

Séance à distance

Étude complète de la fonction ζ de Riemann
continuité, dérivabilité, comportement aux bornes, régularité

Mode d'emploi

- **Première partie de la séance : cours en visio.** On reprend ensemble la partie 1 jusqu'au théorème de dérivation (section 1.5). Ayez la fiche sous les yeux et de quoi écrire.
- **Ensuite : travail en autonomie**, à votre rythme. Tout le monde commence par l'exercice guidé 1.6, puis avance dans l'ordre. Je reste disponible en visio : signalez-vous (chat ou main levée) dès que vous bloquez.
- Les étoiles indiquent la difficulté : $\star$ application directe, $\star\star$ demande de l'initiative, $\star\star\star$ technique avancée.
- **En fin de séance**, complétez le tableau bilan de la dernière page. Pour la colonne $\mathcal{C}^k$, l'énoncé du théorème (début de la partie 4) suffit. Le tableau complet sera dans le corrigé.

Dans toute la fiche, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$, on pose

$$f_n(s) = \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \quad \text{et} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1 Partie commune : continuité et dérivabilité de ζ

1.1 Le point de départ

Pour tout $s > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$ converge : la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$, et ζ est bien définie sur $]1, +\infty[$.

Chaque f_n est continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]1, +\infty[$. On veut savoir si la somme ζ hérite de ces propriétés. L'outil est le théorème de continuité de la somme :

Rappel : continuité de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I . Si chaque f_n est continue sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

En pratique, on montre la convergence **normale**, qui entraîne la convergence uniforme.

1.2 Le problème : pas de convergence normale sur $]1, +\infty[$

1. Soit $n \geq 2$. Justifier que $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$ et que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\|f_n\|_{\infty,]1, +\infty[} = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ (borne supérieure *non atteinte* si $n \geq 2$).
3. Conclure : la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$.

Le défaut se situe **près de 1** : quand $s \rightarrow 1^+$, chaque terme $\frac{1}{n^s}$ se rapproche de $\frac{1}{n}$, terme général de la série harmonique, qui diverge. Loin de 1, il n'y a aucune difficulté.

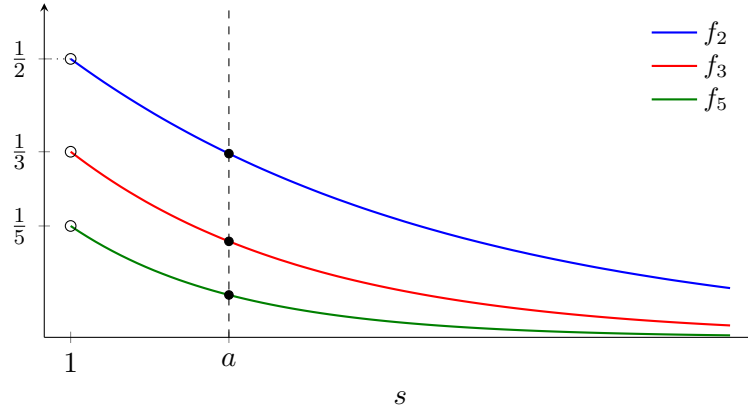
Remarque. Ne pas converger normalement ne signifie pas, en général, ne pas converger uniformément. Mais ici la convergence n'est pas non plus uniforme sur $]1, +\infty[$: c'est démontré dans le cours (exemple 6.39), et l'exercice 7 en donne une autre preuve, plus courte.

1.3 La solution : se placer sur un segment

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]1, +\infty[$, de sorte que $1 < a \leq b$.

4. Soient $n \geq 1$ et $s \in [a, b]$. Montrer que $0 < \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$.

5. En déduire que $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^a}$, puis que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

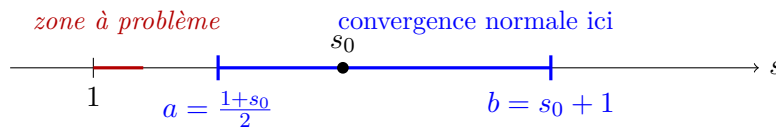


Sur $]1, +\infty[$, le sup de f_n est $\frac{1}{n}$ (cercles), non sommable.
 Sur $[a, +\infty[$, le sup de f_n est $\frac{1}{n^a}$ (points), sommable car $a > 1$.

Remarquez que la majoration de la question 4 reste vraie pour tout $s \geq a$: la série converge en fait normalement sur $[a, +\infty[$. Ce qu'on ne peut pas faire, c'est *s'approcher de 1*.

