

Séance à distance – Corrigé

Suites et séries de fonctions : intégration sur un segment, dérivation

Rappel utilisé tout au long du corrigé

Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors pour tout $x \in I$ la série $\sum f_n(x)$ converge absolument, et $\sum f_n$ converge uniformément sur I (le reste vérifie $\|R_N\|_\infty \leq \sum_{n>N} \|f_n\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$).

1 Exercice récapitulatif de la séance précédente

Exemple 1 – récap : domaine, convergence normale, continuité, double limite.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$ et $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Cas $x \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$, $-nx \leq 0$, donc $0 < e^{-nx} \leq 1$ et $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$); par comparaison de séries à termes positifs, $\sum f_n(x)$ converge.

Cas $x < 0$. Alors $-x = |x| > 0$ et $f_n(x) = \frac{e^{n|x|}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées. Le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

Conclusion : $D = [0, +\infty[$.

2. *Majoration.* Soit $n \geq 1$ et soit $x \geq 0$. Comme ci-dessus, $|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, majorant indépendant de x .

Norme infinie. f_n est donc bornée sur $[0, +\infty[$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$. (Égalité, atteinte en $x = 0$.)

Convergence normale. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$ converge. **La série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.**

3. La convergence normale entraîne la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, et chaque f_n est continue sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de continuité, **F est continue sur $[0, +\infty[$.**

4. Soit $n \geq 1$ fixé : $-nx \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, donc $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n = 0$.

Hypothèses du théorème de la double limite sur $I = [0, +\infty[$: $+\infty$ est adhérent à I ; $\sum f_n$ converge uniformément sur I (question 2); chaque f_n admet une limite finie en $+\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

5. (a) Soit $x \geq 0$. La série $\sum f_n(x)$ converge; en la multipliant par la constante e^x (linéarité) :

$$e^x F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^x e^{-nx}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-(n-1)x}}{n^2}.$$

- (b) On note $w_n(x) = \frac{e^{-(n-1)x}}{n^2}$. Soit $n \geq 1$ et soit $x \geq 0$. Comme $n-1 \geq 0$, $-(n-1)x \leq 0$, donc $0 < w_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$, majorant indépendant de x . Ainsi w_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et $\|w_n\|_{\infty, [0, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$. Par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum w_n$ **converge normalement** sur $[0, +\infty[$.
- (c) Si $n = 1$: $w_1(x) = e^0 = 1$ pour tout x , donc $w_1(x) \rightarrow 1$.
Si $n \geq 2$: $n-1 > 0$, donc $-(n-1)x \rightarrow -\infty$ et $w_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- (d) Par le théorème de la double limite sur $[0, +\infty[$ (convergence uniforme d'après (b), limites finies d'après (c)) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x F(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

Ainsi $\frac{F(x)}{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, avec $e^{-x} \neq 0$: $\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}}$.

Bonus. Soit $x \geq 0$. La série étant convergente, on peut isoler son premier terme $f_1(x) = e^{-x}$:

$$F(x) - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}, \quad \text{donc} \quad e^{2x}(F(x) - e^{-x}) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-(n-2)x}}{n^2}.$$

Pour $n \geq 2$ et $x \geq 0$, $0 < \frac{e^{-(n-2)x}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$: la convergence est normale, donc uniforme, sur $[0, +\infty[$. Le terme $n = 2$ est constant égal à $\frac{1}{4}$, et pour $n \geq 3$ le terme tend vers 0 en $+\infty$. Par double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x}(F(x) - e^{-x}) = \frac{1}{4}, \quad \text{d'où} \quad F(x) - e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-2x}}{4}.$$

Autrement dit, $F(x) = e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + o(e^{-2x})$ en $+\infty$.

2 Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions

Exemple 2 – guidé.

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, \pi]$, $f_n(t) = \frac{n \sin t}{n+t}$.

1. Soit $n \geq 1$. Pour $t \in [0, \pi]$, $n+t \geq n > 0$: le dénominateur ne s'annule pas. f_n est donc continue sur $[0, \pi]$ comme quotient de fonctions continues.
2. Soit $t \in [0, \pi]$ fixé. Pour $n \geq 1$, $\frac{n}{n+t} = \frac{1}{1+\frac{t}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $f_n(t) \rightarrow \sin t$. La limite simple est $f = \sin$.
3. Soit $n \geq 1$ et soit $t \in [0, \pi]$.

$$f_n(t) - f(t) = \sin t \left(\frac{n}{n+t} - 1 \right) = \sin t \cdot \frac{-t}{n+t}, \quad \text{donc} \quad |f_n(t) - f(t)| = \frac{t |\sin t|}{n+t}.$$

Or $0 \leq t \leq \pi$, $|\sin t| \leq 1$ et $n+t \geq n > 0$, d'où $|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\pi}{n}$.

4. Le majorant $\frac{\pi}{n}$ est indépendant de t : $f_n - f$ est bornée sur $[0, \pi]$ et, par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, \pi]} \leq \frac{\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par encadrement, (f_n) **converge uniformément vers sin sur** $[0, \pi]$.
5. Les f_n sont continues sur le segment $[0, \pi]$ (question 1) et convergent uniformément vers sin (question 4). D'après le théorème,

$$\int_0^\pi \frac{n \sin t}{n+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \sin t dt = \left[-\cos t \right]_0^\pi = 2.$$

Exemple 3 – en autonomie.

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$, on pose $f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$.

Continuité. $t \mapsto t^2 + \frac{1}{n}$ est continue et à valeurs dans $]0, +\infty[$, et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0, +\infty[$: f_n est continue sur $[0, 1]$.

