

Questions de cours

redac — Rédaction

Exercice 1

redac/x01

Comment rédige-t-on la démonstration d'une propriété de la forme « pour tout $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ » ? Illustrer en montrant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

Corrigé. Rédaction : « Soit $x \in E$. Montrons que $\mathcal{P}(x)$. »

Exemple : soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

On a $(x - 1)^2 \geq 0$, soit $x^2 + 1 \geq 2x$. Comme $x^2 + 1 > 0$, on peut diviser par $x^2 + 1$ sans changer le sens de l'inégalité : $1 \geq \frac{2x}{x^2+1}$, c'est-à-dire $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : « Soit $x \in E$. Montrons que $\mathcal{P}(x)$ », avec x quelconque dans E
- ☐ Point de départ $(x - 1)^2 \geq 0$, soit $x^2 + 1 \geq 2x$
- ☐ Division par $x^2 + 1 > 0$ justifiée

Exercice 2

redac/x02

Comment rédige-t-on la démonstration d'une propriété de la forme « il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ » ? Illustrer en montrant que, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{z} > x + y$.

Corrigé. Rédaction : « Posons $x = \dots$. Vérifions que $x \in E$, puis que $\mathcal{P}(x)$. »

Exemple : soient $x, y \in \mathbb{N}$. Posons $z = (x + y + 1)^2$.

C'est un entier naturel, comme produit d'entiers naturels. De plus $x + y + 1 \geq 0$, donc $\sqrt{z} = x + y + 1 > x + y$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : « Posons $x = \dots$ », puis vérification de $x \in E$ et de $\mathcal{P}(x)$
- ☐ $z = (x + y + 1)^2$ est un entier naturel
- ☐ $\sqrt{z} = x + y + 1$ car $x + y + 1 \geq 0$, puis $x + y + 1 > x + y$

Exercice 3

redac/x03

Comment rédige-t-on la démonstration d'une propriété de la forme « il existe au plus un $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ » ? Illustrer en montrant qu'un réel a admet au plus une racine carrée strictement positive, c'est-à-dire au plus un réel $\omega > 0$ tel que $\omega^2 = a$.

Corrigé. Rédaction : « Soient $x, y \in E$ tels que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$. Montrons que $x = y$. »

Exemple : soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $\omega, \omega' > 0$ tels que $\omega^2 = a$ et $\omega'^2 = a$. Montrons que $\omega = \omega'$.

On a $\omega^2 - \omega'^2 = 0$, soit $(\omega - \omega')(\omega + \omega') = 0$. Or $\omega + \omega' > 0$ comme somme de deux réels strictement positifs, donc $\omega - \omega' = 0$, c'est-à-dire $\omega = \omega'$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : « Soient $x, y \in E$ vérifiant $\mathcal{P}$. Montrons que $x = y$ »
- ☐ Factorisation $(\omega - \omega')(\omega + \omega') = 0$
- ☐ Second facteur strictement positif, donc $\omega = \omega'$

Exercice 4

redac/x04

Comment rédige-t-on la démonstration d'une implication « $A \Rightarrow B$ » ? Illustrer en montrant que, pour tout $x \in [0, 1]$, si $x - x^2 \in \mathbb{N}$ alors $x \in \{0, 1\}$.

Corrigé. Rédaction : « On suppose A . Montrons B . »

Exemple : soit $x \in [0, 1]$. On suppose $x - x^2 \in \mathbb{N}$. Montrons que $x \in \{0, 1\}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t - t^2 = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Ainsi $x - x^2$ est un entier naturel inférieur à $\frac{1}{4}$: c'est 0. Donc $x(1 - x) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 1$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : « On suppose A . Montrons B »
- ☐ Majoration $t - t^2 \leq \frac{1}{4}$ par la forme canonique
- ☐ Seul entier naturel inférieur à $\frac{1}{4}$: 0, puis $x(1 - x) = 0$

Exercice 5

redac/x05

Comment rédige-t-on la démonstration d'une équivalence « $A \iff B$ » par double implication ? Illustrer en montrant que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$.

Corrigé. Rédaction : « $(\implies)$ On suppose A . Montrons B .

« $(\impliedby)$ On suppose B . Montrons A . »

Exemple : soient $x, y \in \mathbb{R}$.

« $(\impliedby)$ On suppose $x = y = 0$. Montrons que $x^2 + y^2 = 0$.

On a $x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$.

« $(\implies)$ On suppose $x^2 + y^2 = 0$. Montrons que $x = y = 0$.