Pourquoi cela suffit-il ?

- La continuité est *d'abord* définie **en un point**. Dire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$, cela veut *juste* dire que ζ est continue en chaque point $s_0 > 1$.
- La convergence normale, au contraire, n'a de sens que **sur un intervalle** : $\|f_n\|_{\infty, J}$ est une borne supérieure sur J tout entier. Converger normalement sur J , ce n'est *pas* :
~~« converger normalement en tout point de J »~~
- D'où l'astuce : on a besoin d'un intervalle pour la convergence normale, mais on n'a pas besoin de *tout* $]1, +\infty[$ pour la continuité en s_0 . On pose donc un segment **autour** de s_0 , qui reste à distance de 1, par exemple $[a, b]$ avec $a = \frac{1+s_0}{2}$ et $b = s_0 + 1$:



Comme s_0 est à l'intérieur de $[a, b]$, la continuité de ζ sur $[a, b]$ donne la continuité de ζ en s_0 . Plus s_0 est proche de 1, plus a est proche de 1 ; mais pour *chaque* s_0 fixé, on a bien $a > 1$.

Rédaction type : continuité de ζ

Soit $s_0 > 1$. Posons $a = \frac{1+s_0}{2}$ et $b = s_0 + 1$, de sorte que $1 < a < s_0 < b$.

Convergence normale sur $[a, b]$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $s \in [a, b]$, comme $\ln n \geq 0$ et $s \geq a$, on a $0 < \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \leq e^{-a \ln n} = \frac{1}{n^a}$. Ce majorant ne dépend pas de s , donc $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^a}$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge car $a > 1$: par comparaison de séries à termes positifs, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$.

Continuité sur $[a, b]$. Chaque $f_n : s \mapsto e^{-s \ln n}$ est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de continuité de la somme, ζ est continue sur $[a, b]$, donc en s_0 , qui est intérieur à $[a, b]$.

Conclusion. Ceci vaut pour tout $s_0 > 1$: ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Variante (celle du cours) : on travaille sur un segment $[a, b]$ quelconque de $]1, +\infty[$, puis on conclut « par caractère local de la continuité ». C'est le même argument : tout point $s_0 > 1$ est à l'intérieur d'un tel segment.

Attention

- On n'écrit **jamais** : « la série converge uniformément sur tout segment, donc elle converge uniformément sur $]1, +\infty[$ ». C'est faux ! Ce qui passe des segments à l'intervalle, c'est la *continuité*, parce qu'elle se vérifie point par point. La convergence uniforme, elle, porte sur tout l'intervalle à la fois.
- On ne peut pas non plus prendre « $a = 1$ » : $[1, b] \not\subset]1, +\infty[$, et la majoration par $\frac{1}{n^1}$ ne donne pas une série convergente.

1.4 Le théorème de dérivation, hypothèse par hypothèse

Théorème : dérivation de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur l'intervalle I . Si :

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(H2) $\sum f_n$ converge **simplement** sur I ;

(H3) $\sum f'_n$ converge **uniformément** sur I ;

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

En pratique, on vérifie (H3) par la convergence **normale** de $\sum f'_n$ **sur tout segment** $[a, b] \subset I$. Comme pour la continuité, la dérivabilité se vérifie point par point : il suffit d'un segment autour de chaque point.

D'où viennent ces hypothèses ? (idée de la preuve)

Notons $S_N = \sum_{n=0}^N f_n$. Fixons $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$, puisque S_N est de classe $\mathcal{C}^1$ (H1),

$$S_N(x) = S_N(x_0) + \int_{x_0}^x S'_N(t) dt = S_N(x_0) + \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^N f'_n(t) dt.$$

On fait tendre N vers $+\infty$:

- à gauche et dans le premier terme de droite, la convergence *simple* (H2) suffit : $S_N(x) \rightarrow S(x)$ et $S_N(x_0) \rightarrow S(x_0)$;
- dans l'intégrale, il faut intervertir $\lim$ et $\int$ sur le *segment* d'extrémités x_0 et x : c'est le théorème d'intégration de la séance précédente, qui demande la convergence *uniforme* de $\sum f'_n$ (H3), au moins sur les segments.

On obtient $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^x T(t) dt$, où $T = \sum f'_n$ est continue : S est une primitive de T , donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $S' = T$.

À retenir : c'est sur la série des *dérivées* que porte l'exigence forte. Pour la série elle-même, la convergence simple suffit.

