

DM 2 – COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

À rendre le 13/10/2026

Exercice 1 – CCINP PSI 2021 (Problème 2)

Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $GL_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour les 5/2 : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\text{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes.

Pour les 3/2 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet que la fonction $x \mapsto \det(xI_n - M)$, définie sur $\mathbb{C}$, est polynomiale : c'est la fonction associée à un polynôme $\chi_M \in \mathbb{C}[X]$, unitaire de degré n , appelé polynôme caractéristique de M . On note $\text{Sp}(M)$ l'ensemble des racines complexes de χ_M .

On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à trois cas particuliers.

On montre d'abord que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C , où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C , c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C .

On montre ensuite que $\det(I_n + C^2) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices symétriques réelles C .

On considère enfin le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}^+$.

La **Partie II** est consacrée au cas général.

On montre que pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$.

Partie I — Trois cas particuliers

1. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. Démontrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}$ et que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

2. **Pour les 5/2 :** On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que :

$$\det(I_n + C^2) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Pour les 3/2 : On admet que pour toute matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$. Démontrer le même résultat.

3. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
4. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dédire de la question précédente que, dans ce cas, on a :

$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$

En déduire que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}^+$ et que $\det(I_n + C^2) = 0$ si et seulement si $i \in \text{Sp}(C)$.

Pour les 3/2 : On pourra commencer par montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\lambda \in \text{Sp}(M)$ si et seulement si la matrice $\lambda I_n - M$ n'est pas inversible.

Partie II — Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on démontre que $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}^+$. Seule la **Q3** de la partie I sera utile pour la suite.

5. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\bar{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :

$$\det(I_n + C\bar{C}) = \det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix}.$$

On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix}$.

6. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1) .
7. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.
8. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour les 3/2 : On pourra montrer que $\chi_{C_0}(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel x .

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.

On considère l'application $\Omega : \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}), \quad \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix}.$$

9. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :

- a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0 \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \Omega \left(C_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$;
- b) $\Omega \circ \Omega = -\text{id}_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;
- c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Omega \left(\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \bar{\lambda} \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$.

10. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.

Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ est libre et que le plan $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ est stable par Ω .

11. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.

Montrer que :

$$E \cap \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$:

$$F_\lambda = \text{Ker}((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}).$$

On admet, pour traiter la **Q14**, que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

- 12. Montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\bar{\lambda}}$.
- 13. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.
- 14. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbb{R}^+$.

DM 2 – COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE – CORRECTION

Exercice 1 – CCINP PSI 2021 (Problème 2)

Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$

Partie I — Trois cas particuliers

1. Notons $c_1, \dots, c_n$ les coefficients diagonaux de C . Alors $\overline{C}$ est diagonale de coefficients $\overline{c_1}, \dots, \overline{c_n}$, et un produit de matrices diagonales se calcule coefficient par coefficient :

$$I_n + C\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 + |c_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + |c_n|^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux, donc :

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \prod_{k=1}^n (1 + |c_k|^2).$$

C'est un produit de réels tous supérieurs ou égaux à 1, donc :

$$\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R} \text{ et } \det(I_n + C\overline{C}) \geq 1.}$$

Si $C = 0$, le déterminant vaut 1. Réciproquement, s'il existe k tel que $c_k \neq 0$, alors $1 + |c_k|^2 > 1$, et les autres facteurs étant supérieurs ou égaux à 1, le produit est strictement supérieur à 1. Ainsi $\boxed{\text{il y a égalité si et seulement si } C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}.}$

2. D'après le théorème spectral (résultat admis par l'énoncé pour les 3/2), la matrice C , symétrique réelle, s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale. Alors $C^2 = PD^2P^{-1}$ et $I_n = PI_nP^{-1}$, donc :

$$I_n + C^2 = P(I_n + D^2)P^{-1}, \quad \text{puis} \quad \det(I_n + C^2) = \det(I_n + D^2).$$

Comme D est réelle, $\overline{D} = D$ et $D^2 = D\overline{D}$. La question 1, appliquée à la matrice diagonale D , donne $\det(I_n + D\overline{D}) \geq 1$. Donc $\boxed{\det(I_n + C^2) \geq 1.}$

Il y a égalité si et seulement si $D = 0$, toujours d'après la question 1. Or $D = 0$ équivaut à $C = PDP^{-1} = 0$ (car $D = P^{-1}CP$). Ainsi $\boxed{\text{il y a égalité si et seulement si } C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ ».