Limite simple. Soit $t \in [0, 1]$. $t^2 + \frac{1}{n} \rightarrow t^2$ et $\sqrt{\cdot}$ est continue en t^2 , donc $f_n(t) \rightarrow \sqrt{t^2} = |t| = t$ (car $t \geq 0$). La limite simple est $f : t \mapsto t$.

Majoration. Soit $n \geq 1$ et soit $t \in [0, 1]$. Avec la quantité conjuguée (et $\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + t > 0$) :

$$f_n(t) - f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - t = \frac{(t^2 + \frac{1}{n}) - t^2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + t} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + t}.$$

Cette quantité est positive. De plus $t \geq 0$ et $\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$ (croissance de $\sqrt{\cdot}$), donc le dénominateur est minoré par $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ et

$$0 \leq f_n(t) - f(t) \leq \frac{1/n}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

majorant indépendant de t .

Convergence uniforme. Par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$: (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Conclusion. D'après le théorème,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Attention – l'hypothèse de convergence uniforme est indispensable.

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$, $g_n(t) = n^2 t e^{-nt}$.

1. Soit $t \in [0, 1]$. Si $t = 0$, $g_n(0) = 0 \rightarrow 0$. Si $t > 0$, $g_n(t) = t n^2 (e^{-t})^n$ avec $0 < e^{-t} < 1$; par croissances comparées, $n^2 q^n \rightarrow 0$ pour $q \in [0, 1[$, donc $g_n(t) \rightarrow 0$. (g_n) **converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$** .
2. Soit $n \geq 1$. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = -n e^{-nt}$: u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec $u'(t) = 1$ et $v'(t) = n^2 e^{-nt}$. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 n^2 t e^{-nt} dt = \left[-n t e^{-nt} \right]_0^1 + \int_0^1 n e^{-nt} dt = -n e^{-n} + \left[-e^{-nt} \right]_0^1 = 1 - e^{-n} - n e^{-n}.$$

Comme $e^{-n} \rightarrow 0$ et $n e^{-n} \rightarrow 0$ (croissances comparées), $\int_0^1 g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

3. *Conséquence.* Si (g_n) convergeait uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, comme les g_n sont continues sur ce segment, le théorème donnerait $\int_0^1 g_n \rightarrow \int_0^1 0 = 0$, ce qui contredit la question 2. **La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$.**

Vérification. g_n est dérivable et $g'_n(t) = n^2(1 - nt) e^{-nt}$, du signe de $1 - nt$. Comme $\frac{1}{n} \in]0, 1]$, g_n croît sur $[0, \frac{1}{n}]$ et décroît sur $[\frac{1}{n}, 1]$; elle est positive. Pour tout $t \in [0, 1]$, $|g_n(t)| \leq g_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{e}$, et cette valeur est atteinte, donc

$$\|g_n\|_{\infty} = \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

qui ne tend certainement pas vers 0. L'aire sous la courbe reste proche de 1 car g_n forme une « bosse » de plus en plus haute et de plus en plus étroite, concentrée près de 0.

Bonus – lien avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_{\infty}$.

1. Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ (la norme infinie majore toutes les valeurs). Par croissance de l'intégrale ($a \leq b$) :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty dt = (b-a)\|f\|_\infty.$$

2. Pour tout n , $f_n - f \in E$ et, d'après la question 1, $0 \leq \|f_n - f\|_1 \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$: par encadrement, $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Ensuite, par linéarité puis inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| = \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$.

3. $\|h_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq t^n \leq 1$, et $h_n(1) = 1$: donc $\|h_n\|_\infty = 1$. Ainsi $\|h_n - 0\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: (h_n) **converge vers 0 pour** $\|\cdot\|_1$. Mais $\|h_n - 0\|_\infty = 1 \not\rightarrow 0$: (h_n) **ne converge pas vers 0 pour** $\|\cdot\|_\infty$.
4. Supposons les normes équivalentes : il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$. Avec $f = h_n$: $1 \leq \frac{C}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est faux pour n assez grand (le membre de droite tend vers 0). **Les deux normes ne sont pas équivalentes sur E .**
(L'inégalité de la question 1 est vraie, mais l'inégalité dans l'autre sens est impossible.)

3 Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment

Exemple 4 – guidé : un développement de arctan.

Soit $a \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, a]$, $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}$.

(Si $a = 0$, la formule de la question 3 se réduit à $0 = 0$; on suppose donc $a \in]0, 1[$, de sorte que $[0, a]$ est un vrai segment.)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0, a]$. Comme $0 \leq t \leq a$ et $x \mapsto x^{2n}$ est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$|f_n(t)| = t^{2n} \leq a^{2n} = (a^2)^n,$$

majorant indépendant de t . Donc f_n est bornée sur $[0, a]$ et $\|f_n\|_{\infty, [0, a]} \leq (a^2)^n$. Comme $0 \leq a^2 < 1$, la série géométrique $\sum (a^2)^n$ converge ; par comparaison, $\sum f_n$ **converge normalement sur** $[0, a]$.

2. Soit $t \in [0, a]$. $f_n(t) = (-t^2)^n$ et $|-t^2| = t^2 < 1$, donc la série géométrique converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1 - (-t^2)} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

3. Les f_n sont continues sur le segment $[0, a]$ (polynomiales) et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, a]$ (question 1). D'après le théorème, la série $\sum \int_0^a f_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a (-1)^n t^{2n} dt = \int_0^a \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Or $\int_0^a (-1)^n t^{2n} dt = (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$ et $\int_0^a \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan a - \arctan 0 = \arctan a$. D'où

$$\arctan a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. On remarque que $\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$. On prend donc $a = \frac{1}{\sqrt{3}} \in]0, 1[$: alors $a^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^n}$ et la question 3 donne

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}, \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Exemple 5 – en autonomie.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on pose $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{n!}$.

