

Séance à distance

Suites et séries de fonctions : intégration sur un segment, dérivation

Mode d'emploi

- Vous travaillez **par groupe de colle** dans votre salle. Je passe régulièrement dans chaque groupe. Si vous êtes bloqués, signalez-le (chat ou main levée) plutôt que d'attendre.
- On commence par un **exercice récapitulatif** de la séance précédente, à traiter en entier avant de passer à la suite.
- Pour chaque nouvelle notion : un **énoncé admis**, puis des **exemples**, d'abord guidés, puis en autonomie.
- Si vous avez tout terminé, des exercices supplémentaires sont proposés en fin de fiche.

Dans toute la fiche, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Exercice récapitulatif de la séance précédente

Exemple 1 – récap : domaine, convergence normale, continuité, double limite.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$, et $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

1. *Ensemble de définition.* Montrer que la série numérique $\sum f_n(x)$ converge si $x \geq 0$, et diverge grossièrement si $x < 0$. En déduire l'ensemble de définition D de F .
2. *Convergence normale.* Soit $n \geq 1$. Majorer $|f_n(x)|$, pour $x \in [0, +\infty[$, par une quantité indépendante de x . En déduire que f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et majorer $\|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$, puis montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
3. *Continuité.* En déduire que F est continue sur $[0, +\infty[$.
4. *Limite en $+\infty$.* À l'aide du théorème de la double limite, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
5. *Équivalent en $+\infty$.*

(a) Montrer que, pour $x \geq 0$, $e^x F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-(n-1)x}}{n^2}$.

(b) Montrer que cette nouvelle série converge normalement sur $[0, +\infty[$.

(c) Pour $n \geq 1$ fixé, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(n-1)x}}{n^2}$. (*Attention au cas $n = 1$.*)

(d) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x F(x)$, puis un équivalent simple de $F(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Bonus. Avec la même méthode, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x}(F(x) - e^{-x})$. En déduire un équivalent de $F(x) - e^{-x}$ en $+\infty$.

2 Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions

Théorème (admis)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$, et f une fonction définie sur $[a, b]$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
 - (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$;
- alors f est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n.$$

Méthode. Il y a deux hypothèses à vérifier : la continuité des f_n sur $[a, b]$, et la convergence uniforme de (f_n) (déterminer la limite simple f , puis majorer $|f_n(t) - f(t)|$ par une quantité indépendante de t qui tend vers 0).

Exemple 2 – guidé.

On cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin t}{n+t} dt$. Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, \pi]$, on pose $f_n(t) = \frac{n \sin t}{n+t}$.

1. Justifier que chaque f_n est continue sur $[0, \pi]$.
2. Soit $t \in [0, \pi]$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$. On note f la limite simple obtenue.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$, $|f_n(t) - f(t)| = \frac{t |\sin t|}{n+t} \leq \frac{\pi}{n}$.
4. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, \pi]$.
5. Conclure en calculant la limite cherchée.

Exemple 3 – en autonomie.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} dt$ sans calculer l'intégrale.

Indication : pour majorer $\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - t$, multiplier par la quantité conjuguée.

Attention

L'hypothèse de convergence *uniforme* est indispensable. Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$, on pose $g_n(t) = n^2 t e^{-nt}$.

1. Montrer que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
3. Que peut-on en déduire sur la convergence de (g_n) sur $[0, 1]$? Le vérifier en calculant $\|g_n\|_\infty$.

Bonus – lien avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

On note $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ et, pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ (norme vue au chapitre précédent).

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$.
2. Soit (f_n) une suite de E et $f \in E$. Montrer que si $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, alors $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, puis que $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$. (On retrouve le théorème, dans le cas où f est supposée continue.)
3. Sur $[0, 1]$, on pose $h_n(t) = t^n$. Calculer $\|h_n\|_1$ et $\|h_n\|_\infty$. La suite (h_n) converge-t-elle vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$? pour $\|\cdot\|_\infty$?
4. En déduire que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E .

3 Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment

Théorème (admis)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur le segment $[a, b]$. Si :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;

— $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$;

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$, la série numérique $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt.$$

En pratique, on montre la convergence *normale* sur $[a, b]$, qui entraîne la convergence uniforme.

