

DM 3 – SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

À rendre le 03/11/2026

Exercice 1 – E3A 2017 (Maths 1)

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ .
- Soit $a \in]1; +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1; +\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

(b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1; +\infty[$ sous forme d'une série.

- Préciser le sens de variation de ζ .
- On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
(a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.
(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x \geq 2, \quad 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.

- On considère à présent $h \in]0, +\infty[$.

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.

- Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ .
- On pose :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

- Justifier que F est bien définie.
- Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x} \zeta(x).$$

- Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.