Somme. Soit $t \in [0, 1]$. D'après le rappel avec $u = t^2$: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = e^{t^2}$.

Convergence normale. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0, 1]$: $0 \leq t^{2n} \leq 1$, donc $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n!}$, majorant indépendant de t . Ainsi $\|f_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{n!}$. La série $\sum \frac{1}{n!}$ converge (c'est le rappel avec $u = 1$) ; par comparaison, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$.

Intégration terme à terme. Les f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème,

$$\int_0^1 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! (2n+1)}.$$

- ★ Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $a_n = \frac{1}{n! (2n+1)} > 0$. D'après la question 1, la différence étudiée est le reste

$$R_N = \int_0^1 e^{t^2} dt - \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \geq 0$$

(série convergente à termes positifs).

Majoration de chaque terme. Soit $n \geq N+1$. On écrit $n! = (N+1)! \times (N+2)(N+3) \cdots n$; le produit contient $n - N - 1$ facteurs, tous $\geq N+2$ (produit vide égal à 1 si $n = N+1$). Donc $n! \geq (N+1)! (N+2)^{n-N-1}$. De plus $2n+1 \geq 2N+3$. Ainsi

$$0 < a_n \leq \frac{1}{(2N+3)(N+1)!} \cdot \left(\frac{1}{N+2}\right)^{n-N-1}.$$

Sommation. Posons $q = \frac{1}{N+2} \in]0, \frac{1}{2}]$. Pour $M \geq N+1$, en sommant de $n = N+1$ à M :

$$\sum_{n=N+1}^M a_n \leq \frac{1}{(2N+3)(N+1)!} \sum_{j=0}^{M-N-1} q^j \leq \frac{1}{(2N+3)(N+1)!} \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Or $\frac{1}{1-q} = \frac{N+2}{N+1} \leq 2$. En faisant tendre M vers $+\infty$:

$$0 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n! (2n+1)} \leq \frac{2}{(2N+3)(N+1)!}.$$

Application numérique. Pour $N = 4$, le majorant vaut $\frac{2}{11 \times 120} = \frac{1}{660} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$: insuffisant. Pour $N = 5$, il vaut $\frac{2}{13 \times 720} = \frac{1}{4680} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \leq 10^{-3}$. On calcule

$$\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n! (2n+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \frac{1}{1320} = \frac{15203}{10395} \approx 1,46253.$$

Donc $1,46253 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt \leq 1,46253 + 0,00022 = 1,46275$, et **1,463 est une valeur approchée de $\int_0^1 e^{t^2} dt$ à 10^{-3} près** (en fait $\int_0^1 e^{t^2} dt \approx 1,46265$).

Remarque : on ne connaît pas de primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ s'exprimant avec les fonctions usuelles ; l'intégration terme à terme permet malgré tout de calculer l'intégrale avec la précision souhaitée.

Bonus – le sophomore's dream.

1. *Prolongement.* Par croissances comparées, $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc $\varphi(x) \rightarrow 0$: φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$. Le prolongement est continu sur $[0, 1]$.

Encadrement. φ est dérivable sur $]0, 1]$ et $\varphi'(x) = -\ln x - 1$, qui est > 0 sur $]0, \frac{1}{e}[$ et < 0 sur $]\frac{1}{e}, 1]$. Donc φ croît sur $]0, \frac{1}{e}]$, décroît sur $[\frac{1}{e}, 1]$, et $\varphi(x) \leq \varphi(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ pour tout $x \in]0, 1]$. Par ailleurs, pour $x \in]0, 1]$, $x > 0$ et $\ln x \leq 0$, donc $\varphi(x) \geq 0$. Avec $\varphi(0) = 0$: $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{e}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Justification de la convention. Pour $x \in]0, 1]$, $x^{-x} = e^{-x \ln x} = e^{\varphi(x)}$ et $x^n (\ln x)^n = (x \ln x)^n = (-1)^n \varphi(x)^n$. Comme φ (prolongée) est continue sur $[0, 1]$, les fonctions e^φ et $(-1)^n \varphi^n$ sont continues sur $[0, 1]$: elles prolongent par continuité en 0 les deux fonctions considérées, avec les valeurs $e^0 = 1$ et 0 (pour $n \geq 1$) en 0.

2. *Convergence normale.* Les $f_n = \frac{\varphi^n}{n!}$ sont continues sur $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [0, 1]$: d'après la question 1, $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{e} \leq 1$, donc $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$, majorant indépendant de x . Ainsi $\|f_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{n!}$ et, $\sum \frac{1}{n!}$ convergeant, $\sum f_n$ **converge normalement** sur $[0, 1]$.

Somme. Soit $x \in [0, 1]$. Le rappel de l'exemple précédent avec $u = \varphi(x)$ donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)^n}{n!} = e^{\varphi(x)}$, qui est bien x^{-x} (prolongée par 1 en 0).

3. Les f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$ et la convergence est uniforme (question 2). D'après le théorème,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{\varphi(x)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx,$$

et, avec la formule admise,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Avec le changement d'indice $m = n + 1$:

$$\boxed{\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}} \quad (\approx 1,29129).$$

- ★ Soit $n \geq 1$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note P_j la fonction $x \mapsto x^n (\ln x)^j$ prolongée par continuité en 0. Elle est bien prolongeable : pour $j \geq 1$, $x^n (\ln x)^j = (x^{n/j} \ln x)^j \rightarrow 0$ par croissances comparées (car $\frac{n}{j} > 0$), et $P_0(x) = x^n$. Ainsi $P_j(0) = 0$ et $I_j = \int_0^1 P_j$.

