

Séance à distance – Corrigé

Étude complète de la fonction ζ de Riemann
continuité, dérivabilité, comportement aux bornes, régularité

Rappels utilisés tout au long du corrigé

Deux outils

Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme. Si $\sum f_n$ converge normalement sur J , alors pour tout $x \in J$ la série $\sum f_n(x)$ converge absolument, et $\sum f_n$ converge uniformément sur J (le reste vérifie $\|R_N\|_{\infty, J} \leq \sum_{n>N} \|f_n\|_{\infty, J} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$).

Comparaison des puissances. Pour $n \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n}$ avec $\ln n \geq 0$. Donc, si $s \geq a$, alors $-s \ln n \leq -a \ln n$ et, par croissance de $\exp$, $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$.

1 Partie commune : continuité et dérivabilité de ζ

1.2 – Pas de convergence normale sur $]1, +\infty[$

1. Soit $n \geq 2$. Alors $\ln n > 0$, et $f_n(s) = e^{-s \ln n}$ est la composée de $s \mapsto -s \ln n$, strictement décroissante (fonction affine de coefficient $-\ln n < 0$), et de $\exp$, strictement croissante : f_n est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$).

Comme $\exp$ est continue en $-\ln n$ et $-s \ln n \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} -\ln n$, on obtient

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{1}{n^s} = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

2. Cas $n = 1$. $f_1(s) = 1$ pour tout s : $\|f_1\|_{\infty,]1, +\infty[} = 1 = \frac{1}{1}$ (borne atteinte).

Cas $n \geq 2$. La fonction $s \mapsto e^{-s \ln n}$ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$; donc, pour tout $s > 1$, $0 < f_n(s) < e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$. Ainsi f_n est bornée sur $]1, +\infty[$, $\frac{1}{n}$ en est un majorant, et ce majorant n'est jamais atteint.

C'est le *plus petit* majorant : soit $M < \frac{1}{n}$. Comme $f_n(s) \rightarrow \frac{1}{n}$ quand $s \rightarrow 1^+$, il existe $s > 1$ tel que $f_n(s) > M$; donc M n'est pas un majorant. Conclusion :

$$\forall n \geq 1, \quad \|f_n\|_{\infty,]1, +\infty[} = \frac{1}{n},$$

borne supérieure non atteinte dès que $n \geq 2$.

3. La série $\sum \|f_n\|_{\infty,]1, +\infty[} = \sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique, qui diverge. **La série $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $]1, +\infty[$.**

1.3 – Convergence normale sur un segment

4. Soient $n \geq 1$ et $s \in [a, b]$. Une exponentielle est strictement positive, donc $\frac{1}{n^s} > 0$. Comme $s \geq a$ et $\ln n \geq 0$, on a $-s \ln n \leq -a \ln n$, puis, par croissance de $\exp$,

$$0 < \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \leq e^{-a \ln n} = \frac{1}{n^a}.$$

(Pour $n = 1$, les deux membres valent 1 : l'inégalité large est indispensable.)

5. Le majorant $\frac{1}{n^a}$ ne dépend pas de s : f_n est bornée sur $[a, b]$ et, par définition de la borne supérieure (plus petit des majorants), $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^a}$. (C'est même une égalité, atteinte en $s = a$.)

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge car $a > 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$ converge : $\sum f_n$ **converge normalement sur** $[a, b]$.

1.6 – Exercice guidé

Exercice 1 – guidé : ζ est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. (H1). Soit $n \geq 1$. La fonction $s \mapsto -s \ln n$ est affine, donc de classe $\mathcal{C}^1$, et $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: par composition, $f_n : s \mapsto e^{-s \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ (et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). Par la formule de dérivation d'une composée, $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(s) = -s \ln n$:

$$f'_n(s) = -\ln n e^{-s \ln n} = -\frac{\ln n}{n^s}.$$

(Pour $n = 1$: $f_1 = 1$ et $f'_1 = 0 = -\frac{\ln 1}{1^s}$, la formule reste valable.)

2. (H2). Pour tout $s > 1$, $\sum \frac{1}{n^s}$ est une série de Riemann d'exposant $s > 1$, donc convergente. C'est exactement dire que $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.
3. (H3) : *majoration*. Soient $n \geq 1$ et $s \in [a, b]$. D'après la question 4 de la partie 1.3, $0 < \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$; en multipliant par $\ln n \geq 0$:

$$|f'_n(s)| = \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de s : f'_n est bornée sur $[a, b]$ et $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\ln n}{n^a}$.

4. (H3) : *convergence de la série majorante*.

(a) Comme $a > 1$:

$$c - 1 = \frac{1+a}{2} - 1 = \frac{a-1}{2} > 0 \quad \text{et} \quad a - c = a - \frac{1+a}{2} = \frac{a-1}{2} > 0,$$

donc $1 < c < a$. (c est le milieu de 1 et a .)

(b) Pour $n \geq 1$, $n^a = n^{(a-c)+c} = n^{a-c} n^c$, d'où

$$\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-c}} \cdot \frac{1}{n^c}.$$

Le quotient $\frac{\ln n/n^a}{1/n^c} = \frac{\ln n}{n^{a-c}}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ par croissances comparées,

puisque l'exposant $a - c$ est *strictement positif*. Ainsi $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$.

- (c) La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^c}$ converge car $c > 1$. Les deux séries sont à termes positifs et $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$: par comparaison, $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ **converge**.

Comme $0 \leq \|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\ln n}{n^a}$ (question 3), par comparaison $\sum \|f'_n\|_{\infty, [a, b]}$ converge : $\sum f'_n$ **converge normalement, donc uniformément, sur** $[a, b]$.

