergente par la constante 2^x (linéarité) :

$$2^x(\zeta(x) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^x}{n^x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x.$$

2. On note $w_n(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x$ pour $n \geq 2$ et $x \geq 2$.

Majoration. Soit $n \geq 2$ et soit $x \geq 2$. On a $0 < \frac{2}{n} \leq 1$, donc $\ln \frac{2}{n} \leq 0$; comme $x \geq 2$, $x \ln \frac{2}{n} \leq 2 \ln \frac{2}{n}$. Par croissance de l'exponentielle :

$$|w_n(x)| = e^{x \ln(2/n)} \leq e^{2 \ln(2/n)} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2},$$

majorant indépendant de x .

Norme infinie. w_n est donc bornée sur $[2, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure, $\|w_n\|_{\infty, [2, +\infty[} \leq \frac{4}{n^2}$. (Égalité, car $|w_n(2)| = \frac{4}{n^2}$.)

Convergence. $\sum \frac{4}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) ; par comparaison, $\sum \|w_n\|_{\infty, [2, +\infty[}$ converge.

La série $\sum w_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

3. Soit $n \geq 2$ fixé.

— Si $n = 2$: $w_2(x) = 1^x = 1 \rightarrow 1$.

— Si $n \geq 3$: $0 < \frac{2}{n} < 1$, donc $\ln \frac{2}{n} < 0$ et $w_n(x) = e^{x \ln(2/n)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. Sur $I = [2, +\infty[$: $+\infty$ est adhérent à I , $\sum w_n$ converge uniformément sur I (conséquence de la question 2), et chaque w_n admet une limite finie en $+\infty$ (question 3). Par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x (\zeta(x) - 1) = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} 0 = 1.$$

Autrement dit, $\frac{\zeta(x) - 1}{2^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, avec $2^{-x} \neq 0$: par définition,

$$\boxed{\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}}$$

Interprétation : en $+\infty$, la somme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^x}$ est dominée par son premier terme $\frac{1}{2^x}$; autrement dit $\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$.

Exercices supplémentaires

E1.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$.

Majoration. Soit $n \geq 1$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On a $n^2 + x^2 \geq n^2 > 0$, donc

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

majorant indépendant de x .

Norme infinie. f_n est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2}$. (Égalité, atteinte en $x = 0$.)

Convergence normale. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ; par comparaison, $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge : $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Définition et continuité. La convergence normale entraîne la convergence (absolue) de $\sum f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: **f est définie sur $\mathbb{R}$** . Elle entraîne aussi la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$; chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). D'après le théorème de continuité, **f est continue sur $\mathbb{R}$** .

Limite en $+\infty$. Soit $n \geq 1$: $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Sur $I = \mathbb{R}$, $+\infty$ est adhérent, la convergence est uniforme et chaque f_n a une limite finie en $+\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$.

Variante sans le théorème (comparaison série-intégrale). Soit $x > 0$. La fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2+x^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Pour $n \geq 1$ et $u \in [n-1, n]$, $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{u^2+x^2}$; en intégrant sur $[n-1, n]$, intervalle de longueur 1 : $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{du}{u^2+x^2}$. Soit $N \geq 1$. En sommant pour n de 1 à N (relation de Chasles) :

$$0 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2+x^2} \leq \int_0^N \frac{du}{u^2+x^2} = \frac{1}{x} \left[\arctan \frac{u}{x} \right]_0^N = \frac{1}{x} \arctan \frac{N}{x} \leq \frac{\pi}{2x}.$$

Le majorant ne dépend pas de N ; en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité (la série converge), on obtient

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où le résultat par encadrement. Attention : la majoration naïve $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ne donne rien, car $\sum \frac{1}{x^2}$ diverge.

E2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

Ensemble de définition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geq 0$: pour tout $n \geq 1$, $0 < e^{-nx} \leq 1$, donc $0 < g_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum g_n(x)$ converge par comparaison.
- Si $x < 0$: $g_n(x) = \frac{e^{n|x|}}{1+n^2}$ avec $|x| > 0$; comme $1+n^2 \sim n^2$ et $\frac{e^{n|x|}}{n^2} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, $g_n(x) \rightarrow +\infty$. La série diverge grossièrement.

Donc g est définie sur $D = [0, +\infty[$.

Majoration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \geq 0$. Comme $-nx \leq 0$, $0 < e^{-nx} \leq 1$, donc

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2},$$

majorant indépendant de x .

Norme infinie. g_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure, $\|g_n\|_{\infty, [0, +\infty[} \leq \frac{1}{1+n^2}$ (égalité en $x = 0$).