(a) Soit $k \geq 1$. Sur $]0, 1]$, h_k est dérivable (produit de fonctions dérivables) et

$$h'_k(x) = (n+1)x^n (\ln x)^k + x^{n+1} \cdot k(\ln x)^{k-1} \cdot \frac{1}{x} = (n+1)x^n (\ln x)^k + kx^n (\ln x)^{k-1}.$$

h'_k est continue sur $]0, 1]$, donc h_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$.

En 0, $h_k(x) = x \cdot x^n (\ln x)^k \rightarrow 0 = h_k(0)$, donc h_k est continue sur $[0, 1]$. De plus, comme $n \geq 1$, les deux termes de $h'_k(x)$ tendent vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$ (ce sont $(n+1)P_k(x)$ et $kP_{k-1}(x)$). D'après le théorème de la limite de la dérivée, h_k est dérivable en 0 avec $h'_k(0) = 0$, et h'_k est continue en 0. Donc h_k **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$** , et sur tout $[0, 1]$:

$$h'_k = (n+1)P_k + kP_{k-1}.$$

(b) h_k étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$:

$$\int_0^1 h'_k(x) dx = h_k(1) - h_k(0) = 1^{n+1} (\ln 1)^k - 0 = 0 \quad (\text{car } k \geq 1).$$

D'autre part, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 h'_k = (n+1)I_k + k I_{k-1}$. Donc

$$(n+1) I_k = -k I_{k-1}.$$

(c) On a $I_0 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ et, pour $k \geq 1$, $I_k = -\frac{k}{n+1} I_{k-1}$. Par une récurrence immédiate,

$$I_k = \left(-\frac{k}{n+1}\right) \left(-\frac{k-1}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{n+1}\right) I_0 = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Pour $k = n$: $\int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = I_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$, ce qui est la formule admise.

Cas $n = 0$. La formule est vraie directement : $x^0 (\ln x)^0 = 1$ et $\int_0^1 1 dx = 1 = \frac{0!}{1!}$. En revanche la méthode ne s'applique pas : pour $k \geq 1$, $(\ln x)^k$ n'a pas de limite finie en 0 (sa valeur absolue tend vers $+\infty$), donc $I_k = \int_0^1 (\ln x)^k dx$ n'est pas l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ (cela relève des intégrales généralisées, vues plus tard) ; de même h'_k n'a pas de limite finie en 0.

4 Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

Attention – c'est la suite des dérivées qui doit converger uniformément.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

Convergence uniforme. Soit $n \geq 1$ et soit $x \in \mathbb{R}$: $|g_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n}$, majorant indépendant de x . Donc $0 \leq \|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$: (g_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Dérivées. g_n est dérivable et $g'_n(x) = \cos(nx)$. En particulier $g'_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, suite qui ne converge pas. Alors que la limite (la fonction nulle) est dérivable de dérivée nulle, la suite des dérivées ne converge même pas simplement : la convergence uniforme de (g_n) ne dit rien sur celle de (g'_n) .

Exemple 6 – guidé : identifier une limite par sa dérivée.

Pour $n \geq 1$ et $x \in]-1, 1[$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

1. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $k \geq 1$, $\left|\frac{x^k}{k}\right| = \frac{|x|^k}{k} \leq |x|^k$. La série géométrique $\sum |x|^k$ converge car $0 \leq |x| < 1$; par comparaison, $\sum \frac{x^k}{k}$ converge absolument, donc converge. Comme $f_n(x)$ est sa somme partielle d'ordre n , **la suite $(f_n(x))$ converge.**
2. f_n est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$. Pour $x \in] -1, 1[$ (donc $x \neq 1$) :

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} x^j = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

3. Soit $a \in]0, 1[$, soit $n \geq 1$ et soit $x \in [-a, a]$.

$$f'_n(x) - g(x) = \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{x^n}{1-x}, \quad \text{donc} \quad |f'_n(x) - g(x)| = \frac{|x|^n}{1-x}.$$

Or $|x| \leq a$ donne $|x|^n \leq a^n$, et $x \leq a$ donne $1-x \geq 1-a > 0$. D'où $|f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{a^n}{1-a}$, majorant indépendant de x .

Par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f'_n - g\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^n}{1-a} \rightarrow 0$ (car $0 < a < 1$). (f'_n) **converge uniformément vers g sur $[-a, a]$.**

4. Soit $[c, d] \subset]-1, 1[$ un segment : $-1 < c \leq d < 1$. Posons $a = \max(|c|, |d|, \frac{1}{2})$; alors $a \in]0, 1[$ et, pour $x \in [c, d]$, $-a \leq -|c| \leq c \leq x \leq d \leq |d| \leq a$, donc $[c, d] \subset [-a, a]$. (On a mis $\frac{1}{2}$ dans le maximum pour garantir $a > 0$.)