- (d) *Pourquoi pas directement $\frac{1}{n^a}$?* Le quotient $\frac{\ln n/n^a}{1/n^a} = \ln n$ tend vers $+\infty$: on a $\frac{1}{n^a} = o\left(\frac{\ln n}{n^a}\right)$, c'est-à-dire que $\frac{1}{n^a}$ est *plus petit* que le terme à étudier. Majorer par une série convergente plus petite ne prouve rien.

Pourquoi $c > 1$? Il faut comparer à une série *convergente* : $\sum \frac{1}{n^c}$ ne converge que si $c > 1$. Avec $c = 1$, on obtiendrait $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, vrai mais inutile car $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Pourquoi $c < a$? Pour que $\frac{\ln n}{n^{a-c}} \rightarrow 0$ il faut $a - c > 0$: si $c = a$, ce quotient vaut $\ln n \rightarrow +\infty$; si $c > a$, c'est pire. On « sacrifie » la petite puissance n^{a-c} pour absorber $\ln n$.

Bref, il faut un exposant *strictement entre 1 et a* ; n'importe lequel convient, et le milieu $c = \frac{1+a}{2}$ est un choix explicite commode. C'est possible précisément parce que $a > 1$: c'est là que sert le fait d'être « à distance de 1 ».

5. Conclusion.

Rédaction : ζ est de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $s_0 > 1$. Posons $a = \frac{1+s_0}{2}$ et $b = s_0 + 1$, de sorte que $1 < a < s_0 < b$. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation sur l'intervalle $I = [a, b]$:

(H1) pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, avec $f'_n(s) = -\frac{\ln n}{n^s}$ (question 1) ;

(H2) $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b] \subset]1, +\infty[$ (question 2) ;

(H3) $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$ (question 4c).

D'après le théorème, ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et, pour tout $s \in [a, b]$, $\zeta'(s) = \sum_{n \geq 1} f'_n(s)$.

Comme s_0 est intérieur à $[a, b]$, ζ et sa restriction à $[a, b]$ coïncident sur un voisinage de s_0 : ζ est dérivable en s_0 , ζ' est continue en s_0 , et $\zeta'(s_0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{s_0}}$.

Ceci valant pour tout $s_0 > 1$, ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall s > 1, \quad \zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

6. *Variations.* Soit $s > 1$. Le terme d'indice $n = 1$ est nul ($\ln 1 = 0$), et pour $n \geq 2$, $\frac{\ln n}{n^s} > 0$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^s}$ est donc à termes positifs, et sa somme est supérieure à chacun de ses termes, en particulier au terme d'indice 2 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s} \geq \frac{\ln 2}{2^s} > 0, \quad \text{donc} \quad \zeta'(s) \leq -\frac{\ln 2}{2^s} < 0.$$

(Attention : l'argument « tous les termes sont > 0 » est faux à cause du terme $n = 1$; c'est pour cela qu'on minore par le terme $n = 2$.)

ζ' étant strictement négative sur l'intervalle $]1, +\infty[$, ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Contrôle de cohérence : chaque f_n ($n \geq 2$) est strictement décroissante et f_1 est constante ; une somme de fonctions décroissantes est décroissante. Le calcul de ζ' confirme ce qu'on pouvait deviner directement.

2 Exercices : continuité et dérivabilité, avec ou sans segments

Exercice 2 – ★ vrai ou faux ?.

1. **Faux.** Contre-exemple : $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$ sur $I =]1, +\infty[$. La série converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset I$ (partie 1.3), mais pas sur I , puisque $\|f_n\|_{\infty, I} = \frac{1}{n}$ (partie 1.2).
2. **Vrai.** Soit $x_0 \in I$ (on suppose I non réduit à un point, sinon il n'y a rien à montrer). On peut choisir un segment $J \subset I$ qui contient tous les points de I assez proches de x_0 : il existe $\eta > 0$ tel que $I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset J$. Par exemple :

— si x_0 est intérieur à I , $J = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ avec $\eta > 0$ assez petit ;

— si x_0 est l'extrémité gauche de I (et appartient à I), $J = [x_0, x_0 + \eta]$; de même à droite.

Les f_n sont continues sur J et $\sum f_n$ converge uniformément sur J : la somme S est continue sur J . Comme S coïncide avec sa restriction à J sur $I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, S est continue en x_0 . Donc S est continue sur I . C'est le « caractère local de la continuité ».

3. **Faux.** Le théorème demande la convergence *simple* de $\sum f_n$ et la convergence *uniforme* de $\sum f'_n$ (en pratique sur tout segment). La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'est pas exigée, et elle peut être fautive alors que S est de classe $\mathcal{C}^1$.

Contre-exemple : $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $I =]0, +\infty[$ (exercice 4). La somme K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (et vaut d'ailleurs $\frac{1}{1-e^{-x}}$). Pourtant, pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_{\infty, I} = 1$ (sup en 0^+) ne tend pas vers 0 : les f_n ne tendent pas uniformément vers 0, donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I . (ζ sur $]1, +\infty[$ fournit un autre contre-exemple, voir l'exercice 7.)

4. **Faux.** Contre-exemple de la fiche précédente : $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$. Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $h(x) = \max(x, 0)$ (avec $\|f_n - h\|_{\infty} \leq \frac{\ln 2}{n}$), qui n'est pas dérivable en 0.

(Autre contre-exemple : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $|x|$ sur $\mathbb{R}$, car $0 \leq f_n(x) - |x| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.) Une limite uniforme de fonctions $\mathcal{C}^1$ est continue, mais pas forcément dérivable : il faut une hypothèse sur les *dérivées*.