Convergence normale. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\sum \frac{1}{1+n^2}$ converge par comparaison (le terme $n = 0$ ne change pas la nature de la série). Ainsi $\sum \|g_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$ converge : convergence normale, donc uniforme, sur $[0, +\infty[$.

Continuité. Chaque g_n est continue sur $[0, +\infty[$; d'après le théorème, g est continue sur $[0, +\infty[$.

Limite en $+\infty$. Pour $n = 0$: $g_0(x) = \frac{e^0}{1} = 1$ pour tout x , donc $\ell_0 = 1$. Pour $n \geq 1$: $-nx \rightarrow -\infty$, donc $g_n(x) \rightarrow \ell_n = 0$. Sur $I = [0, +\infty[$, $+\infty$ est adhérent, la convergence est uniforme et chaque g_n a une limite finie. Par double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

(Attention au terme $n = 0$, qui ne dépend pas de x : c'est le même piège que pour ζ .)

E3.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

- (a) *Étude auxiliaire.* Soit $\theta : u \mapsto \frac{u}{1+u^2}$ sur $]0, +\infty[$. Elle est dérivable et $\theta'(u) = \frac{(1+u^2) - 2u^2}{(1+u^2)^2} = \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$, du signe de $1-u$: θ croît sur $]0, 1]$, décroît sur $[1, +\infty[$, et $\theta(1) = \frac{1}{2}$. Donc, pour tout $u > 0$, $0 < \theta(u) \leq \frac{1}{2}$.

Majoration. Soit $n \geq 1$ et soit $x > 0$. En posant $u = nx > 0$:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + (nx)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx}{1 + (nx)^2} = \frac{1}{n} \theta(nx),$$

donc $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$, majorant indépendant de x .

Norme infinie. f_n est bornée sur $]0, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty,]0, +\infty[} \leq \frac{1}{2n}$. Réciproquement, $\frac{1}{n} \in]0, +\infty[$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \theta(1) = \frac{1}{2n}$, donc $\frac{1}{2n} \leq \|f_n\|_{\infty,]0, +\infty[}$. Finalement

$$\|f_n\|_{\infty,]0, +\infty[} = \frac{1}{2n}.$$

Convergence normale ? $\sum \frac{1}{2n}$ diverge (série harmonique multipliée par $\frac{1}{2}$) : **il n'y a pas convergence normale sur $]0, +\infty[$.**

Au passage : $x \mapsto nx$ étant croissante, $f_n = \frac{1}{n} \theta(n \cdot)$ est croissante sur $]0, \frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$.

- (b) *Définition sur $\mathbb{R}$.* Si $x = 0$, tous les termes sont nuls et la série converge. Si $x \neq 0$, pour tout $n \geq 1$, $1 + n^2 x^2 \geq n^2 x^2 > 0$, donc $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2 x^2} = \frac{1}{n^2 |x|}$; par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge absolument. Donc φ est définie sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi(0) = 0$.

Convergence normale sur $[a, +\infty[$, $a > 0$. Soit $a > 0$.

— Soit $n \geq \frac{1}{a}$, et soit $x \geq a$. Alors $\frac{1}{n} \leq a \leq x$, et f_n est décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$, donc

$$0 < f_n(x) \leq f_n(a) = \frac{a}{1 + n^2 a^2} \leq \frac{a}{n^2 a^2} = \frac{1}{n^2 a},$$

majorant indépendant de x . Par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2 a}$.

— Pour $1 \leq n < \frac{1}{a}$ (nombre fini d'indices), f_n est bornée sur $[a, +\infty[$ d'après (a).

$\sum \frac{1}{n^2 a}$ converge, donc par comparaison (à partir du rang $\frac{1}{a}$), $\sum \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$ converge : convergence normale, donc uniforme, sur $[a, +\infty[$.

Continuité sur $]0, +\infty[$. Chaque f_n est continue sur $[a, +\infty[$, donc φ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Soit $x_0 > 0$: avec $a = \frac{x_0}{2} \in]0, x_0[$, φ coïncide au voisinage de x_0 avec sa restriction à $[a, +\infty[$ (même argument que pour ζ), donc φ est continue en x_0 . Ainsi φ est continue sur $]0, +\infty[$.

Continuité sur $] -\infty, 0[$. Pour tout n et tout x , $f_n(-x) = -f_n(x)$; en sommant, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Sur $] -\infty, 0[$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, composée de $x \mapsto -x$ (continue, à valeurs dans $]0, +\infty[$) et de φ (continue sur $]0, +\infty[$) : φ est continue sur $] -\infty, 0[$.