Convergence uniforme sur $[c, d]$. Avec ce a , soit $n \geq 1$. D'après la question 3, $f'_n - g$ est bornée sur $[-a, a]$, donc $\|f'_n - g\|_{\infty, [-a, a]}$ existe. Soit $x \in [c, d]$: comme $[c, d] \subset [-a, a]$, on a $x \in [-a, a]$, et la norme infinie sur $[-a, a]$ majore toutes les valeurs prises sur $[-a, a]$:

$$|f'_n(x) - g(x)| \leq \|f'_n - g\|_{\infty, [-a, a]}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x : $f'_n - g$ est bornée sur $[c, d]$ et, par définition de la borne supérieure (plus petit des majorants),

$$0 \leq \|f'_n - g\|_{\infty, [c, d]} \leq \|f'_n - g\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^n}{1-a}.$$

Comme $\frac{a^n}{1-a} \rightarrow 0$, par encadrement $\|f'_n - g\|_{\infty, [c, d]} \rightarrow 0$: (f'_n) converge uniformément vers g sur $[c, d]$.

Attention : ce n'est pas parce que (f'_n) converge uniformément sur un intervalle qu'elle converge uniformément sur un intervalle plus grand ; c'est l'inclusion $[c, d] \subset [-a, a]$, dans ce sens, qui permet de conclure.

Le segment $[c, d]$ étant quelconque, (f'_n) converge uniformément vers g sur tout segment de $] -1, 1[$. Vérifions les hypothèses du théorème sur $I =] -1, 1[$:

- chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (question 2) ;
- (f_n) converge simplement vers f sur I (question 1) ;
- (f'_n) converge uniformément vers g sur tout segment de I .

Donc **f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et $f'(x) = \frac{1}{1-x}$.**

5. $f_n(0) = 0$ pour tout n , donc $f(0) = 0$. Posons $\theta(x) = f(x) + \ln(1-x)$ sur $] -1, 1[$: θ est dérivable et

$$\theta'(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0.$$

Comme $] -1, 1[$ est un intervalle, θ est constante, égale à $\theta(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Exemple 7 – en autonomie : quand l'hypothèse manque.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$ et $h(x) = \max(x, 0)$.

1. $x \mapsto 1 + e^{nx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]1, +\infty[\subset]0, +\infty[$, et $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$: par composition, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{1}{1 + e^{-nx}}.$$

2. Soit $n \geq 1$.

Si $x \geq 0$. $1 + e^{nx} = e^{nx}(1 + e^{-nx})$, donc $f_n(x) = \frac{1}{n}(nx + \ln(1 + e^{-nx})) = x + \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx})$. Comme $h(x) = x$ et $0 < e^{-nx} \leq 1$, par croissance de $\ln$:

$$0 \leq f_n(x) - h(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) \leq \frac{\ln 2}{n}.$$

Si $x < 0$. $h(x) = 0$ et $0 < e^{nx} < 1$, donc $0 \leq f_n(x) - h(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx}) \leq \frac{\ln 2}{n}$.

Dans tous les cas, $|f_n(x) - h(x)| \leq \frac{\ln 2}{n}$, majorant indépendant de x . Par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f_n - h\|_{\infty} \leq \frac{\ln 2}{n} \rightarrow 0$: **(f_n) converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$.**

3. Pour $x < 0$, $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{0}{x} = 0$; pour $x > 0$, $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 1$. Les taux d'accroissement ont pour limites 0 à gauche et 1 à droite : **h n'est pas dérivable en 0.**

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 0$, $e^{-nx} \rightarrow 0$ donc $f'_n(x) \rightarrow 1$. Si $x = 0$, $f'_n(0) = \frac{1}{2}$. Si $x < 0$, $e^{-nx} \rightarrow +\infty$ donc $f'_n(x) \rightarrow 0$. La limite simple de (f'_n) est

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Chaque f'_n est continue sur $[-1, 1]$, mais g n'est pas continue en 0. Si la convergence de (f'_n) était uniforme sur $[-1, 1]$, le théorème de continuité (séance précédente) donnerait g continue sur $[-1, 1]$: contradiction. **La convergence de (f'_n) n'est pas uniforme sur $[-1, 1]$.**

Les deux premières hypothèses du théorème sont vérifiées (f_n de classe $\mathcal{C}^1$, convergence simple, et même uniforme, de (f_n)) ; **c'est la convergence uniforme de (f'_n) sur tout segment qui est en défaut** (sur les segments contenant 0). Ce n'est pas étonnant : la conclusion du théorème est fautive puisque h n'est pas dérivable en 0.

★ Soit $c > 0$, soit $n \geq 1$ et soit $x \geq c$.

$$|f'_n(x) - 1| = 1 - \frac{1}{1 + e^{-nx}} = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} \leq e^{-nx} \leq e^{-nc},$$

majorant indépendant de x . Donc $0 \leq \|f'_n - 1\|_{\infty, [c, +\infty[} \leq e^{-nc} \rightarrow 0$ (car $c > 0$) : **(f'_n) converge uniformément vers 1 sur $[c, +\infty[$.**

Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $]0, +\infty[: 0 < \alpha \leq \beta$, et $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, +\infty[$. Appliquons ce qui précède avec $c = \alpha$. Soit $n \geq 1$ et soit $x \in [\alpha, \beta]$: comme $x \in [\alpha, +\infty[$, $|f'_n(x) - 1| \leq \|f'_n - 1\|_{\infty, [\alpha, +\infty[}$, majorant indépendant de x . Par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f'_n - 1\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \leq \|f'_n - 1\|_{\infty, [\alpha, +\infty[} \leq e^{-n\alpha} \rightarrow 0$ (même argument que dans l'exemple 6, question 4). Ainsi (f'_n) converge uniformément vers la fonction constante 1 sur tout segment de $]0, +\infty[$. Comme les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et convergent simplement vers h sur $]0, +\infty[$, le théorème donne : h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $h' = 1$, ce qui est cohérent avec $h(x) = x$ pour $x > 0$.