Initialisation. Si $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, alors $\det(\overline{A}) = \overline{a} = \overline{\det(A)}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, notons $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la première colonne de A . La même suppression dans $\overline{A}$ donne $\overline{A_i}$. En développant par rapport à la première colonne :

$$\det(\overline{A}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \overline{a_{i,1}} \det(\overline{A_i}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \overline{a_{i,1}} \overline{\det(A_i)} = \overline{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_i)} = \overline{\det(A)},$$

où l'on a utilisé $\mathcal{P}(n)$, puis le fait que la conjugaison est compatible avec la somme et le produit. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}.$

4. Comme $CI_n = I_n C$, on développe :

$$(C - iI_n)(C + iI_n) = C^2 + iC - iC - i^2 I_n = I_n + C^2.$$

La matrice C étant réelle, $\overline{C - iI_n} = C + iI_n$, et la question 3 donne $\det(C + iI_n) = \overline{\det(C - iI_n)}$. Par multiplicativité du déterminant :

$$\det(I_n + C^2) = \det(C - iI_n) \overline{\det(C - iI_n)} = |\det(C - iI_n)|^2.$$

C'est le carré du module d'un complexe, donc $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}^+$.

Enfin, $\det(I_n + C^2) = 0$ si et seulement si $\det(C - iI_n) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $C - iI_n$ n'est pas inversible, ou encore si et seulement si $iI_n - C$ n'est pas inversible. Donc

$$\det(I_n + C^2) = 0 \text{ si et seulement si } i \in \text{Sp}(C).$$

Pour les 3/2 : La dernière équivalence repose sur l'indication. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Par définition, $\lambda \in \text{Sp}(M)$ si et seulement si $\chi_M(\lambda) = 0$, c'est-à-dire $\det(\lambda I_n - M) = 0$. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, donc $\lambda \in \text{Sp}(M)$ si et seulement si $\lambda I_n - M$ n'est pas inversible.

Partie II — Le cas général

5. Le produit par blocs donne :

$$\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + C\overline{C} & -C \\ \overline{C} - \overline{C} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + C\overline{C} & -C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure, de coefficients diagonaux tous égaux à 1 : son déterminant vaut 1. La matrice de droite est triangulaire par blocs : son déterminant vaut $\det(I_n + C\overline{C}) \det(I_n) = \det(I_n + C\overline{C})$. Par multiplicativité du déterminant :

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}.$$

6. On a $\varphi(e_1) = re_1 + te_2$ et $\varphi(e_2) = se_1 + ue_2$. Dans la base (e_2, e_1) , la première colonne contient les coordonnées de $\varphi(e_2) = ue_2 + se_1$, la seconde celles de $\varphi(e_1) = te_2 + re_1$:

$$\text{Mat}_{(e_2, e_1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} u & t \\ s & r \end{pmatrix}.$$

7. Notons $M = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$. Comme à la question précédente, on échange les deux blocs de vecteurs de la base canonique $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$: on place $\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{2n}$ avant $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. La matrice de passage à cette nouvelle base est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Par blocs, $P^2 = I_{2n}$, donc P est inversible et $P^{-1} = P$. Puis :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & U \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}.$$

Donc M est semblable à $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$.

De même, avec la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_{n+1}, \dots, -\varepsilon_{2n})$, de matrice de passage $Q = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$, qui vérifie $Q^2 = I_{2n}$:

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & S \\ -T & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}.$$

Donc M est semblable à $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.

8. D'après la première partie de la question 7, C_0 est semblable à $\begin{pmatrix} I_n & \overline{C} \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, qui, d'après la seconde partie, est semblable à $\begin{pmatrix} I_n & -\overline{C} \\ C & I_n \end{pmatrix} = \overline{C_0}$. Par transitivité, C_0 et $\overline{C_0}$ sont semblables : il existe $P \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $\overline{C_0} = P^{-1}C_0P$. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $xI_{2n} - \overline{C_0} = P^{-1}(xI_{2n} - C_0)P$, donc $\det(xI_{2n} - \overline{C_0}) = \det(xI_{2n} - C_0)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme x est réel, $\overline{xI_{2n} - C_0} = xI_{2n} - \overline{C_0}$, et la question 3 (en taille $2n$) donne :

$$\chi_{C_0}(x) = \det(xI_{2n} - C_0) = \det(xI_{2n} - \overline{C_0}) = \overline{\det(xI_{2n} - C_0)} = \overline{\chi_{C_0}(x)}.$$

Donc $\chi_{C_0}(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel x . Écrivons $\chi_{C_0} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Le polynôme $\sum_{k=0}^{2n} \operatorname{Im}(a_k) X^k$ s'annule en tout réel x : il a une infinité de racines, il est donc nul. Ainsi χ_{C_0} est à coefficients réels.

