

Séance à distance

Réduction (1) : exemples d'introduction et polynômes d'endomorphismes

Mode d'emploi

- **Travail par groupe de colle** dans votre salle. Tout le monde traite la partie 1, puis la partie 2 dans l'ordre. Je passe régulièrement dans chaque groupe. Si vous êtes bloqués, signalez-le (chat ou main levée) plutôt que d'attendre.
- Les étoiles indiquent la difficulté : $\star$ application directe, $\star\star$ demande de l'initiative, $\star\star\star$ difficile.
- Les exercices de la partie 3 se terminent à la maison.

Dans toute la fiche, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Deux exemples pour comprendre ce qu'est la réduction

Exercice 1 – guidé, pour tous : une matrice de taille 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $f(x, y)$.
2. On pose $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, -1)$. Justifier que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$, puis écrire la matrice $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
4. *Interprétation géométrique.* Que fait f aux vecteurs de la droite $\text{Vect}(e_1)$? de la droite $\text{Vect}(e_2)$? Reconnaitre f (faire un dessin).
5. *Changement de base.* Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, calculer P^{-1} , et vérifier par le calcul que $A = PDP^{-1}$.
6. *Puissances.*
 - (a) Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. (*D'où viennent les simplifications ?*)
 - (b) Calculer D^k , puis en déduire A^k en distinguant k pair et k impair.
 - (c) Retrouver ce résultat en calculant directement A^2 . Était-ce prévisible d'après la question 4 ?

Exercice 2 – $\star$ même méthode, en autonomie.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On garde $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, -1)$ et la matrice P de l'exercice 1.

1. Calculer $g(e_1)$ et $g(e_2)$. En déduire une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + (-1)^k & 3^k - (-1)^k \\ 3^k - (-1)^k & 3^k + (-1)^k \end{pmatrix}.$$

(On retrouvera ce résultat par une autre méthode dans l'exercice 10.)

Exercice 3 – guidé, pour tous : une matrice de taille 3.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sous cette forme, il est difficile de voir ce que fait g . On pose

$$e_1 = (1, 0, 1), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1. Écrire la matrice Q de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Calculer $\det Q$ et conclure que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $g(e_1)$, $g(e_2)$, $g(e_3)$, puis écrire $R = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$. Quelle relation lie B , Q et R ?
3. *Interprétation.* Que fait g sur la droite $\text{Vect}(e_1)$? Montrer que le plan $\Pi = \text{Vect}(e_2, e_3)$ est stable par g , et décrire l'action de g sur ce plan (*dessiner e_2 , e_3 , $g(e_2)$, $g(e_3)$ dans Π*).
4. *Puissances.* Calculer R^2 et R^4 . En déduire B^4 , puis que B est inversible et exprimer B^{-1} comme une puissance de B .
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer B^k en fonction du reste de la division euclidienne de k par 4. Calculer B^{2026} (*on pourra calculer B^2 directement*).
6. *Pas de droite stable dans Π .*
 - (a) Montrer que $g(g(y)) = -y$ pour tout $y \in \Pi$.
 - (b) Soit $y \in \Pi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $g(y) = \lambda y$. Montrer que $\lambda^2 y = -y$, puis que $y = 0$.
 - (c) Expliquer pourquoi on ne pourra jamais trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est diagonale (*on admettra pour cela le résultat du bonus*).

Bonus **. Montrer que la seule droite de $\mathbb{R}^3$ stable par g est $\text{Vect}(e_1)$. (*Écrire un vecteur x sous la forme $x = a e_1 + y$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $y \in \Pi$, et traduire $g(x) = \lambda x$.*)

À retenir

- L'endomorphisme ne change pas, seule la base change. **Réduire** u , c'est chercher une base dans laquelle sa matrice est la plus simple possible ; matriciellement, réduire A , c'est chercher P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit simple (par exemple diagonale).
- Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: les puissances deviennent faciles.
- Les bons vecteurs de base vérifient $u(e) = \lambda e$: la droite $\text{Vect}(e)$ est stable. Matriciellement, on cherche des colonnes $X \neq 0$ telles que $AX = \lambda X$. C'est l'objet de la partie III du chapitre.

2 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

2.1 Définition

Définition

Soit $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $P(A) = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$: $P(u) = a_d u^d + \cdots + a_1 u + a_0 \text{Id}$, où $u^k = u \circ \cdots \circ u$ (k fois). C'est un endomorphisme de E : on peut l'appliquer à un vecteur x , ce qu'on note $P(u)(x)$.

Attention

Le coefficient constant a_0 devient $a_0 I_n$ (ou $a_0 \text{Id}$), et **pas** a_0 tout seul : on n'ajoute pas un nombre à une matrice. De même, u^2 est $u \circ u$, et non le carré des coordonnées.