5 Dérivation de la somme d'une série de fonctions

Exemple 8 – guidé : retour sur la fonction F du récap.

1. Soit $n \geq 1$. $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2} e^{-nx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0, +\infty[$, et $f'_n(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$.
2. D'après la question 1 de l'exemple 1, $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \geq 0$, en particulier pour tout $x > 0$: $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $c > 0$, soit $n \geq 1$ et soit $x \geq c$. Comme $-nx \leq -nc$ et $n \geq 1$:

$$|f'_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-nx} \leq e^{-nc} = (e^{-c})^n,$$

majorant indépendant de x . Par définition de la borne supérieure, $\|f'_n\|_{\infty, [c, +\infty[} \leq (e^{-c})^n$. Comme $0 < e^{-c} < 1$, la série géométrique $\sum (e^{-c})^n$ converge ; par comparaison, $\sum f'_n$ **converge normalement sur $[c, +\infty[$.**

4. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $]0, +\infty[: 0 < \alpha \leq \beta$ et $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, +\infty[$. Soit $n \geq 1$ et soit $x \in [\alpha, \beta]$: comme $x \in [\alpha, +\infty[$, $|f'_n(x)| \leq \|f'_n\|_{\infty, [\alpha, +\infty[}$, majorant indépendant de x . Par définition de la borne supérieure, $\|f'_n\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \leq \|f'_n\|_{\infty, [\alpha, +\infty[} \leq (e^{-\alpha})^n$ (question 3 avec $c = \alpha$). Par comparaison avec la série géométrique, $\sum \|f'_n\|_{\infty, [\alpha, \beta]}$ converge : $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $]0, +\infty[$. Avec les questions 1 et 2, le théorème donne : **F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et**

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

5. Soit $x > 0$ et $y = e^{-x} : 0 < y < 1$, donc $y \in]-1, 1[$. D'après l'exemple 6,

$$F'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -(-\ln(1-y)) = \ln(1-e^{-x}).$$

Comme $0 < 1 - e^{-x} < 1$, $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$: **F est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.**

Elle l'est même sur $[0, +\infty[$: pour $y > 0$ et $x \in]0, \frac{y}{2}]$, $F(x) \geq F(\frac{y}{2})$; en faisant tendre x vers 0^+ (continuité de F en 0), $F(0) \geq F(\frac{y}{2}) > F(y)$.

6. Soit $n \geq 1$. Pour $x > 0$, $|f'_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{1}{n}$, donc f'_n est bornée sur $]0, +\infty[$ et $\|f'_n\|_{\infty,]0, +\infty[} \leq \frac{1}{n}$. Réciproquement, pour tout $x > 0$, $\frac{e^{-nx}}{n} \leq \|f'_n\|_{\infty,]0, +\infty[}$; en faisant tendre x vers 0^+ , $\frac{1}{n} \leq \|f'_n\|_{\infty,]0, +\infty[}$. Finalement

$$\|f'_n\|_{\infty,]0, +\infty[} = \frac{1}{n},$$

et la série harmonique diverge : **il n'y a pas convergence normale de $\sum f'_n$ sur $]0, +\infty[$.** Le problème se situe au voisinage de 0, d'où le travail sur les $[c, +\infty[$, $c > 0$.

Pour aller plus loin : il n'y a même pas convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. Sinon, le théorème de la double limite en 0 (adhérent à $]0, +\infty[$), avec $f'_n(x) \rightarrow -\frac{1}{n}$, affirmerait que la série $\sum(-\frac{1}{n})$ converge, ce qui est faux.

Bonus. Quand $x \rightarrow 0^+$, $1 - e^{-x} \rightarrow 0^+$, donc $F'(x) = \ln(1 - e^{-x}) \rightarrow -\infty$.

F est continue sur $[0, +\infty[$ (exemple 1) et dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$: d'après le théorème des accroissements finis sur $[0, x]$, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c_x) = \ln(1 - e^{-c_x}).$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $c_x \rightarrow 0^+$ (encadrement), donc ce taux d'accroissement tend vers $-\infty$. (C'est la version « limite infinie » du théorème de la limite de la dérivée.) **F n'est donc pas dérivable à droite en 0.**

Interprétation graphique : la courbe de F admet au point $(0, F(0)) = (0, \frac{\pi^2}{6})$ une **tangente verticale**.

Remarque : chaque f_n est dérivable en 0, mais pas la somme F ; c'est cohérent avec l'absence de convergence uniforme de $\sum f'_n$ au voisinage de 0.

Exemple 9 – en autonomie.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$, et $H = \sum_{n \geq 1} f_n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$: pour tout $n \geq 1$, $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge : **H est définie sur $\mathbb{R}$.**

2. *Dérivées.* Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas) et $f'_n(x) = -\frac{2x}{(n^2 + x^2)^2}$.

Convergence normale sur $[-A, A]$. Soit $A > 0$, soit $n \geq 1$ et soit $x \in [-A, A]$. Comme $(n^2 + x^2)^2 \geq n^4 > 0$ et $|x| \leq A$:

$$|f'_n(x)| = \frac{2|x|}{(n^2 + x^2)^2} \leq \frac{2A}{n^4},$$

majorant indépendant de x . Donc $\|f'_n\|_{\infty, [-A, A]} \leq \frac{2A}{n^4}$, et $\sum \frac{2A}{n^4}$ converge (Riemann, $4 > 1$). Par comparaison, $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-A, A]$.

