DM 3 – Suites et séries de fonctions

À rendre le 03/11/2026

Exercice 1 – E3A 2017 (Maths 1)

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1;+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Soit $a \in]1;+\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;+\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$
   (b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;+\infty[$ sous forme d'une série.
4. Préciser le sens de variation de ζ.
5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
   (a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
   $$\forall x \geqslant 2, \quad 1 \leqslant \zeta(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
   (c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.
6. On considère à présent $h \in]0,+\infty[$.
   À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.
8. On pose :
   $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$
   (a) Justifier que F est bien définie.
   (b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que :
   $$\forall x \in]1;+\infty[, \quad \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x).$$
   (d) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

DM 3 – Suites et séries de fonctions – Correction

Exercice 1 – E3A 2017 (Maths 1)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann : elle converge si et seulement si $x > 1$.
   Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } \zeta \text{ est }]1;+\infty[.}$

2. Soit $a \in]1;+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto n^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(n)}$ est continue sur $[a;+\infty[$. Comme $\ln(n) \geqslant 0$, elle y est décroissante et positive, donc :
   $$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} = \sup_{x\geqslant a} \frac{1}{n^x} = f_n(a) = \frac{1}{n^a}.$$
   La série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge puisque $a > 1$: la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a;+\infty[$. D'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, $\boxed{\zeta \text{ est continue sur } [a;+\infty[.}$
   Soit $x_0 \in]1;+\infty[$. En posant $a = \dfrac{1+x_0}{2}$, on a $1 < a < x_0$, donc x_0 est intérieur à $[a;+\infty[$, intervalle sur lequel ζ est continue : ζ est continue en x_0. Ceci valant pour tout $x_0 > 1$, $\boxed{\zeta \text{ est continue sur }]1;+\infty[.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\ln(n)}$, donc f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(k)$: « pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = (-\ln(n))^k \mathrm{e}^{-x\ln(n)}$ ».
   Initialisation. Pour tout $x > 1$, $f_n'(x) = -\ln(n)\,\mathrm{e}^{-x\ln(n)}$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. Alors $f_n^{(k)} : x \mapsto (-\ln(n))^k \mathrm{e}^{-x\ln(n)}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout $x > 1$:
   $$f_n^{(k+1)}(x) = (-\ln(n))^k \cdot (-\ln(n))\,\mathrm{e}^{-x\ln(n)} = (-\ln(n))^{k+1}\mathrm{e}^{-x\ln(n)},$$
   ce qui est $\mathcal{P}(k+1)$.
   Par récurrence, et puisque $\mathrm{e}^{-x\ln(n)} = \dfrac{1}{n^x}$:
   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;+\infty[,\quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.}$$
   (b) Soit $a > 1$ et $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant a$, d'après la question 3a (ou directement si $j = 0$) :
   $$\left|f_n^{(j)}(x)\right| = \frac{(\ln(n))^j}{n^x} \leqslant \frac{(\ln(n))^j}{n^a}.$$
   Posons $c = \dfrac{1+a}{2}$, de sorte que $1 < c < a$. Par croissances comparées, comme $a - c > 0$:
   $$n^c \cdot \frac{(\ln(n))^j}{n^a} = \frac{(\ln(n))^j}{n^{a-c}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \text{donc} \quad \frac{(\ln(n))^j}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right).$$
   La série $\sum \dfrac{1}{n^c}$ converge ($c > 1$), donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{(\ln(n))^j}{n^a}$ converge. Ainsi la série $\sum f_n^{(j)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a;+\infty[$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a;+\infty[$, les séries $\sum f_n^{(j)}$ pour $j \in [\![0, k-1]\!]$ y convergent (simplement) et la série $\sum f_n^{(k)}$ y converge uniformément. D'après le théorème de régularité $\mathcal{C}^k$ de la somme d'une série de fonctions, ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a;+\infty[$ et :

$$\forall x \geqslant a, \quad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Comme à la question 2, tout $x_0 > 1$ est intérieur à un intervalle $[a;+\infty[$ avec $a > 1$: ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]1;+\infty[$, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\boxed{\zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]1;+\infty[}$ et :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;+\infty[, \quad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x} = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^k}{n^x}.}$$

4. D'après la question 3b avec $k = 1$, pour tout $x > 1$:

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \leqslant -\frac{\ln(2)}{2^x} < 0,$$

puisque tous les termes de la série sont positifs et que celui d'indice 2 est strictement positif. Ainsi $\boxed{\zeta \text{ est strictement décroissante sur }]1;+\infty[.}$

5. (a) Pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant 1$: la fonction ζ est minorée par 1. Elle est décroissante sur $]1;+\infty[$ d'après la question 4. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\zeta \text{ admet une limite finie } \ell \text{ en } +\infty,}$ avec $\ell \geqslant 1$.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 2$. On a déjà vu que $\zeta(x) \geqslant 1$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^x \geqslant n^2$ car $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 2$, donc $\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Les séries $\sum \frac{1}{n^x}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent, donc leurs restes aussi et, en sommant l'inégalité pour $n \geqslant N+1$:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall x \geqslant 2, \quad 1 \leqslant \zeta(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.}$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Le reste $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ d'une série convergente tend vers 0 quand $N \to +\infty$: fixons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que ce reste soit inférieur ou égal à ε. Alors, d'après la question 5b :

$$\forall x \geqslant 2, \quad 1 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} + \varepsilon.$$

   Pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-x\ln(n)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $\ln(n) > 0$, donc la somme finie $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$. En passant à la limite quand $x \to +\infty$ dans l'encadrement, ce qui est licite d'après la question 5a : $1 \leqslant \ell \leqslant 1 + \varepsilon$.

   Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\ell = 1$: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1.}$

6. Soit $h > 0$. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t^{1+h}}$ est continue, positive et décroissante sur $[1;+\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $g(k+1) \leqslant g(t) \leqslant g(k)$, et en intégrant sur ce segment de longueur 1 :

$$\frac{1}{(k+1)^{1+h}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+h}} \leqslant \frac{1}{k^{1+h}}.$$

Soit $N \geqslant 2$. En sommant l'inégalité de droite pour k de 1 à $N-1$ et celle de gauche pour k de 1 à N, la relation de Chasles donne :

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+h}} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{1+h}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^{1+h}} \leqslant \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+h}}.$$

Or, pour $1 \leqslant A < B$, $\displaystyle\int_A^B \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+h}} = \left[-\frac{1}{h\,t^h}\right]_A^B = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{A^h} - \frac{1}{B^h}\right)$. D'où :

$$\frac{1}{h}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^h}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{1+h}} \leqslant 1 + \frac{1}{h}\left(1 - \frac{1}{N^h}\right).$$

Comme $h > 0$, $\dfrac{1}{N^h} \to 0$ et $\dfrac{1}{(N+1)^h} \to 0$ quand $N \to +\infty$, et la somme partielle tend vers $\zeta(1+h)$ puisque $1+h > 1$. Par passage à la limite dans les inégalités :

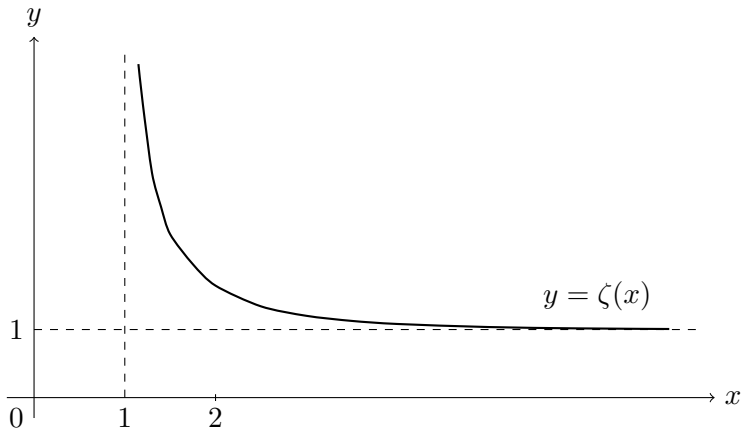
$$\boxed{\forall h > 0, \quad \frac{1}{h} \leqslant \zeta(1+h) \leqslant 1 + \frac{1}{h}.}$$

En multipliant par $h > 0$: $1 \leqslant h\,\zeta(1+h) \leqslant 1+h$, et par encadrement $h\,\zeta(1+h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 1$, c'est-à-dire $\zeta(1+h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{h}$. En posant $x = 1+h$, qui parcourt $]1;+\infty[$:

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$$

En particulier, $\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.

7. La fonction ζ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$, strictement décroissante (question 4), tend vers $+\infty$ en 1^+ (question 6) et vers 1 en $+\infty$ (question 5c) : sa courbe admet la droite $x = 1$ pour asymptote verticale et la droite $y = 1$ pour asymptote horizontale. De plus, d'après la question 3b, $\displaystyle\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^x} > 0$: ζ est convexe. Quelques valeurs : $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6} \approx 1{,}64$, $\zeta(3) \approx 1{,}20$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90} \approx 1{,}08$. Les valeurs exactes de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ sont hors programme ; celle de $\zeta(2)$ revient souvent dans les sujets de concours, où elle est alors donnée par l'énoncé.



8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $g_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$, définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (a) Soit $x > 0$. La suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante (car $x > 0$) et tend vers 0 (car $x > 0$). D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ converge. Ainsi $\boxed{F \text{ est bien définie sur }]0;+\infty[.}$

(b) Soit $a > 0$ et $x \geqslant a$. D'après le théorème des séries alternées, le reste de la série $\sum g_n(x)$ est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^x} \leqslant \frac{1}{(N+1)^a},$$

la dernière inégalité venant de $x \geqslant a$ et $N+1 \geqslant 1$. Ainsi :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{x \geqslant a} \left| F(x) - \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^a} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0,$$

car $a > 0$: la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$. Les g_n y étant continues, le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions montre que F est continue sur $[a; +\infty[$.
Tout $x_0 > 0$ est intérieur à $\left[\frac{x_0}{2}; +\infty\right[$ avec $\frac{x_0}{2} > 0$, donc F est continue en x_0. Ainsi $\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$

(c) Soit $x > 1$. Les séries $\sum \frac{1}{n^x}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ convergent, donc, par somme de séries convergentes :

$$\zeta(x) + F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x}.$$

Le terme général est nul pour n impair et vaut $\frac{2}{n^x}$ pour n pair. Pour tout $P \in \mathbb{N}^*$, en ne gardant que les indices pairs $n = 2p$ avec $p \in [\![1, P]\!]$:

$$\sum_{n=1}^{2P} \frac{1 + (-1)^n}{n^x} = \sum_{p=1}^{P} \frac{2}{(2p)^x} = \frac{2}{2^x} \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{p^x} = 2^{1-x} \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{p^x}.$$

Quand $P \to +\infty$, le membre de gauche est une suite extraite des sommes partielles d'une série convergente, donc tend vers $\zeta(x) + F(x)$, et le membre de droite tend vers $2^{1-x}\zeta(x)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]1; +\infty[, \quad \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x).}$$

(d) D'après la question 8c, pour tout $x > 1$, $F(x) = \left(2^{1-x} - 1\right)\zeta(x)$. Or $2^{1-x} = \mathrm{e}^{(1-x)\ln(2)}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, et $\zeta(x)$ tend vers 1 d'après la question 5c. Par produit de limites :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = -1.}$$