5. **Faux.** Soit $f_n(x) = e^{-x/n}$ pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.
- Pour n fixé, $-\frac{x}{n} \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
 - Pour $x \geq 0$ fixé, $-\frac{x}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc $f_n(x) \rightarrow 1$: la limite simple est $f = 1$, qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
 - Convergence uniforme sur tout segment : un segment de $[0, +\infty[$ est inclus dans un $[0, A]$ avec $A > 0$. Pour $u \geq 0$, $1 - e^{-u} \leq u$ (convexité de $\exp$, ou inégalité des accroissements finis). Donc, pour $x \in [0, A]$,

$$|f_n(x) - 1| = 1 - e^{-x/n} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{A}{n},$$

majorant indépendant de x , qui tend vers 0 : la convergence est uniforme sur $[0, A]$, donc sur tout segment de $[0, +\infty[$.

Ce n'est pas contradictoire avec le théorème de la double limite : celui-ci demande la convergence uniforme sur un intervalle ayant $+\infty$ pour extrémité, et ici $\|f_n - 1\|_{\infty, [0, +\infty[} = 1$ (sup en $+\infty$) ne tend pas vers 0.

Exercice 3 – ★ quand on n'a pas besoin des segments.

1. Soient $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R} : 0 \leq \sin^2(nx) \leq 1$, donc $\left| \frac{\sin^2(nx)}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$, majorant indépendant de x . Ainsi $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^4}$ et, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^4}$ convergeant ($4 > 1$), $\sum f_n$ **converge normalement sur $\mathbb{R}$** .

En particulier, elle converge simplement sur $\mathbb{R}$: **S est définie sur $\mathbb{R}$** . Elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et chaque f_n est continue : d'après le théorème de continuité, **S est continue sur $\mathbb{R}$** .

2. (H1). f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (composée et produit de fonctions $\mathcal{C}^1$), et

$$f'_n(x) = \frac{2 \sin(nx) \cdot n \cos(nx)}{n^4} = \frac{2 \sin(nx) \cos(nx)}{n^3} = \frac{\sin(2nx)}{n^3}.$$

(H2). $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (question 1).

(H3). Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$, majorant indépendant de x : $\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^3}$, et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation, **S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$** et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^3}$.

3. Les majorations $\frac{1}{n^4}$ et $\frac{1}{n^3}$ sont valables *sur $\mathbb{R}$ tout entier* : elles ne dépendent d'aucun paramètre lié à un segment. Il n'y a pas de « zone à problème » (contrairement à ζ près de 1) : on applique directement les théorèmes sur $I = \mathbb{R}$. Les segments ne servent que lorsque la majoration se dégrade en s'approchant d'un point ou de l'infini.

- ★ Posons $g_n(x) = \frac{\sin(2nx)}{n^3}$, de sorte que $S' = \sum g_n$. Chaque g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g'_n(x) = \frac{2\cos(2nx)}{n^2}$. La série $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (question 2), et $|g'_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$ donne la convergence normale de $\sum g'_n$ sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation appliqué à $\sum g_n$, S' est de classe $\mathcal{C}^1$: **S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$** et

$$S''(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}.$$

Peut-on continuer ? La dérivée suivante du terme général est $-\frac{4\sin(2nx)}{n}$. Sa norme infinie sur $\mathbb{R}$ vaut $\frac{4}{n}$ (atteinte en $x = \frac{\pi}{4n}$), et $\sum \frac{4}{n}$ diverge : pas de convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pas non plus sur un segment $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$: dès que $2n(\beta - \alpha) \geq 2\pi$, $x \mapsto 2nx$ parcourt une période entière sur $[\alpha, \beta]$, donc le sup de $|\sin(2nx)|$ vaut 1 et la norme vaut encore $\frac{4}{n}$. **La méthode ne permet pas d'obtenir $\mathcal{C}^3$.**

Exercice 4 – ★ quand les segments sont indispensables.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{-nx} = (e^{-x})^n$: c'est une série géométrique de raison $q = e^{-x} > 0$. Elle converge si et seulement si $q < 1$, c'est-à-dire $-x < 0$, c'est-à-dire $x > 0$. (Si $x \leq 0$, $q \geq 1$ et le terme général ne tend pas vers 0.) Pour $x > 0$,

$$K(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_n(x) = -n e^{-nx}$, donc $|f'_n(x)| = n e^{-nx}$. Pour $n = 0$, $f'_0 = 0$ et $\|f'_0\|_\infty = 0$. Pour $n \geq 1$, $x \mapsto n e^{-nx}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 en 0^+ ; comme en partie 1.2, n est la borne supérieure (non atteinte). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f'_n\|_{\infty,]0, +\infty[} = n,$$

et $\sum n$ diverge grossièrement : $\sum f'_n$ **ne converge pas normalement** sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $a > 0$. Pour $n \geq 0$ et $x \geq a$: $-nx \leq -na$, donc $|f'_n(x)| = n e^{-nx} \leq n e^{-na}$, avec égalité en $x = a$. Le majorant est atteint, donc $\|f'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = n e^{-na}$.
Convergence de $\sum n e^{-na}$. Par croissances comparées, $n^2 \cdot n e^{-na} = n^3 e^{-na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $a > 0$), donc $n e^{-na} = o(\frac{1}{n^2})$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et les termes sont positifs : $\sum n e^{-na}$ converge. (On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert : $\frac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{n e^{-na}} \rightarrow e^{-a} < 1$.)
 $\sum f'_n$ **converge normalement** sur $[a, +\infty[$.