9. On utilise que la conjugaison est compatible avec les sommes et les produits de matrices : $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{A} + \overline{B}$ et $\overline{\overline{A}B} = \overline{A}\overline{B}$.

a) D'une part, $C_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - CY \\ \overline{C}X + Y \end{pmatrix}$, donc :

$$\Omega \left(C_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\overline{\overline{C}X + Y} \\ \overline{X - CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\overline{X} - \overline{Y} \\ \overline{X} - \overline{C}\overline{Y} \end{pmatrix}.$$

D'autre part :

$$C_0 \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{Y} - C\overline{X} \\ -\overline{C}\overline{Y} + \overline{X} \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs coïncident : $C_0 \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \Omega \left(C_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$.

b) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$:

$$\Omega \left(\Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right) = \Omega \left(\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\overline{\overline{X}} \\ -\overline{\overline{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix}.$$

Donc $\Omega \circ \Omega = -\operatorname{id}_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\Omega \left(\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\overline{\lambda Y} \\ \overline{\lambda X} \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right).$$

On note aussi, directement sur la définition, que $\Omega(V + W) = \Omega(V) + \Omega(W)$ pour tous $V, W \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. Avec c), on en déduit $\Omega(aV + bW) = \overline{a}\Omega(V) + \overline{b}\Omega(W)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$; en particulier $\Omega(0) = 0$.

10. Notons $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $aV + b\Omega(V) = 0$.

Supposons $b \neq 0$. Alors $\Omega(V) = \mu V$ avec $\mu = -\frac{a}{b}$. En appliquant Ω et en utilisant les points b) et c) de la question 9 :

$$-V = \Omega(\Omega(V)) = \Omega(\mu V) = \bar{\mu} \Omega(V) = \bar{\mu} \mu V = |\mu|^2 V,$$

donc $(1 + |\mu|^2)V = 0$, puis $V = 0$, ce qui est exclu. Donc $b = 0$, puis $aV = 0$ et $a = 0$ car $V \neq 0$.

Ainsi la famille $(V, \Omega(V))$ est libre.

Soit $W = aV + b\Omega(V)$ un élément de $\text{Vect}(V, \Omega(V))$. D'après la question 9 :

$$\Omega(W) = \bar{a} \Omega(V) + \bar{b} \Omega(\Omega(V)) = -\bar{b} V + \bar{a} \Omega(V) \in \text{Vect}(V, \Omega(V)).$$

Donc le plan $\text{Vect}(V, \Omega(V))$ est stable par Ω .

11. Notons $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et soit $W \in E \cap \text{Vect}(V, \Omega(V))$: il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $W = aV + b\Omega(V)$.

Comme à la question précédente, $\Omega(W) = -\bar{b} V + \bar{a} \Omega(V)$, et $\Omega(W) \in E$ car E est stable par Ω . On élimine $\Omega(V)$:

$$\bar{a} W - b \Omega(W) = (|a|^2 V + \bar{a} b \Omega(V)) - (-|b|^2 V + \bar{a} b \Omega(V)) = (|a|^2 + |b|^2) V.$$

Le membre de gauche appartient au sous-espace vectoriel E . Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $|a|^2 + |b|^2 > 0$ et $V \in E$, ce qui est exclu. Donc $a = b = 0$, puis $W = 0$:

$$\boxed{E \cap \text{Vect}(V, \Omega(V)) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

12. Soit $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$. On note $\alpha = \alpha_\lambda$.

Les multiplicités de λ et $\bar{\lambda}$ sont égales. Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $\bar{P} = \sum_{k=0}^d \bar{a}_k X^k$.

La conjugaison est compatible avec la somme et le produit des complexes, donc $\overline{PQ} = \bar{P} \bar{Q}$ pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, et $\bar{P}(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Comme λ est racine de χ_{C_0} de multiplicité α , il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\chi_{C_0} = (X - \lambda)^\alpha Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$. D'après la question 8, χ_{C_0} est à coefficients réels, donc $\overline{\chi_{C_0}} = \chi_{C_0}$, et en conjuguant :

$$\chi_{C_0} = (X - \bar{\lambda})^\alpha \bar{Q}, \quad \text{avec} \quad \bar{Q}(\bar{\lambda}) = \overline{Q(\lambda)} \neq 0.$$

Ainsi $\bar{\lambda}$ est racine de χ_{C_0} de multiplicité α : $\bar{\lambda} \in \text{Sp}(C_0)$ et $\alpha_{\bar{\lambda}} = \alpha$. En particulier $F_{\bar{\lambda}} = \text{Ker}((\bar{\lambda} I_{2n} - C_0)^\alpha)$.