Exercice 4 – ★ calculs de base.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $P(A)$ pour $P = 2X + 3$, puis pour $P = X^2 - 5X - 2$. Que remarque-t-on ?
2. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & P(\lambda_3) \end{pmatrix}$. En déduire, sans calcul, $P(D)$ pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 3X + 2$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $u(x, y) = (2x - y, x)$. Calculer $u^2(x, y)$, puis $P(u)(x, y)$ pour $P = X^2 - 1$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $d \in \mathcal{L}(E)$ la dérivation : $d(Q) = Q'$. Soit $P = X^2 - X$. Exprimer $P(d)(Q)$ pour $Q \in E$, puis calculer $P(d)(X^3)$. Que vaut d^4 ?

Exercice 5 – ★ vrai ou faux.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Justifier ou donner un contre-exemple.

1. $(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$.
2. $P(u + v) = P(u) + P(v)$. (*Essayer $P = X^2$.*)
3. $(u + v)^2 = u^2 + 2u \circ v + v^2$. (*Développer $(u + v) \circ (u + v)$ avec soin. Avec quelle hypothèse est-ce vrai ?*)
4. Si $P(u) = 0$, alors $u = 0$ ou $P = 0$.

2.2 Produit de polynômes, lien avec les matrices**Propositions (admisses, cours 7.9, 7.10 et 7.11)**

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. En particulier, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$: deux polynômes en u **commutent**, et u commute avec tout polynôme en u .
- $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u .
- Si E est de dimension finie, de base $\mathcal{B}$, et si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$.

Tout cela vaut aussi pour les matrices : $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$, etc.

Exercice 6 – ★ vérifier sur des exemples.

1. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = X - 1$ et $Q = X + 2$: calculer $P(A)Q(A)$, $Q(A)P(A)$ et $(PQ)(A)$.
2. Avec u de l'exercice 4, question 3 : écrire la matrice A de u dans la base canonique, calculer $A^2 - I_2$ et vérifier qu'on retrouve la matrice de $(u^2 - \text{Id})$ obtenue à l'exercice 4.
3. *Retour à l'exercice 3.* Calculer $B^2 + I_3$ et déterminer $\text{Ker}(B^2 + I_3)$. Reconnaître ce sous-espace. Pourquoi savait-on à l'avance qu'il serait stable par B ? Même question pour $\text{Ker}(B - I_3)$.

Exercice 7 – ★★ polynômes en A et commutant.

On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) : P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des polynômes en A , et $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AM = MA\}$ le *commutant* de A . D'après les propositions ci-dessus, $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui commutent avec A .
Montrer que chacune s'écrit $\alpha I_2 + \beta A$. Conclure que $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$.
2. Déterminer $\mathbb{K}[I_2]$ et $\mathcal{C}(I_2)$. L'inclusion $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$ est-elle toujours une égalité ?

2.3 Polynômes annulateurs

Définition et existence (cours 7.12 et 7.18)

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $P(A) = 0_n$).

Le polynôme nul annule tout. Plus intéressant : en dimension finie n , tout endomorphisme (toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet un polynôme annulateur **non nul**, de degré au plus n^2 . On verra plus tard qu'il en existe même un de degré au plus n (théorème de Cayley-Hamilton).

Exercice 8 – ★ trouver un polynôme annulateur.

1. *Pour commencer : vérifier.* Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = (X - 2)(X - 3)$.
 - (a) Développer P , puis calculer $P(A)$.
 - (b) Calculer $A - 2I_2$, $A - 3I_2$, puis le produit $(A - 2I_2)(A - 3I_2)$. Quelle proposition permet d'affirmer que ce produit est égal à $P(A)$?
 - (c) Conclure : P est un polynôme annulateur de A .

Dans les questions suivantes, trouver un polynôme annulateur non nul, de degré le plus petit possible.

2. *Projecteurs et symétries.*
 - (a) Soit p un projecteur de E . Rappeler la définition : que vaut $p^2 = p \circ p$? En déduire un polynôme non nul de degré 2 qui annule p .
 - (b) Soit s une symétrie de E . Que vaut $s^2 = s \circ s$? En déduire un polynôme non nul de degré 2 qui annule s .
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; puis la matrice A de l'exercice 1. (*Penser à l'interprétation géométrique.*)
4. $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$.
5. $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. (*Calculer J^2 .*)
6. La matrice B de l'exercice 3. On donnera d'abord un annulateur de degré 4, puis on vérifiera que $(X - 1)(X^2 + 1)$ annule B (*on pourra le vérifier sur R , puis justifier que cela suffit*).

Exercice 9 – ★ le cas de la taille 2 : à connaître.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0_2.$$

Autrement dit, le polynôme $X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$ annule A . Retrouver ainsi le résultat de l'exercice 4, question 1.