Passage à un segment quelconque. Soit $[c, d]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $A = \max(|c|, |d|, 1) > 0$: pour $x \in [c, d]$, $-A \leq c \leq x \leq d \leq A$, donc $[c, d] \subset [-A, A]$. Soit $n \geq 1$ et soit $x \in [c, d]$: comme $x \in [-A, A]$, la majoration précédente donne $|f'_n(x)| \leq \frac{2A}{n^4}$, indépendant de x . Par définition de la borne supérieure, $\|f'_n\|_{\infty, [c, d]} \leq \frac{2A}{n^4}$, et par comparaison $\sum \|f'_n\|_{\infty, [c, d]}$ converge.

Conclusion. $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $\mathbb{R}$. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (question 1). D'après le théorème, **H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et**

$$H'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(n^2 + x^2)^2}.$$

(On ne pouvait pas travailler directement sur $\mathbb{R}$ avec cette majoration, le majorant $\frac{2A}{n^4}$ dépendant de A .)

3. Soit $x > 0$: tous les termes $\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}$ sont strictement positifs, donc leur somme est strictement positive (elle est minorée par son premier terme). Ainsi $H'(x) < 0$ pour $x > 0$, et $H'(0) = 0$. H' étant strictement négative sur $[0, +\infty[$ sauf en 0, **H est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.**

(Résultat cohérent avec le fait que chaque f_n est décroissante sur $[0, +\infty[$; par parité, H est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$.)

Bonus – suite de l'exercice E4 de la séance précédente.

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on note $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ (pour $x \geq 0$, $n+x \geq 1 > 0$) et $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

Soit $n \geq 1$ et soit $x \geq 0$: $|u'_n(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, majorant indépendant de x . Donc $\|u'_n\|_{\infty, [0, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ (égalité en $x = 0$), et $\sum u'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, +\infty[$. Enfin $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ (E4).

D'après le théorème, **ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et**

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

(Contrairement à $\sum u_n$, la série $\sum u'_n$ converge normalement : dériver a fait gagner une puissance de n au dénominateur.)

2. Soit $x \geq 0$ et $b_n = \frac{1}{(n+x)^2}$. La suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est positive, strictement décroissante et tend vers 0 ; $\psi'(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} b_n$ est une série alternée qui relève du critère spécial. Son premier terme est $b_1 > 0$, et le reste d'ordre 1 vérifie $|R_1| \leq b_2$. Donc

$$\psi'(x) = b_1 + R_1 \geq b_1 - b_2 > 0.$$

ψ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (E4), on en déduit de plus que $\psi(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$: en effet, pour $y > x$, $\psi(x) < \psi(x+1) \leq \psi(y)$, et en faisant tendre y vers $+\infty$, $\psi(x) < \psi(x+1) \leq 0$.

Exercices supplémentaires

E1.

- (a) Soit $t \in [0, 1]$. Si $t \in [0, 1[$, $t^n \rightarrow 0$ donc $f_n(t) \rightarrow 1$. Si $t = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$. La limite simple est

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1[, \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Les f_n sont continues sur $[0, 1]$ mais f n'est pas continue en 1 ; par contraposée du théorème de continuité, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$. **On ne peut pas appliquer le théorème sur $[0, 1]$.**

(b) Soit $a \in]0, 1[$, soit $n \geq 1$ et soit $t \in [0, a]$:

$$|f_n(t) - 1| = 1 - \frac{1}{1+t^n} = \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n \leq a^n,$$

majorant indépendant de t . Donc $0 \leq \|f_n - 1\|_{\infty, [0, a]} \leq a^n \rightarrow 0$: (f_n) converge uniformément vers 1 sur $[0, a]$.

Pour $t \in [a, 1]$, $0 < f_n(t) \leq 1$ (car $t^n \geq 0$). Par croissance de l'intégrale ($a < 1$) : $0 \leq \int_a^1 f_n(t) dt \leq \int_a^1 1 dt = 1 - a$.

(c) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \in]0, 1[$. Par la relation de Chasles,

$$\int_0^1 f_n - 1 = \left(\int_0^a f_n - a \right) + \left(\int_a^1 f_n - (1 - a) \right).$$

- Les f_n sont continues sur $[0, a]$ et convergent uniformément vers 1 : d'après le théorème, $\int_0^a f_n \rightarrow \int_0^a 1 = a$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|\int_0^a f_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- D'après (b), $\int_a^1 f_n$ et $1 - a$ appartiennent tous deux à $[0, 1 - a]$, donc $|\int_a^1 f_n - (1 - a)| \leq 1 - a = \frac{\varepsilon}{2}$.

Par inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, $|\int_0^1 f_n - 1| \leq \varepsilon$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} = 1$.

Variante directe : pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq 1 - f_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$, donc $0 \leq 1 - \int_0^1 f_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. La méthode ci-dessus a l'intérêt de s'adapter à des cas où l'on ne sait pas intégrer.

E2. (Formule de Leibniz)

(a) Soit $a \in [0, 1]$ et $b_n = \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$: on a $b_n \geq 0$; $b_{n+1} \leq b_n$ car $a^{2n+3} \leq a^{2n+1}$ (puisque $0 \leq a \leq 1$) et $\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}$; enfin $0 \leq b_n \leq \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n(a) = \sum (-1)^n b_n$ converge, et pour tout $N \in \mathbb{N}$ le reste vérifie

$$|R_N(a)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(a) \right| \leq b_{N+1} = \frac{a^{2N+3}}{2N+3} \leq \frac{1}{2N+3},$$

majorant indépendant de a . Donc $0 \leq \|R_N\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{2N+3} \rightarrow 0$: $\sum u_n$ **converge uniformément sur** $[0, 1]$.