Attention

Deux erreurs classiques :

- vérifier la convergence uniforme de $\sum f_n$ au lieu de celle de $\sum f'_n$ (voir l'exemple $\frac{\sin(nx)}{n}$ de la fiche précédente) ;
- oublier de vérifier la convergence simple de $\sum f_n$ elle-même.

1.5 Exercice guidé : ζ est de classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 1 – guidé, pour tous.

1. (H1). Soit $n \geq 1$. Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et montrer que $f'_n(s) = -\frac{\ln n}{n^s}$.
2. (H2). Pourquoi $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $]1, +\infty[$?
3. (H3) : *majoration*. Soit $[a, b]$ un segment de $]1, +\infty[$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\ln n}{n^a}$.
4. (H3) : *convergence de la série majorante*. On pose $c = \frac{1+a}{2}$.
 - (a) Vérifier que $1 < c < a$.
 - (b) Montrer que $\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-c}} \cdot \frac{1}{n^c}$, puis que $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$.
 - (c) En déduire que $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge, puis que $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
 - (d) *Pour comprendre le choix de c* . Pourquoi ne peut-on pas comparer directement $\frac{\ln n}{n^a}$ à $\frac{1}{n^a}$? Pourquoi a-t-on besoin de $c > 1$? de $c < a$?
5. *Conclusion*. Rédiger la conclusion : montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et que

$$\forall s > 1, \quad \zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

(Même structure que la rédaction type de la continuité : on fixe $s_0 > 1$, on pose un segment autour de s_0 , on applique le théorème sur ce segment, on conclut en s_0 .)

6. *Variations*. Montrer que $\zeta'(s) < 0$ pour tout $s > 1$. (Attention au terme $n = 1$.) En déduire le sens de variation de ζ .

2 Exercices : continuité et dérivabilité, avec ou sans segments

Exercice 2 – ★ vrai ou faux ?.

Justifier chaque réponse par un théorème ou un contre-exemple (souvent déjà rencontré).

1. Si $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I , alors elle converge normalement sur I .
2. Si les f_n sont continues sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .
3. Pour montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, il faut montrer que $\sum f_n$ converge uniformément.
4. Si les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et si (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de $[0, +\infty[$, et si chaque f_n tend vers 0 en $+\infty$, alors f tend vers 0 en $+\infty$. (*Penser à $f_n(x) = e^{-x/n}$.*)

Exercice 3 – ★ quand on n'a pas besoin des segments.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^4}$.

1. Montrer que $\sum \frac{\sin^2(nx)}{n^4}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En déduire que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^3}$.
3. Pourquoi n'a-t-on pas eu besoin de passer par des segments ?
★ En appliquant le théorème de dérivation à la série $\sum \frac{\sin(2nx)}{n^3}$, montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer S'' . Peut-on continuer et obtenir $\mathcal{C}^3$ par la même méthode ?

Exercice 4 – ★ quand les segments sont indispensables.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = e^{-nx}$, et $K(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

1. Montrer que $\sum f_n(x)$ converge si et seulement si $x > 0$, et calculer $K(x)$.
2. Calculer $\|f'_n\|_{\infty,]0, +\infty[}$. La série $\sum f'_n$ converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. Montrer que $\|f'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = ne^{-na}$, puis que $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. En déduire que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $K'(x)$ sous forme de série.
5. En dérivant directement l'expression de K obtenue en 1, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

6. *Application.* En déduire que, pour tout $q \in]0, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n q^n = \frac{q}{(1 - q)^2}$, puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Exercice 5 – ★★ lire les hypothèses.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$ et $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que $|\arctan u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. (*Inégalité des accroissements finis.*) En déduire que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$? Sur $[-A, A]$, pour $A > 0$? En déduire que T est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $f'_n(x)$, puis montrer que $\sum f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. En déduire que T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que T est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. *Moralité.* La question 2 était-elle nécessaire pour obtenir la question 4 ? Quelle hypothèse du théorème de dérivation porte sur $\sum f_n$ elle-même ?
- ★ Soit $N \geq 1$. Montrer que, pour $x \geq 0$, $T(x) \geq \sum_{n=1}^N \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$. En déduire que $T(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Pourquoi le théorème de la double limite ne pouvait-il pas s'appliquer en $+\infty$?