4. Soit $x_0 > 0$ et $a = \frac{x_0}{2} > 0$. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$:

(H1) chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$;

(H2) $\sum f_n$ converge simplement (question 1, car $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$) ;

(H3) $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément (question 3).

Donc K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, et x_0 est intérieur à cet intervalle : K est dérivable en x_0 , K' y est continue, et $K'(x_0) = \sum f'_n(x_0)$. Ceci valant pour tout $x_0 > 0$, **K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$** et

$$\forall x > 0, \quad K'(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} = - \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}.$$

(On a travaillé sur $[a, +\infty[$ plutôt que sur un segment : c'est permis, puisque la convergence normale y a lieu. L'essentiel est de rester à distance de 0.)

5. Pour $x > 0$, $K(x) = (1 - e^{-x})^{-1}$ avec $1 - e^{-x} > 0$. En dérivant, avec $(u^{-1})' = -u' u^{-2}$ et $u'(x) = e^{-x}$:

$$K'(x) = - \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

En comparant avec l'expression de la question 4 :

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

6. Soit $q \in]0, 1[$. Posons $x = -\ln q : x > 0$ (car $q < 1$) et $e^{-x} = q$, donc $e^{-nx} = q^n$. La question 5 donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n q^n = \frac{q}{(1 - q)^2}.$$

Avec $q = \frac{1}{2} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = \boxed{2}$.

Vérification rapide : $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} = \frac{57}{32} \approx 1,78$, et les termes suivants sont petits.

Exercice 5 – ★ lire les hypothèses.

1. $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout t , $|\arctan'(t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Soit $u \in \mathbb{R}$. Par l'inégalité des accroissements finis entre 0 et u :

$$|\arctan u| = |\arctan u - \arctan 0| \leq 1 \cdot |u - 0| = |u|.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2}$; la série $\sum \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge : $\sum f_n$ **converge simplement sur $\mathbb{R}$** .

2. Soit $n \geq 1$. Quand x parcourt $\mathbb{R}$, $\frac{x}{n^2}$ parcourt $\mathbb{R}$, et $\arctan$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc $|f_n(x)| < \frac{\pi}{2}$ pour tout x , et $f_n(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $x \rightarrow +\infty$: comme en partie 1.2,

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{non atteinte}).$$

La série $\sum \frac{\pi}{2}$ diverge grossièrement : **pas de convergence normale sur $\mathbb{R}$** .

Soit $A > 0$. Pour $x \in [-A, A]$, la question 1 donne $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{A}{n^2}$, majorant indépendant de x : $\|f_n\|_{\infty, [-A, A]} \leq \frac{A}{n^2}$, et $\sum \frac{A}{n^2}$ converge. **Convergence normale sur $[-A, A]$** .

Continuité. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $A = |x_0| + 1$, de sorte que $x_0 \in]-A, A[$. Les f_n sont continues et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-A, A]$: T est continue sur $[-A, A]$, donc en x_0 , intérieur. **T est continue sur $\mathbb{R}$** .

3. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, par dérivation d'une composée :

$$f'_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^4}} = \frac{n^2}{n^4 + x^2}.$$

On a $0 < f'_n(x) \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$, avec égalité en $x = 0$: $\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente. $\sum f'_n$ **converge normalement sur $\mathbb{R}$ tout entier**.

4. Sur $I = \mathbb{R}$: (H1) chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$; (H2) $\sum f_n$ converge simplement (question 1); (H3) $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément (question 3). D'après le théorème, **T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$** et

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}.$$

Tous les termes sont strictement positifs, donc $T'(x) \geq \frac{1}{1+x^2} > 0$ (premier terme). **T est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

5. **Non**, la question 2 n'était pas nécessaire. La seule hypothèse du théorème de dérivation portant sur $\sum f_n$ elle-même est (H2), la convergence *simple*, donnée par la question 1. La continuité de T découle d'ailleurs de la question 4 (une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue).

C'est un exemple frappant : $\sum f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors que $\sum f_n$ ne converge même pas uniformément sur $\mathbb{R}$ (les f_n ne tendent pas uniformément vers 0 puisque $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{\pi}{2}$).

- ★ Soit $x \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{x}{n^2} \geq 0$, donc $f_n(x) \geq 0$. La série $\sum f_n(x)$ est à termes positifs et convergente, donc sa somme majore chacune de ses sommes partielles :

$$T(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^N \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

Limite. Pour N fixé, la somme finie de droite tend vers $N\frac{\pi}{2}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Soit $M > 0$; choisissons $N \geq 1$ tel que $N\frac{\pi}{2} \geq M + 1$. Il existe $X \geq 0$ tel que, pour $x \geq X$, $\sum_{n=1}^N f_n(x) \geq N\frac{\pi}{2} - 1 \geq M$, d'où $T(x) \geq M$. **Donc** $T(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Double limite. Chaque f_n admet la limite finie $\ell_n = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur un intervalle $[A, +\infty[$, le théorème affirmerait que $\sum \ell_n = \sum \frac{\pi}{2}$ converge, ce qui est faux. L'hypothèse en défaut est donc la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$; et la conclusion du théorème (limite finie) est elle-même fautive ici.

3 Retour sur ζ : comportement aux bornes de $]1, +\infty[$

Exercice 6 – ★ limite en $+\infty$.