Commutation. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, pour tout $V \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$:

$$\Omega((\lambda I_{2n} - C_0)^k V) = (\bar{\lambda} I_{2n} - C_0)^k \Omega(V).$$

Pour $k = 0$, les deux membres valent $\Omega(V)$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang k . Soit $V \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et $W = (\lambda I_{2n} - C_0)^k V$. D'après la question 9 (points a) et c)) et l'additivité de Ω :

$$\Omega((\lambda I_{2n} - C_0)W) = \Omega(\lambda W) - \Omega(C_0 W) = \bar{\lambda} \Omega(W) - C_0 \Omega(W) = (\bar{\lambda} I_{2n} - C_0) \Omega(W).$$

Avec l'hypothèse de récurrence, $\Omega(W) = (\bar{\lambda} I_{2n} - C_0)^k \Omega(V)$, d'où $\Omega((\lambda I_{2n} - C_0)^{k+1} V) = (\bar{\lambda} I_{2n} - C_0)^{k+1} \Omega(V)$, ce qui est la propriété au rang $k + 1$.

Inclusion. Si $V \in F_\lambda$, alors $(\bar{\lambda} I_{2n} - C_0)^\alpha \Omega(V) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)^\alpha V) = \Omega(0) = 0$, donc $\Omega(V) \in F_{\bar{\lambda}}$. Ainsi $\Omega(F_\lambda) \subset F_{\bar{\lambda}}$, et de même, en échangeant les rôles de λ et $\bar{\lambda}$, $\Omega(F_{\bar{\lambda}}) \subset F_\lambda$.

Égalité. Soit $W \in F_{\bar{\lambda}}$. Le vecteur $-W$ est aussi dans $F_{\bar{\lambda}}$, donc $\Omega(-W) \in F_\lambda$, et d'après la question 9, $\Omega(\Omega(-W)) = W$. Ainsi $W \in \Omega(F_\lambda)$, et $\Omega(F_\lambda) = F_{\bar{\lambda}}$.

13. Soit $\lambda \in \text{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$. D'après la question 12, $\Omega(F_\lambda) = F_\lambda$: le sous-espace F_λ est stable par Ω .

On construit des sous-espaces $E_0 \subset E_1 \subset \dots$ de F_λ , stables par Ω , avec $\dim E_k = 2k$. On pose $E_0 = \{0\}$, qui convient. Supposons E_k construit. Si $E_k = F_\lambda$, on s'arrête. Sinon, on choisit $V \in F_\lambda \setminus E_k$ et on pose $E_{k+1} = E_k + \text{Vect}(V, \Omega(V))$.

- $V \in F_\lambda$ et $\Omega(V) \in F_\lambda$, donc $E_{k+1} \subset F_\lambda$.
- E_k et $\text{Vect}(V, \Omega(V))$ sont stables par Ω (question 10, avec $V \neq 0$ puisque $V \notin E_k$), et Ω est additive, donc E_{k+1} est stable par Ω .
- D'après la question 11, la somme $E_k + \text{Vect}(V, \Omega(V))$ est directe, et d'après la question 10, le second terme est un plan. Donc $\dim E_{k+1} = 2k + 2$.

Les dimensions des E_k croissent strictement et sont majorées par $\dim F_\lambda$: la construction s'arrête, sur un $E_k = F_\lambda$. Donc $\boxed{\dim F_\lambda = 2k \text{ est paire.}}$

14. On a $\chi_{C_0}(0) = \det(-C_0) = (-1)^{2n} \det(C_0) = \det(C_0)$. D'autre part, χ_{C_0} est de degré $2n$, donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(C_0)} \alpha_\lambda = 2n$, et :

$$\det(C_0) = \chi_{C_0}(0) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(C_0)} (-\lambda)^{\alpha_\lambda} = (-1)^{2n} \prod_{\lambda \in \text{Sp}(C_0)} \lambda^{\alpha_\lambda} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(C_0)} \lambda^{\alpha_\lambda}.$$

On regroupe les facteurs de ce produit :

- les éléments non réels de $\text{Sp}(C_0)$ vont par paires $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$, avec $\alpha_{\bar{\lambda}} = \alpha_\lambda$ (question 12), et chaque paire contribue par $\lambda^{\alpha_\lambda} \bar{\lambda}^{\alpha_\lambda} = |\lambda|^{2\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$;
- pour un élément réel λ de $\text{Sp}(C_0)$, on a $\alpha_\lambda = \dim F_\lambda$ (résultat admis), qui est pair d'après la question 13 : $\lambda^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$.

Un produit de réels positifs est un réel positif, donc $\det(C_0) \in \mathbb{R}^+$. Avec la question 5 :

$$\boxed{\det(I_n + C\bar{C}) = \det(C_0) \in \mathbb{R}^+}.$$