Exemple 4 – guidé : un développement de arctan.

Soit $a \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, a]$, on pose $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Majorer $|f_n(t)|$, pour $t \in [0, a]$, par une quantité indépendante de t , puis montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

2. Pour $t \in [0, a]$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ (série géométrique).

3. À l'aide du théorème, montrer que

$$\arctan a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. *Application.* En choisissant bien a , calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

Exemple 5 – en autonomie.

On rappelle (voir le cours) que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

1. Montrer que $\int_0^1 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! (2n+1)}$.

★ Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n! (2n+1)} \leq \frac{2}{(2N+3)(N+1)!}.$$

(Pour $n \geq N+1$, on pourra majorer $\frac{1}{n!}$ par $\frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{(N+2)^{n-N-1}}$.) En déduire une valeur approchée de $\int_0^1 e^{t^2} dt$ à 10^{-3} près.

Bonus – le *sophomore's dream*.

Pour la petite histoire

Dans les universités américaines, un *sophomore* est un étudiant de deuxième année. L'erreur classique $(a+b)^n = a^n + b^n$ y est surnommée le *freshman's dream*, le « rêve de l'étudiant de première année » : une formule trop belle pour être vraie.

L'identité ci-dessous, établie par Jean Bernoulli en 1697, a reçu par analogie le surnom de *sophomore's dream* : elle a l'air tout aussi trop belle... mais elle est vraie !

Pour $x \in]0, 1]$, on pose $\varphi(x) = -x \ln x$.

1. Montrer que φ se prolonge par continuité en 0, et que $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{e}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Convention. Dans toute la suite, les fonctions $x \mapsto x^{-x} = e^{\varphi(x)}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n(\ln x)^n = (-1)^n \varphi(x)^n$ sont prolongées par continuité en 0 (justifier que c'est possible à l'aide de la question 1). Les intégrales sur $[0, 1]$ ci-dessous sont celles de ces prolongements : ce sont des intégrales de fonctions continues sur un segment.

On veut montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{\varphi(x)^n}{n!}$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$, et que sa somme vaut x^{-x} pour tout $x \in [0, 1]$.

3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$. Conclure.

★ *Démonstration de la formule admise.* Soit $n \geq 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 x^n (\ln x)^k dx$ (intégrale du prolongement par continuité, qui existe car $n \geq 1$), et $h_k(x) = x^{n+1} (\ln x)^k$ prolongée par $h_k(0) = 0$.

- (a) Soit $k \geq 1$. Montrer que h_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. (Calculer h'_k sur $]0, 1]$, puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée.)
- (b) En calculant $\int_0^1 h'_k(x) dx$ de deux façons, montrer que $(n+1) I_k = -k I_{k-1}$.
- (c) Conclure. Que se passe-t-il pour $n = 0$?

4 Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

Théorème (admis)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I , et f, g deux fonctions définies sur I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- (f_n) converge **simplement** vers f sur I ;
- (f'_n) converge **uniformément** vers g sur I ;

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$, c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f'_n$.

En pratique, comme pour la continuité, il suffit que (f'_n) converge uniformément sur **tout segment** $[c, d] \subset I$.

Attention

C'est la suite des *dérivées* qui doit converger uniformément. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Montrer que (g_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, mais que $(g'_n(\pi))$ ne converge même pas.

Exemple 6 – guidé : identifier une limite par sa dérivée.

Pour $n \geq 1$ et $x \in]-1, 1[$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

1. Soit $x \in]-1, 1[$. En comparant $\left| \frac{x^k}{k} \right|$ à $|x|^k$, montrer que $(f_n(x))$ converge. On note $f(x)$ sa limite.
2. Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et montrer que, pour $x \in]-1, 1[$, $f'_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. On pose $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Montrer que, pour tout $x \in [-a, a]$, $|f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{a^n}{1-a}$. Conclure que (f'_n) converge uniformément vers g sur $[-a, a]$.

- Justifier que tout segment de $] -1, 1[$ est inclus dans un segment $[-a, a]$ avec $a \in]0, 1[$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et donner f' .
- Calculer $f(0)$ et en déduire que, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exemple 7 – en autonomie : quand l’hypothèse manque.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$, et $h(x) = \max(x, 0)$.

- Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f'_n .
- Montrer que (f_n) converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$. (Pour $x \geq 0$, écrire $1 + e^{nx} = e^{nx}(1 + e^{-nx})$. On doit trouver $\|f_n - h\|_\infty \leq \frac{\ln 2}{n}$.)
- La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
- Déterminer la limite simple de (f'_n) sur $\mathbb{R}$. La convergence peut-elle être uniforme sur $[-1, 1]$? (Penser au théorème de continuité de la séance précédente.) Quelle hypothèse du théorème est en défaut ?
- Soit $c > 0$. Montrer que (f'_n) converge uniformément sur $[c, +\infty[$, et retrouver ainsi la dérivée de h sur $]0, +\infty[$.

5 Dérivation de la somme d’une série de fonctions

Théorème (admis)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur l’intervalle I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $\sum f_n$ converge **simplement** sur I ;
- $\sum f'_n$ converge **uniformément** sur I ;

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

En pratique, on vérifie que $\sum f'_n$ converge **normalement sur tout segment** $[c, d] \subset I$.

Attention : on n’oublie pas de vérifier la convergence simple de $\sum f_n$ elle-même !

Exemple 8 – guidé : retour sur la fonction F du récap.

On reprend $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ de l’exemple 1.

- Justifier que chaque $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer f'_n .
- Rappeler pourquoi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- Soit $c > 0$. Montrer que $\|f'_n\|_{\infty, [c, +\infty[} \leq (e^{-c})^n$, puis que $\sum f'_n$ converge normalement sur $[c, +\infty[$.
- En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner $F'(x)$ sous forme de série.
- À l’aide de l’exemple 6, montrer que, pour tout $x > 0$, $F'(x) = \ln(1 - e^{-x})$. En déduire le sens de variation de F .
- Calculer $\|f'_n\|_{\infty,]0, +\infty[}$. Pourquoi ne pouvait-on pas montrer la convergence normale de $\sum f'_n$ sur $]0, +\infty[$ tout entier ?

Bonus. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x)$. En utilisant la continuité de F en 0 (exemple 1) et le théorème de la limite de la dérivée, F est-elle dérivable (à droite) en 0 ? Interpréter graphiquement.

Exemple 9 – en autonomie.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ (exercice E1 de la séance précédente).

1. Rappeler pourquoi H est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $H'(x)$ sous forme de série. (On pourra travailler sur un segment $[-A, A]$.)
3. En déduire le sens de variation de H sur $[0, +\infty[$.

Bonus – suite de l'exercice E4 de la séance précédente.

Pour $x \geq 0$, on pose $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ (on a vu que cette série converge simplement, et même uniformément, sur $[0, +\infty[$).

1. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\psi'(x)$. (Ici, la série des dérivées converge normalement !)
2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, déterminer le signe de $\psi'(x)$. En déduire le sens de variation de ψ .

Exercices supplémentaires (si vous avez tout terminé)

E1. ★ On cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

- (a) Déterminer la limite simple de $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ sur $[0, 1]$. Peut-on appliquer le théorème sur $[0, 1]$?
- (b) Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, a]$, et que $0 \leq \int_a^1 f_n(t) dt \leq 1 - a$.
- (c) Conclure que la limite cherchée vaut 1. (Revenir à la définition de la limite avec des ε .)

E2. (Formule de Leibniz.) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0, 1]$, on pose $u_n(a) = \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{2n+1}$.

- (a) À l'aide du critère spécial des séries alternées, montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
- (b) En utilisant l'exemple 4 et le théorème de continuité de la somme, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

E3. Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (exemple de la séance précédente).

- (a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.
- (b) À l'aide de l'exemple 6, montrer que, pour $x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$, $G'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.
★ G est-elle dérivable à gauche en 1 ?

E4. On rappelle (cours) que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, avec $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}$. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$, exprimer ζ'' , et en déduire que ζ est convexe sur $]1, +\infty[$. (Pour $1 < a < b$, on pourra montrer que $\frac{(\ln n)^2}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ avec $c = \frac{1+a}{2}$.)