(Elle ne converge pas normalement sur $[0, 1]$: $\|u_n\|_{\infty, [0, 1]} = \frac{1}{2n+1}$, terme général d'une série divergente.)

(b) On note $S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$ pour $a \in [0, 1]$. Les u_n sont continues sur $[0, 1]$ et la convergence y est uniforme : d'après le théorème de continuité, S est continue sur $[0, 1]$, en particulier en 1.

D'après l'exemple 4, $S(a) = \arctan a$ pour tout $a \in [0, 1]$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = S(1) = \lim_{a \rightarrow 1^-} S(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} \arctan a = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

E3.

Pour $n \geq 1$ et $x \in [-1, 1]$, on note $v_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$.

(a) Chaque v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ (polynomiale), avec $v'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$. La série $\sum v_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$, donc sur $] -1, 1[$ (séance précédente).

Soit $a \in]0, 1[$, soit $n \geq 1$ et soit $x \in [-a, a]$: $|v'_n(x)| = \frac{|x|^{n-1}}{n} \leq a^{n-1}$, majorant indépendant de x . Donc $\|v'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^{n-1}$, et la série géométrique $\sum a^{n-1}$ converge ($0 < a < 1$) : $\sum v'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Soit $[c, d]$ un segment de $] - 1, 1[$; d'après l'exemple 6 (question 4), il existe $a \in]0, 1[$ tel que $[c, d] \subset [-a, a]$. Soit $n \geq 1$ et soit $x \in [c, d]$: comme $x \in [-a, a]$, $|v'_n(x)| \leq a^{n-1}$, majorant indépendant de x . Par définition de la borne supérieure, $\|v'_n\|_{\infty, [c, d]} \leq a^{n-1}$, et par comparaison $\sum v'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[c, d]$. Ainsi $\sum v'_n$ converge uniformément sur tout segment de $] - 1, 1[$. D'après le théorème, **G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, 1[$** et $G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

(b) Soit $x \in] - 1, 1[\setminus \{0\}$. La série $\sum \frac{x^n}{n}$ converge ; par linéarité et d'après l'exemple 6,

$$G'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

(Et $G'(0) = 1$, seul le terme $n = 1$ étant non nul ; c'est cohérent avec $-\frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.)

★ G est continue sur $[-1, 1]$ (séance précédente), donc sur $[0, 1]$, et dérivable sur $]0, 1[$. Quand $x \rightarrow 1^-$, $-\ln(1-x) \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow 1$, donc $G'(x) \rightarrow +\infty$.

Soit $x \in]0, 1[$. D'après le théorème des accroissements finis sur $[x, 1]$, il existe $c_x \in]x, 1[$ tel que

$$\frac{G(1) - G(x)}{1 - x} = G'(c_x) = -\frac{\ln(1 - c_x)}{c_x}.$$

Quand $x \rightarrow 1^-$, $c_x \rightarrow 1^-$ (encadrement), donc ce taux d'accroissement tend vers $+\infty$. **G n'est pas dérivable à gauche en 1** : la courbe admet une tangente verticale au point $(1, G(1)) = (1, \frac{\pi^2}{6})$.

E4.

Pour $n \geq 1$ et $s > 1$, on note $g_n(s) = -\frac{\ln n}{n^s} = -\ln n \, e^{-s \ln n}$, de sorte que $\zeta' = \sum_{n \geq 1} g_n$ sur $]1, +\infty[$.

Hypothèses de régularité et de convergence simple. Chaque g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$g'_n(s) = (\ln n)^2 e^{-s \ln n} = \frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

D'après le rappel du cours, $\sum g_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

Convergence normale de $\sum g'_n$ sur un segment. Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$, donc $1 < a < b$. Soit $n \geq 1$ et soit $s \in [a, b]$. Comme $\ln n \geq 0$ et $s \geq a$, $n^s = e^{s \ln n} \geq e^{a \ln n} = n^a$, d'où

$$|g'_n(s)| = \frac{(\ln n)^2}{n^s} \leq \frac{(\ln n)^2}{n^a},$$

majorant indépendant de s . Donc $\|g'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{(\ln n)^2}{n^a}$.

Posons $c = \frac{1+a}{2}$: alors $c > 1$ et $a - c = \frac{a-1}{2} > 0$. Pour $n \geq 1$,

$$\frac{(\ln n)^2 / n^a}{1/n^c} = \frac{(\ln n)^2}{n^{a-c}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées ($a - c > 0$). Ainsi $\frac{(\ln n)^2}{n^a} = o(\frac{1}{n^c})$, avec $\sum \frac{1}{n^c}$ convergente (Riemann, $c > 1$) et des termes positifs : par comparaison, $\sum \frac{(\ln n)^2}{n^a}$ converge, puis $\sum \|g'_n\|_{\infty, [a, b]}$ converge. **$\sum g'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $]1, +\infty[$.**

Conclusion. D'après le théorème, $\zeta' = \sum g_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, c'est-à-dire que **ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$** , avec

$$\zeta''(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

Convexité. Pour $s > 1$, tous les termes sont positifs et celui d'indice $n = 2, \frac{(\ln 2)^2}{2^s}$, est strictement positif : $\zeta''(s) > 0$. ζ **est (strictement) convexe sur $]1, +\infty[$** .

Remarque : le choix $c = \frac{1+a}{2}$ (milieu de 1 et a) sert à intercaler un exposant strictement entre 1 et a : on « sacrifie » une puissance n^{a-c} pour absorber le $(\ln n)^2$, tout en gardant un exposant $c > 1$.