- Soient $n \geq 1$ et $s \geq 2$. Comme $\ln n \geq 0$ et $s \geq 2$, $0 < \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^2}$ (rappel en tête du corrigé), majorant indépendant de s . Donc $\|f_n\|_{\infty, [2, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ (égalité en $s = 2$) et, $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent, $\sum f_n$ **converge normalement** sur $[2, +\infty[$.
- Si $n = 1$: $\frac{1}{1^s} = 1$ pour tout s , donc la limite vaut $\ell_1 = 1$.
Si $n \geq 2$: $\ln n > 0$, donc $-s \ln n \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} -\infty$ et $\frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \rightarrow \ell_n = 0$.
- Appliquons le théorème de la double limite sur $I = [2, +\infty[$, en $+\infty$ (extrémité de I) : chaque f_n admet une limite finie ℓ_n en $+\infty$ (question 2), et $\sum f_n$ converge uniformément sur I (question 1). Donc

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

- Il faut un intervalle **ayant** $+\infty$ **pour extrémité** et sur lequel la convergence est uniforme. Avec $[2, +\infty[$, la majoration par $\frac{1}{n^2}$ est immédiate.
 - $[3, +\infty[$ convient aussi (majoration par $\frac{1}{n^3}$), comme n'importe quel $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.
 - $[1, +\infty[$ ne convient pas : $\zeta(1)$ n'est pas défini (série harmonique divergente), et de toute façon la norme $\|f_n\|_{\infty}$ vaudrait $\frac{1}{n}$: pas de convergence normale.
 - Un segment $[2, b]$ ne convient pas : $+\infty$ n'en est pas une extrémité, et la convergence uniforme sur $[2, b]$ ne dit rien de ce qui se passe quand $s \rightarrow +\infty$.

Exercice 7 – ★ trouver l'erreur.

- « La série $\sum \frac{1}{n}$ converge » est **faux** : c'est la série harmonique, qui diverge. Du même coup, « $\zeta(s) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ » n'a pas de sens.
- Le théorème demande la convergence uniforme sur un intervalle **dont 1 est une extrémité** (par exemple $]1, 2]$ ou $]1, +\infty[$). La convergence uniforme sur tout segment de $]1, +\infty[$ ne suffit pas : aucun segment de $]1, +\infty[$ n'a 1 pour extrémité (c'est exactement l'encadré « Attention » de la partie 3).
- Supposons par l'absurde que $\sum f_n$ converge uniformément sur $J =]1, 2]$. Le point 1 est une extrémité de J et chaque f_n admet la limite finie $\ell_n = \frac{1}{n}$ en 1^+ (partie 1.2, question 1). Le théorème de la double limite affirme alors que $\sum \ell_n = \sum \frac{1}{n}$ converge : **contradiction**. Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, 2]$.

Sur $]1, +\infty[$. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]1, +\infty[$, elle convergerait uniformément sur $]1, 2]$, car pour le reste R_N on a $\|R_N\|_{\infty, [1, 2]} \leq \|R_N\|_{\infty, [1, +\infty[}$ (un sup sur une partie est plus petit). C'est impossible d'après ce qui précède. (On peut aussi refaire directement le raisonnement par l'absurde sur $]1, +\infty[$.)

Exercice 8 – ★★ équivalent en 1^+ par comparaison série-intégrale.

1. $\psi(t) = e^{-s \ln t}$; comme $s > 0$ et $\ln$ est strictement croissante, $t \mapsto -s \ln t$ est strictement décroissante, et par croissance de $\exp$, ψ **est strictement décroissante sur** $[1, +\infty[$.

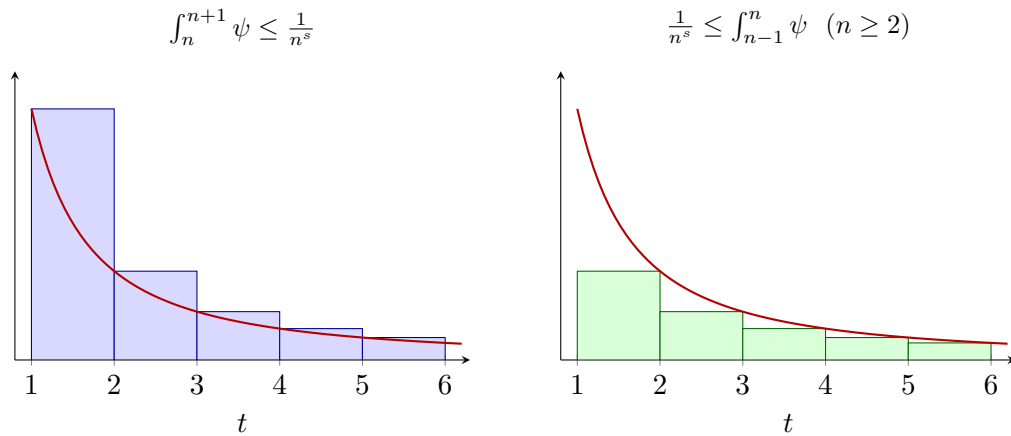
Soit $n \geq 1$. Pour $t \in [n, n+1]$, $\psi(t) \leq \psi(n) = \frac{1}{n^s}$. Par croissance de l'intégrale sur ce segment de longueur 1 :

$$\int_n^{n+1} \psi(t) dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s} dt = \frac{1}{n^s}.$$

Si $n \geq 2$, $[n-1, n] \subset [1, +\infty[$ et, pour $t \in [n-1, n]$, $\psi(t) \geq \psi(n)$, d'où

$$\frac{1}{n^s} = \int_{n-1}^n \frac{1}{n^s} dt \leq \int_{n-1}^n \psi(t) dt.$$

Le dessin (ici avec $s = 1,5$) : le rectangle de hauteur $\frac{1}{n^s}$ posé sur $[n, n+1]$ est *au-dessus* de la courbe ; posé sur $[n-1, n]$, il est *en dessous*.