2.4 Application 1 : calculer les puissances

Méthode (cours 7.19) : calculer A^k avec un polynôme annulateur

1. Trouver un polynôme annulateur non nul P , de degré d le plus petit possible.
2. Écrire la division euclidienne $X^k = Q_k P + R_k$ avec $\deg R_k \leq d - 1$. On ne calcule pas Q_k : on trouve les coefficients de R_k en évaluant en les racines de P (si $P(\lambda) = 0$, alors $R_k(\lambda) = \lambda^k$). Si λ est racine double, on dérive l'égalité avant d'évaluer en λ .
3. Conclure : $A^k = Q_k(A)P(A) + R_k(A) = R_k(A)$, qui ne fait intervenir que $I_n, A, \dots, A^{d-1}$.

Exemple détaillé. On reprend $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ de l'exercice 8, question 1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Étape 1 : un polynôme annulateur. On a vu que $P = (X - 2)(X - 3)$ annule A . Il est de degré $d = 2$ et ses racines sont 2 et 3.

Étape 2 : le reste de la division euclidienne. Comme $P \neq 0$, la division euclidienne de X^k par P donne $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et un reste de degré au plus 1, que l'on note $a_k X + b_k$:

$$X^k = Q_k (X - 2)(X - 3) + a_k X + b_k.$$

On ne cherche pas Q_k . On évalue cette égalité de polynômes en 2, puis en 3 : le terme $Q_k(X-2)(X-3)$ s'annule, et il reste

$$\begin{cases} 2a_k + b_k = 2^k \\ 3a_k + b_k = 3^k \end{cases} \quad \text{d'où} \quad a_k = 3^k - 2^k \quad \text{et} \quad b_k = 2^k - 2a_k = 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k.$$

Étape 3 : conclusion. On applique l'égalité $X^k = Q_k P + a_k X + b_k$ à A :

$$A^k = Q_k(A) \underbrace{P(A)}_{=0_2} + a_k A + b_k I_2 = a_k A + b_k I_2 = \begin{pmatrix} 2a_k + b_k & a_k \\ 0 & 3a_k + b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

Vérification. Pour $k = 1$, on retrouve A . Pour $k = 2$, on trouve $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, qui est bien A^2 (le faire!). Pour $k = 0$, on retrouve I_2 .

Exercice 10 – guidé, pour tous.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (exercice 2) et $k \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide de l'exercice 9, trouver un polynôme annulateur P de degré 2, et le factoriser.
2. Justifier l'existence de $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et de $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tels que $X^k = Q_k P + a_k X + b_k$.
3. En évaluant en les deux racines de P , calculer a_k et b_k .
4. En déduire A^k , et comparer avec l'exercice 2. Quelle méthode préférez-vous ?

Exercice 11 – ★ en autonomie.

Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. (Réponse à vérifier pour $k = 1$: $A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 1 & 1 - 2^k \\ 2^{k+1} - 2 & 2 - 2^k \end{pmatrix}$.)
2. ★★ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (Le polynôme annulateur a une racine double : dériver l'égalité $X^k = Q_k P + a_k X + b_k$.)

2.5 Application 2 : inverser

Méthode (cours 7.24) : inverser avec un polynôme annulateur

1. Trouver un polynôme annulateur $P = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_0 = P(0) \neq 0$.
2. Isoler le terme constant et factoriser par A : $A(a_d A^{d-1} + \dots + a_1 I_n) = -a_0 I_n$.
3. Conclure : A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_d A^{d-1} + \dots + a_1 I_n)$. (Pour un endomorphisme, il faut vérifier les deux compositions $u \circ v$ et $v \circ u$: elles sont égales car ce sont des polynômes en u . Pour une matrice carrée, une seule suffit.)

Exemple détaillé. On reprend encore $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, annulée par $P = (X - 2)(X - 3)$.

Étape 1 : un polynôme annulateur avec $P(0) \neq 0$. En développant, $P = X^2 - 5X + 6$. Son coefficient constant est $P(0) = 6 \neq 0$: la méthode s'applique.

Étape 2 : isoler le terme constant et factoriser par A . L'égalité $P(A) = 0_2$ s'écrit

$$A^2 - 5A + 6I_2 = 0_2, \quad \text{soit} \quad A^2 - 5A = -6I_2, \quad \text{soit} \quad A(A - 5I_2) = -6I_2.$$

Étape 3 : conclusion. En divisant par -6 :

$$A \cdot \frac{1}{6}(5I_2 - A) = I_2.$$

Comme A est une matrice carrée, un seul produit suffit : A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(5I_2 - A) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérification. Calculer le produit $A \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et vérifier qu'on trouve $6I_2$. On peut aussi comparer avec la formule de l'inverse d'une matrice de taille 2 vue en première année.