3 Retour sur ζ : comportement aux bornes de $]1, +\infty[$

Rappel : double limite pour les séries de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a un point de I ou une extrémité de I , éventuellement infinie. Si chaque f_n admet une limite finie ℓ_n en a et si $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum \ell_n$ converge, S admet une limite finie en a , et $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Attention

Ici, **les segments ne suffisent pas** : une limite en une extrémité de I (par exemple $+\infty$) ne se ramène pas à un point de I autour duquel on poserait un segment, et aucun segment de I n'atteint cette extrémité. Il faut la convergence uniforme sur I , ou sur un intervalle bien choisi qui a a pour extrémité.

Dans toute cette partie, on revient à $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$ (pour $n \geq 1$ et $s > 1$) et à $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Exercice 6 – ★ limite en $+\infty$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.
2. Pour $n \geq 1$, déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^s}$. (*Attention au cas $n = 1$.*)
3. En déduire que $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$.
4. Pourquoi a-t-on choisi l'intervalle $[2, +\infty[$? Aurait-on pu choisir $[3, +\infty[$? $[1, +\infty[$? un segment $[2, b]$?

Exercice 7 – ★ trouver l'erreur.

Un élève rédige :

« La série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$, et pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n^s} \rightarrow \frac{1}{n}$ quand $s \rightarrow 1^+$. D'après le théorème de la double limite, la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, et $\zeta(s) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ quand $s \rightarrow 1^+$. »

1. Quelle affirmation de cette rédaction est manifestement fausse ?
2. Quelle hypothèse du théorème de la double limite n'est pas vérifiée ?
3. *Une preuve express.* On suppose par l'absurde que $\sum \frac{1}{n^s}$ converge uniformément sur $]1, 2]$. Appliquer le théorème de la double limite en 1 et aboutir à une contradiction. Conclure que $\sum \frac{1}{n^s}$ ne converge pas uniformément sur $]1, 2]$, ni sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8 – ★★ équivalent en 1^+ par comparaison série-intégrale.

Soit $s > 1$. On pose $\psi(t) = \frac{1}{t^s}$ pour $t \geq 1$.

- Justifier que ψ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\int_n^{n+1} \psi(t) dt \leq \frac{1}{n^s}$, et, si $n \geq 2$, que $\frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^n \psi(t) dt$. (*Faire un dessin !*)
- Soit $N \geq 2$. En sommant ces inégalités, montrer que

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^s}.$$

- Calculer $\int_1^A \frac{dt}{t^s}$ pour $A \geq 1$, et sa limite quand $A \rightarrow +\infty$. En déduire, en faisant tendre N vers $+\infty$, que

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

- En déduire que $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$, et la limite de ζ en 1^+ .

Exercice 9 – ★ allure du graphe.

À l'aide des résultats obtenus (variations, limites, équivalent), tracer l'allure de la courbe représentative de ζ sur $]1, +\infty[$, avec ses asymptotes. Vous pourrez affiner le tracé avec la convexité, établie en partie 4.

Bonus ★★. En écrivant $2^s(\zeta(s) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^s$, montrer que $\zeta(s) - 1 \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}$. (*Convergence normale sur $[2, +\infty[$ et double limite, comme dans l'exercice 6.*)

4 Pour aller plus loin (en autonomie) : régularité $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^\infty$

Cette partie utilise des techniques plus avancées. On garde les notations $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$.

Théorème : régularité $\mathcal{C}^k$ de la somme d'une série de fonctions

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$, la série $\sum f_n^{(j)}$ converge **simplement** sur I ;
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge **uniformément** sur I ;

alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$ et tout $x \in I$, $S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

En pratique, comme pour $\mathcal{C}^1$, on vérifie la convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment de I . Seule la dérivée d'ordre le plus élevé demande une convergence uniforme.

Exercice 10 – ★★ ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe.

(Si vous avez traité l'exercice E4 de la fiche précédente, passez directement à l'exercice suivant.)

- Calculer $f_n''(s)$ pour $n \geq 1$ et $s > 1$.
- Soit $[a, b]$ un segment de $]1, +\infty[$. Montrer que $\sum f_n''$ converge normalement sur $[a, b]$. (*S'inspirer de l'exercice 1.*)
- Quelles sont les autres hypothèses du théorème $\mathcal{C}^2$? Sont-elles vérifiées ?

4. Conclure que ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$, exprimer ζ'' et en déduire que ζ est convexe.

Exercice 11 – ★★ ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour montrer qu'une somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Plutôt que de traiter $k = 1$, puis $k = 2$, etc., on fixe un entier k **quelconque** et on mène le raisonnement une seule fois.