2. Soit $N \geq 2$. En sommant la première inégalité pour $n = 1, \dots, N$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_1^{N+1} \psi(t) dt = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \psi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}.$$

En sommant la seconde pour $n = 2, \dots, N$: $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} \leq \int_1^N \psi(t) dt$, puis en ajoutant le terme $n = 1$, qui vaut 1 :

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^s}.$$

3. Pour $A \geq 1$, comme $s \neq 1$, une primitive de t^{-s} est $\frac{t^{1-s}}{1-s}$:

$$\int_1^A \frac{dt}{t^s} = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_1^A = \frac{A^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{1 - A^{1-s}}{s-1}.$$

Comme $1-s < 0$, $A^{1-s} = e^{(1-s) \ln A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$, donc $\int_1^A \frac{dt}{t^s} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{s-1}$.

Faisons tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question 2 : le membre de gauche tend vers $\frac{1}{s-1}$ (avec $A = N+1$), celui du milieu vers $\zeta(s)$, celui de droite vers $1 + \frac{1}{s-1}$ (avec $A = N$). Les inégalités larges passent à la limite :

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

4. Multiplions par $s - 1 > 0$:

$$1 \leq (s - 1)\zeta(s) \leq (s - 1) + 1 = s.$$

Quand $s \rightarrow 1^+$, le majorant s tend vers 1 ; par encadrement, $(s - 1)\zeta(s) \rightarrow 1$, c'est-à-dire

$$\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s - 1}.$$

Comme $\zeta(s) \geq \frac{1}{s-1} \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} +\infty$, on obtient $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$.

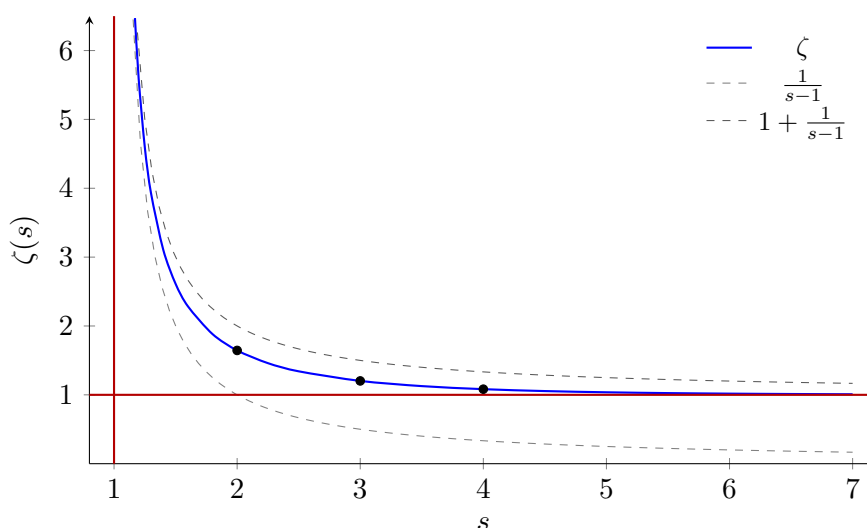
Remarque : l'encadrement dit même que $0 \leq \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \leq 1$. On peut montrer que $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ tend vers la constante d'Euler $\gamma \approx 0,577$ quand $s \rightarrow 1^+$.

Exercice 9 – ★ allure du graphe.

Récapitulons :

- ζ est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ (exercice 1) ;
- $\zeta(s) \rightarrow +\infty$ quand $s \rightarrow 1^+$: **asymptote verticale** d'équation $s = 1$, et $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ (exercice 8) ;
- $\zeta(s) \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow +\infty$: **asymptote horizontale** d'équation $y = 1$ (exercice 6) ;
- $\zeta(s) > 1$ pour tout $s > 1$ (le terme $n = 1$ vaut 1, les autres sont > 0) : la courbe est *au-dessus* de son asymptote horizontale ;
- ζ est convexe (exercice 10).

Quelques valeurs : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$, $\zeta(3) \approx 1,202$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,082$. En pointillés, l'encadrement de l'exercice 8.



Bonus **. Soit $s > 1$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge ; en isolant le terme $n = 1$, puis en multipliant par la constante 2^s (linéarité) :

$$2^s(\zeta(s) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^s}{n^s} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^s.$$

On note $g_n(s) = \left(\frac{2}{n}\right)^s = e^{s \ln(2/n)}$ pour $n \geq 2$.

Convergence normale sur $[2, +\infty[$. Soient $n \geq 2$ et $s \geq 2$. Comme $0 < \frac{2}{n} \leq 1$, on a $\ln \frac{2}{n} \leq 0$, donc $s \ln \frac{2}{n} \leq 2 \ln \frac{2}{n}$ et $0 < g_n(s) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}$, majorant indépendant de s . La série $\sum \frac{4}{n^2}$ converge : $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2, +\infty[$.

Limites des termes. Pour $n = 2$, $g_2(s) = 1$ pour tout s . Pour $n \geq 3$, $0 < \frac{2}{n} < 1$, donc $\ln \frac{2}{n} < 0$ et $g_n(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$.

Double limite sur $[2, +\infty[$, en $+\infty$:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} 2^s (\zeta(s) - 1) = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} 0 = 1.$$

Comme $\frac{1}{2^s} \neq 0$, cela signifie exactement que $\zeta(s) - 1 \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}$. Autrement dit, quand s est grand, $\zeta(s)$ est très proche de 1, et l'écart est essentiellement dû au seul terme $\frac{1}{2^s}$.

4 Pour aller plus loin : régularité $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 10 – $\star\star$ ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe.

