
QUINZAINE DU 12/09 AU 08/11

1 Contenu du cours

Chapitre 5 - Normes (cours et TD)

1. Normes sur un espace vectoriel

Définition, variante de l'inégalité triangulaire, distance associée, exemples de référence (normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, norme associée à un produit scalaire, adaptation aux matrices, $\|\cdot\|_\infty$ sur les espaces de fonctions bornées, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur les fonctions continues sur un segment), boules et sphères, parties convexes, parties bornées, suites et fonctions bornées.

2. Convergence de suites dans un espace normé

Définition, équivalence entre la convergence composante par composante dans $\mathbb{K}^n$ et la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, compatibilité avec les opérations algébriques, suites extraites.

3. Comparaison des normes

Définition de l'équivalence des normes, propriétés élémentaires (symétrie, réflexivité, transivité), équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$ sur $C^0([0, 1])$ mais pas l'inverse, invariance du caractère bornée et de la convergence par équivalence.

Chapitre 6 - Suites et séries de fonctions (cours)

1. Modes de convergence

Convergence simple pour une suite de fonctions, convergence uniforme, la convergence uniforme implique la convergence simple, convergence simple pour une série de fonctions, convergence uniforme, convergence normale, la convergence normale implique la convergence absolue en tout point, la convergence normale implique la convergence uniforme.

2. Théorèmes d'interversion et de régularité

Continuité de la limite d'une suite de fonctions, continuité de la somme d'une série de fonctions, double limite pour les séries de fonctions, ...

À suivre...

2 Questions de cours

1. **Démonstration** : La norme associée à un produit scalaire est une norme.
2. **Démonstration** : $\|\cdot\|_\infty$ définie sur $L^\infty(X, \mathbb{K})$ (où X est un ensemble quelconque) est une norme.
3. **Exemple** : (f_n) avec $f_n : t \mapsto t^2 + \frac{\sin(nt)}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction carrée.
4. **Exemple** : $\sum g_n$ avec $g_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
5. **Exemple** : Donner l'ensemble de définition et prouver la continuité de $G : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$.
6. **Exemple** : Déterminer la limite en $+\infty$ de $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.