Conclusion : φ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- (c) Soit $x > 0$. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2 x}$ (cf. (b)), et les deux séries convergent ; en sommant ces inégalités,

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

(Variante : double limite sur $[1, +\infty[$, où la convergence est normale d'après (b), avec $f_n(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$.)

- ★★ Soit $x > 0$. La fonction $k : u \mapsto \frac{x}{1 + x^2 u^2}$ est continue, positive et décroissante sur $[0, +\infty[$, et $f_n(x) = k(n)$.

Encadrement de chaque terme. Soit $n \geq 1$. Pour $u \in [n, n+1]$, $k(u) \leq k(n)$; en intégrant sur $[n, n+1]$ (longueur 1), $\int_n^{n+1} k(u) du \leq k(n)$. Pour $u \in [n-1, n]$, $k(n) \leq k(u)$, d'où $k(n) \leq \int_{n-1}^n k(u) du$.

Sommation. Pour $N \geq 1$, en sommant de $n = 1$ à N (relation de Chasles) :

$$\int_1^{N+1} k(u) du \leq \sum_{n=1}^N k(n) \leq \int_0^N k(u) du.$$

Or, pour $X \geq 0$, $\int_0^X k(u) du = \left[\arctan(xu) \right]_0^X = \arctan(xX)$. L'encadrement s'écrit donc

$$\arctan(x(N+1)) - \arctan x \leq \sum_{n=1}^N f_n(x) \leq \arctan(xN).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ ($x > 0$) :

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Limite. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\arctan x \rightarrow 0$; par encadrement, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2}$.

Continuité en 0. $\varphi(0) = 0 \neq \frac{\pi}{2}$: φ **n'est pas continue en 0**. Par imparité, $\varphi(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ quand $x \rightarrow 0^-$: il y a un saut d'amplitude π .

Lien avec les sommes de Riemann. Avec $h = x > 0$, la somme partielle $\sum_{n=1}^N f_n(h) = h \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+(nh)^2}$ est une somme de Riemann (pas h , points à droite) de $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ sur le segment $[0, Nh]$, dont l'intégrale vaut $\arctan(Nh)$, proche de $\frac{\pi}{2}$ quand Nh est grand. Le nombre de termes et la longueur du segment variant avec h , le théorème sur les sommes de Riemann (à segment fixé) ne s'applique pas tel quel : c'est l'encadrement ci-dessus qui rend cette intuition rigoureuse.

Bilan. Cela confirme qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0, +\infty[$: sinon, la double limite en 0 (adhérent à $]0, +\infty[$) donnerait $\lim_{0^+} \varphi = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$.

E4.

Pour $x \geq 0$, $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$

- (a) *Convergence simple et majoration du reste.* Soit $x \geq 0$. La suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante (car $n \mapsto n+x$ est croissante et strictement positive) et tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge et, pour tout $N \geq 1$, son reste d'ordre N vérifie

$$|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \right| \leq \frac{1}{N+1+x} \leq \frac{1}{N+1},$$

majorant indépendant de x .

Convergence uniforme. R_N est donc bornée sur $[0, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure,

$$0 \leq \|R_N\|_{\infty, [0, +\infty[} \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement, la suite des restes converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$: **la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$** .

Pas de convergence normale. Soit $n \geq 1$ et soit $x \geq 0$: $\left| \frac{(-1)^n}{n+x} \right| = \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$. Par définition de la borne supérieure, la norme infinie sur $[0, +\infty[$ du terme général est majorée par $\frac{1}{n}$; elle vaut exactement $\frac{1}{n}$, valeur atteinte en $x = 0$. La série harmonique diverge : **la série ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$** .

(Ni même sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$: la norme infinie vaut alors $\frac{1}{n+a} \sim \frac{1}{n}$, et la série diverge par équivalence.)

(b) *Continuité.* Chaque $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et la convergence y est uniforme : d'après le théorème, ψ **est continue sur** $[0, +\infty[$.

Limite en $+\infty$. Pour $n \geq 1$ fixé, $\frac{(-1)^n}{n+x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Sur $[0, +\infty[$, $+\infty$ est adhérent et la convergence est uniforme ; par double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$.

(Directement : le critère spécial majore aussi la somme entière par la valeur absolue de son premier terme, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{1+x}$, d'où le résultat par encadrement.)

Remarque

E4 montre que la convergence uniforme n'implique pas la convergence normale : la convergence normale est une condition suffisante, souvent la plus simple à vérifier, mais pas nécessaire. Pour les séries alternées, la majoration du reste par le critère spécial est l'outil à privilégier.