1. D'après l'exercice 1, $f'_n(s) = -\ln n e^{-s \ln n}$. En dérivant à nouveau ($\ln n$ est une constante) :

$$f''_n(s) = (-\ln n)^2 e^{-s \ln n} = \frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

2. Soient $n \geq 1$ et $s \in [a, b]$. Comme $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$ et $(\ln n)^2 \geq 0$, $|f''_n(s)| \leq \frac{(\ln n)^2}{n^a}$, majorant indépendant de s : $\|f''_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{(\ln n)^2}{n^a}$.

Avec $c = \frac{1+a}{2}$, on a $1 < c < a$ (exercice 1, 4a) et

$$\frac{(\ln n)^2/n^a}{1/n^c} = \frac{(\ln n)^2}{n^{a-c}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées ($a - c > 0$). Donc $\frac{(\ln n)^2}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ et, $\sum \frac{1}{n^c}$ convergent ($c > 1$), $\sum \frac{(\ln n)^2}{n^a}$ converge par comparaison de séries à termes positifs. $\sum f''_n$ **converge normalement sur $[a, b]$** .

3. Les autres hypothèses du théorème $\mathcal{C}^2$ (avec $k = 2$), sur $[a, b]$:
 - chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) : **oui** ;
 - $\sum f_n$ converge simplement (Riemann, exposant $s > 1$) : **oui** ;
 - $\sum f'_n$ converge simplement : **oui**, elle converge même normalement sur $[a, b]$ (exercice 1, 4c).
4. Soit $s_0 > 1$, et $[a, b] = [\frac{1+s_0}{2}, s_0+1]$, de sorte que s_0 est intérieur à $[a, b]$. D'après le théorème $\mathcal{C}^2$ appliqué sur $[a, b]$, ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, donc deux fois dérivable en s_0 avec ζ'' continue en s_0 . Ceci pour tout $s_0 > 1$: **ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ et**

$$\forall s > 1, \quad \zeta''(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

Tous les termes sont positifs et celui d'indice 2 est strictement positif : $\zeta''(s) \geq \frac{(\ln 2)^2}{2^s} > 0$. **ζ est (strictement) convexe sur $]1, +\infty[$.**

Exercice 11 – $\star\star\star$ ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. $f_n : s \mapsto e^{-s \ln n}$ est la composée de $\exp$ et d'une fonction affine, toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$: f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(k)$: « pour tout $s > 1$, $f_n^{(k)}(s) = (-\ln n)^k e^{-s \ln n}$ ».

- $\mathcal{P}(0)$: c'est la définition de f_n (avec la convention $(-\ln n)^0 = 1$, y compris pour $n = 1$).
- Si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors en dérivant ($(-\ln n)^k$ est une constante) : $f_n^{(k+1)}(s) = (-\ln n)^k \cdot (-\ln n) e^{-s \ln n} = (-\ln n)^{k+1} e^{-s \ln n}$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $s > 1$, $f_n^{(k)}(s) = (-1)^k \frac{(\ln n)^k}{n^s}$.

2. Soient $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $s \in [a, b]$. Comme en (2) de l'exercice précédent, $|f_n^{(k)}(s)| = \frac{(\ln n)^k}{n^s} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}$, majorant indépendant de s : $\|f_n^{(k)}\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}$.

Avec $c = \frac{1+a}{2} \in]1, a[$:

$$\frac{(\ln n)^k / n^a}{1/n^c} = \frac{(\ln n)^k}{n^{a-c}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

par croissances comparées : *n'importe quelle* puissance de $\ln n$ est négligeable devant *n'importe quelle* puissance strictement positive de n . Donc $\frac{(\ln n)^k}{n^a} = o(\frac{1}{n^c})$, et $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^c}$ ($c > 1$). $\sum f_n^{(k)}$ **converge normalement sur** $[a, b]$, **pour tout** $k \in \mathbb{N}$.

Point clé : le même c convient pour tous les k ; c'est le facteur n^{a-c} qui absorbe $(\ln n)^k$, quel que soit k .

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Hypothèses du théorème $\mathcal{C}^k$ sur $I = [a, b]$:
- chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ (question 1) ;
 - pour $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur $[a, b]$: c'est **automatique**, car la question 2, valable pour *tout* entier, donne avec j à la place de k la convergence normale de $\sum f_n^{(j)}$ sur $[a, b]$, qui entraîne la convergence simple ;
 - $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$ (question 2).

Donc ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$, et $\zeta^{(j)} = \sum_n f_n^{(j)}$ sur $[a, b]$ pour $0 \leq j \leq k$.

4. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $s_0 > 1$. Avec $[a, b] = [\frac{1+s_0}{2}, s_0 + 1]$, qui contient s_0 en son intérieur, la question 3 montre que ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de s_0 . Ceci pour tout $s_0 > 1$: ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]1, +\infty[$. Et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: ζ **est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$** , avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s > 1, \quad \zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^s}.$$

Signe. Pour $k \geq 1$, le terme $n = 1$ est nul et les autres sont positifs, celui d'indice 2 étant strictement positif ; donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^k}{n^s} \geq \frac{(\ln 2)^k}{2^s} > 0$. Pour $k = 0$, $\zeta(s) > 1 > 0$. Ainsi $\zeta^{(k)}$ **est du signe strict de $(-1)^k$** : $\zeta, \zeta'', \zeta^{(4)}, \dots$ sont strictement positives et $\zeta', \zeta^{(3)}, \dots$ strictement négatives.