Remarque. Dans la formule $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent, remplacer k par -1 donne $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire exactement A^{-1} . Ce n'est pas un hasard, mais attention : la formule n'a été démontrée que pour $k \in \mathbb{N}$. Pour l'utiliser avec $k = -1$, il faudrait d'abord la justifier (par exemple en vérifiant que le produit avec A donne I_2).

Exercice 12 – ★ application directe.

- Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1} comme polynôme en A .
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I_3$ (avec J de l'exercice 8).
 - À l'aide de $J^2 = 3J$, montrer que $A^2 - A - 2I_3 = 0_3$.
 - En déduire que A est inversible et donner A^{-1} explicitement.
 - Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (méthode précédente).
- Pourquoi la méthode ne s'applique-t-elle pas à J (annulée par $X^2 - nX$) ? J est-elle inversible ?

2.6 Une conséquence : tout polynôme en u est de petit degré

Proposition (admise, cours 7.23)

Si P est un polynôme annulateur de u de degré $d \geq 1$, alors tout polynôme en u s'écrit comme un polynôme de degré au plus $d - 1$ en u :

$$\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{d-1}).$$

Exercice 13 – ★ illustration.

- Soit s une symétrie de E . Montrer que tout polynôme en s s'écrit $\alpha \text{Id} + \beta s$. Écrire ainsi $s^5 - 3s^2 + s$.
- Avec la matrice B de l'exercice 3 et le polynôme annulateur $(X - 1)(X^2 + 1)$, écrire B^4 comme combinaison linéaire de I_3 , B , B^2 . Était-ce cohérent avec $B^4 = I_3$?

3 Exercices d'application

Exercice 14 – ★ suites récurrentes couplées.

On définit deux suites par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} = u_k + 2v_k, \quad v_{k+1} = 2u_k + v_k.$$

On pose $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{k+1} = AX_k$, en déduire $X_k = A^k X_0$, puis exprimer u_k et v_k en fonction de k . Déterminer un équivalent de u_k quand $k \rightarrow +\infty$.

Exercice 15 – ★ la matrice $I_n + J$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $A = I_n + J$.

1. Montrer que $J^k = n^{k-1}J$ pour tout $k \geq 1$.
2. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de I_n et J .
3. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ de deux façons : par la formule du binôme (pourquoi s'applique-t-elle?), puis par la méthode du polynôme annulateur.

Exercice 16 – ★★ différences finies sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\Delta : E \rightarrow E$ défini par $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E . Calculer $\Delta(1)$, $\Delta(X)$, $\Delta(X^2)$.
2. Montrer que si $\deg Q \geq 1$, alors $\deg \Delta(Q) = \deg Q - 1$. En déduire que $\Delta^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Quel polynôme annulateur obtient-on ?
3. Soit $\tau = \text{Id} + \Delta$, de sorte que $\tau(Q) = Q(X+1)$. Calculer $(\text{Id} + \Delta) \circ \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta^k$.
4. En déduire que τ est inversible et que $\tau^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta^k$. Que vaut $\tau^{-1}(Q)$? Vérifier la formule pour $n = 2$ et $Q = X^2$.

Exercice 17 – ★★ un annulateur scindé à racines simples.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2\text{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que u est inversible et exprimer u^{-1} en fonction de u et Id .
2. On pose $F = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $G = \text{Ker}(u - 2\text{Id})$. Justifier que F et G sont stables par u .
3. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
4. Soit $x \in E$. On pose $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. Montrer que $y \in F$, $z \in G$ et $x = y + z$. (Utiliser la factorisation du polynôme annulateur.)
5. En déduire que $E = F \oplus G$. On suppose E de dimension finie : que peut-on dire de la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition ? Faire le lien avec la partie 1.

Exercice 18 – ★★★ l'inverse est toujours un polynôme.

Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ inversible. On veut montrer que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

1. Justifier l'existence d'un polynôme annulateur non nul P de u .
2. Montrer qu'on peut écrire $P = X^m S$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $S(0) \neq 0$.
3. En utilisant l'inversibilité de u , montrer que $S(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Conclure : u^{-1} est un polynôme en u .
5. *Réciproque.* Montrer que u est inversible si et seulement si u admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$.

Exercice 19 – ★★★ commutant d'une matrice diagonale.

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Calculer les coefficients de DM et de MD . En déduire que M commute avec D si et seulement si M est diagonale.
2. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(1) = \alpha$, $P(2) = \beta$, $P(3) = \gamma$.
(*Polynômes d'interpolation de Lagrange.*)
3. En déduire que $\mathcal{C}(D) = \mathbb{K}[D]$, et donner la dimension de cet espace.
4. Le résultat reste-t-il vrai pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$? Où le raisonnement échoue-t-il?