1. Soit $n \geq 1$. Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $s > 1$,

$$f_n^{(k)}(s) = (-1)^k \frac{(\ln n)^k}{n^s}.$$

2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $[a, b]$ un segment de $]1, +\infty[$. Montrer que $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier toutes les hypothèses du théorème $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$. (*Pourquoi la convergence simple des séries $\sum f_n^{(j)}$, $j < k$, est-elle automatique ?*)
4. Conclure que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et donner $\zeta^{(k)}(s)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quel est le signe de $\zeta^{(k)}$?

Bonus ★★★ – $\ln \zeta$ est convexe.

1. Soient $s > 1$ et $N \geq 1$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^N$, montrer que

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n^s} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^N \frac{(\ln n)^2}{n^s} \right).$$

(Écrire $\frac{\ln n}{n^s} = \frac{1}{n^{s/2}} \cdot \frac{\ln n}{n^{s/2}}.$)

2. En déduire que $\zeta'(s)^2 \leq \zeta(s) \zeta''(s)$, puis que $\ln \zeta$ est convexe sur $]1, +\infty[$.

Pour la petite histoire

Euler et les valeurs de ζ . Euler a calculé $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ en 1735 et, plus généralement, $\zeta(2k)$ pour tout $k \geq 1$. Pour les entiers impairs, on ne sait presque rien : Roger Apéry a démontré en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel, mais on ignore encore si $\zeta(5)$ l'est.

ζ et les nombres premiers. Euler a aussi découvert que, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5^s} + \dots\right) \dots$$

L'idée : en développant ce produit, chaque $\frac{1}{n^s}$ apparaît exactement une fois, grâce à la décomposition de n en facteurs premiers. Par exemple, $\frac{1}{12^s} = \frac{1}{2^{2s}} \cdot \frac{1}{3^s}$. On en tire une preuve qu'il y a une infinité de nombres premiers : s'il n'y en avait qu'un nombre fini, le produit serait un produit fini, qui tendrait vers une limite finie quand $s \rightarrow 1^+$. Or $\zeta(s) \rightarrow +\infty$ (exercice 8) !

L'hypothèse de Riemann. En 1859, Riemann a étendu ζ à presque tout le plan complexe. Ses zéros « non triviaux » sont tous dans la bande des nombres complexes de partie réelle comprise entre 0 et 1. Riemann a conjecturé qu'ils sont tous sur la droite de partie réelle $\frac{1}{2}$. Cette conjecture contrôle très finement la répartition des nombres premiers ; elle n'est toujours pas démontrée. En 1896, Hadamard et de la Vallée Poussin ont montré qu'aucun zéro n'est sur la droite de partie réelle 1 : c'est la clé du théorème des nombres premiers. Mais pendant plus d'un siècle, personne n'a su exclure une bande fixe au bord, même les zéros de partie réelle supérieure à 0,999.

Une nouvelle toute fraîche. Début octobre 2026, OpenAI a publié un manuscrit, produit par un modèle d'IA non encore diffusé, qui démontre que ζ n'a *aucun* zéro de partie réelle strictement supérieure à $\frac{7}{8}$: c'est l'« hypothèse quasi-Riemann ». Par symétrie, les zéros non triviaux seraient donc tous dans la bande des parties réelles comprises entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{7}{8}$. La preuve a été formalisée dans l'assistant de preuve Lean, mais au moment où cette fiche est écrite, elle n'a pas encore été vérifiée par des mathématiciens extérieurs. Affaire à suivre !

Bilan à compléter (tout le monde)

Les fonctions f_n sont définies sur un intervalle I . Pour les suites, f désigne la limite simple de (f_n) ; pour les séries, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Dans chaque case : **hypothèses** sur les f_n , **convergence** demandée, **conclusion**. La première case est remplie à titre de modèle.

	Continuité	Classe $\mathcal{C}^1$	Classe $\mathcal{C}^k$	Limite en a (point ou extrémité de I)	Intégrale sur un segment $[a, b]$
Suites (f_n)	<i>Hyp.</i> : f_n continues sur I . <i>Conv.</i> : (f_n) converge uniformément vers f sur I . <i>Concl.</i> : f continue sur I .				
Séries $\sum f_n$					
Suffit-il de vérifier sur tout segment de I ?					

Question de réflexion : pourquoi la réponse de la dernière ligne n'est-elle pas la même pour toutes les colonnes ?