Bonus * – $\ln \zeta$ est convexe.**

1. Soient $s > 1$ et $N \geq 1$. Dans $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $(\sum_{n=1}^N x_n y_n)^2 \leq (\sum_{n=1}^N x_n^2) (\sum_{n=1}^N y_n^2)$. Prenons

$$x_n = \frac{1}{n^{s/2}}, \quad y_n = \frac{\ln n}{n^{s/2}}, \quad \text{de sorte que} \quad x_n y_n = \frac{\ln n}{n^s}, \quad x_n^2 = \frac{1}{n^s}, \quad y_n^2 = \frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

On obtient exactement

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n^s} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^N \frac{(\ln n)^2}{n^s} \right).$$

2. Faisons tendre N vers $+\infty$. Les trois sommes partielles convergent, respectivement vers $-\zeta'(s)$, $\zeta(s)$ et $\zeta''(s)$ (exercices 1 et 10). Par continuité de $x \mapsto x^2$ et du produit, et passage à la limite dans une inégalité large :

$$(-\zeta'(s))^2 = \zeta'(s)^2 \leq \zeta(s) \zeta''(s).$$

Convexité de $\ln \zeta$. ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ et à valeurs dans $]1, +\infty[\subset]0, +\infty[$: $\ln \zeta$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$, avec

$$(\ln \zeta)' = \frac{\zeta'}{\zeta}, \quad (\ln \zeta)'' = \frac{\zeta'' \zeta - \zeta'^2}{\zeta^2} \geq 0.$$

$\ln \zeta$ **est convexe sur** $]1, +\infty[$ (on dit que ζ est *log-convexe*). C'est plus fort que la convexité de ζ : $\zeta = \exp \circ \ln \zeta$ est la composée d'une fonction convexe et d'une fonction convexe croissante.

Bilan complété

Les fonctions f_n sont définies sur un intervalle I . Pour les suites, f désigne la limite simple de (f_n) ; pour les séries, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

	Continuité	Classe $\mathcal{C}^1$	Classe $\mathcal{C}^k$	Limite en a (point ou extrémité de I)	Intégrale sur un segment $[a, b]$
Suites (f_n)	<i>Hyp.</i> : f_n continues sur I . <i>Conv.</i> : (f_n) converge uniformément vers f sur I . <i>Concl.</i> : f continue sur I .	<i>Hyp.</i> : f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . <i>Conv.</i> : (f_n) converge simplement vers f sur I ; (f'_n) converge uniformément vers g sur I . <i>Concl.</i> : f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.	<i>Hyp.</i> : f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . <i>Conv.</i> : pour $j < k$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ; $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur I . <i>Concl.</i> : f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $f^{(j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(j)}$ pour $j \leq k$.	<i>Hyp.</i> : chaque f_n a une limite finie ℓ_n en a . <i>Conv.</i> : (f_n) converge uniformément vers f sur I . <i>Concl.</i> : (ℓ_n) converge vers un réel ℓ , et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ (on peut intervertir les deux limites).	<i>Hyp.</i> : f_n continues sur $[a, b]$. <i>Conv.</i> : (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$. <i>Concl.</i> : f continue et $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$.
Séries $\sum f_n$	<i>Hyp.</i> : f_n continues sur I . <i>Conv.</i> : $\sum f_n$ converge uniformément sur I (en pratique : normalement). <i>Concl.</i> : S continue sur I .	<i>Hyp.</i> : f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . <i>Conv.</i> : $\sum f_n$ converge simplement sur I ; $\sum f'_n$ converge uniformément sur I . <i>Concl.</i> : S de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.	<i>Hyp.</i> : f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . <i>Conv.</i> : pour $j < k$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ; $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I . <i>Concl.</i> : S de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$ pour $j \leq k$.	<i>Hyp.</i> : chaque f_n a une limite finie ℓ_n en a . <i>Conv.</i> : $\sum f_n$ converge uniformément sur I . <i>Concl.</i> : $\sum \ell_n$ converge, et $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.	<i>Hyp.</i> : f_n continues sur $[a, b]$. <i>Conv.</i> : $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$. <i>Concl.</i> : $\sum \int_a^b f_n$ converge et $\int_a^b S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$.
Suffit-il de vérifier sur tout segment de I ?	Oui. La continuité se vérifie point par point ; chaque point de I est dans un segment de I qui le « contient avec ses voisins ».	Oui , pour la convergence uniforme des dérivées. La convergence simple, elle, doit avoir lieu sur tout I .	Oui , pour la convergence uniforme de la dérivée k -ième (même raison que $\mathcal{C}^1$).	Non. Il faut la convergence uniforme sur I , ou sur un intervalle de I ayant a pour extrémité (ex. : $[2, +\infty[$ pour ζ en $+\infty$).	Sans objet : on intègre sur un segment fixé, et seule compte la convergence uniforme sur ce segment $[a, b]$.

Question de réflexion. Continuité, dérivabilité et classe $\mathcal{C}^k$ sont des propriétés **locales** : elles se vérifient en chaque point, et ne font intervenir que les valeurs de la fonction *près* de ce point. Un segment de I entourant le point suffit donc, et l'on peut s'éloigner des « zones à problème » (comme 1 pour ζ) puisque chaque point fixé en est à distance strictement positive.

La limite en une extrémité a de I (par exemple $+\infty$, ou 1^+ pour ζ) porte au contraire sur le comportement *quand on s'approche de a* : il faut contrôler les fonctions sur un intervalle qui va jusqu'à a , ce qu'aucun segment de I ne fait. C'est précisément ce qu'illustrent l'exercice 7 (l'erreur de l'élève) et l'exercice 2, question 5 ($e^{-x/n}$).

Enfin, l'intégrale porte sur un segment fixé à l'avance : la question ne se pose pas.