Comme $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, une somme nulle de deux réels positifs a ses deux termes nuls : $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction, sens direct : « $(\implies)$ On suppose A . Montrons B »
- ☐ Rédaction, sens réciproque : « $(\impliedby)$ On suppose B . Montrons A »
- ☐ Sens réciproque par calcul direct
- ☐ Sens direct : une somme nulle de deux réels positifs a ses deux termes nuls

Exercice 6

redac/x06

Comment rédige-t-on la démonstration d'une inclusion « $E \subset F$ » ? Illustrer en montrant que $\{k(k+1), k \in \mathbb{N}\} \subset 2\mathbb{N}$, où $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs.

Corrigé. Rédaction : « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. »

Exemple : soit $x \in \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = k(k+1)$. Montrons que $x \in 2\mathbb{N}$.

Si k est pair, $k = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $x = 2 \cdot m(k+1)$. Si k est impair, $k+1$ est pair, $k+1 = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $x = 2 \cdot km$. Dans les deux cas, x est pair.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$ »
- ☐ Traduction de $x \in E$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = k(k+1)$
- ☐ Disjonction de cas selon la parité de k

Exercice 7

redac/x07

Comment rédige-t-on la démonstration d'une égalité d'ensembles « $E = F$ » par double inclusion ? Illustrer en montrant que $\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 6x + 5 \leq 0\} = [1, 5]$.

Corrigé. Rédaction : « (⊂) Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$.

(⊃) Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$. »

Exemple : notons $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 6x + 5 \leq 0\}$. Pour tout réel x , $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$.

(⊂) Soit $x \in A$. Montrons que $x \in [1, 5]$.

On a $(x - 1)(x - 5) \leq 0$, donc $x - 1$ et $x - 5$ sont de signes contraires. Comme $x - 5 < x - 1$, c'est $x - 5 \leq 0 \leq x - 1$, soit $1 \leq x \leq 5$.

(⊃) Soit $x \in [1, 5]$. Montrons que $x \in A$.

On a $x - 1 \geq 0$ et $x - 5 \leq 0$, donc $(x - 1)(x - 5) \leq 0$, c'est-à-dire $x^2 - 6x + 5 \leq 0$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction, inclusion directe : « (⊂) Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$ »
- ☐ Rédaction, inclusion réciproque : « (⊃) Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$ »
- ☐ Factorisation $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$
- ☐ Inclusion directe : facteurs de signes contraires et $x - 5 < x - 1$
- ☐ Inclusion réciproque : produit d'un réel positif et d'un réel négatif

Exercice 8

redac/x08

Comment rédige-t-on une démonstration par récurrence ? Illustrer en montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.

Corrigé. Rédaction : « Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$.

Initialisation : vérifions $\mathcal{P}_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. »

Exemple : montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.

Initialisation : $2^0 = 1 \geq 0 + 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $2^n \geq n + 1$. Montrons que $2^{n+1} \geq n + 2$.

On a $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n + 1) = 2n + 2 \geq n + 2$, car $n \geq 0$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : annonce de la récurrence et de la propriété $\mathcal{P}_n$
- ☐ Rédaction, initialisation : vérification de $\mathcal{P}_0$
- ☐ Rédaction, hérédité : « Soit $n \in \mathbb{N}$ »
- ☐ Rédaction, hérédité : « On suppose $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ »
- ☐ Initialisation : $2^0 = 1 \geq 1$
- ☐ Hérédité : $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n + 2 \geq n + 2$
- ☐ Conclusion par le principe de récurrence

Comment rédige-t-on une démonstration par récurrence double ? Illustrer sur la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, en montrant que $u_n = 2^n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. Rédaction : « Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$.

Initialisation : vérifions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$. Montrons $\mathcal{P}_{n+2}$. »

Exemple : montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

Initialisation : $2^0 + 3 = 4 = u_0$ et $2^1 + 3 = 5 = u_1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n = 2^n + 3$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3$. Montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2} + 3$.

On a

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(2^{n+1} + 3) - 2(2^n + 3) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 9 - 6 = 2^{n+2} + 3.$$

Conclusion : par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : annonce de la récurrence double et de la propriété $\mathcal{P}_n$
- ☐ Rédaction, initialisation : vérification de $\mathcal{P}_0$ et de $\mathcal{P}_1$
- ☐ Rédaction, hérédité : « Soit $n \in \mathbb{N}$ »
- ☐ Rédaction, hérédité : « On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$. Montrons $\mathcal{P}_{n+2}$ »
- ☐ Initialisation : $2^0 + 3 = 4 = u_0$ et $2^1 + 3 = 5 = u_1$
- ☐ Hérédité : calcul de $3(2^{n+1} + 3) - 2(2^n + 3)$
- ☐ Conclusion par le principe de récurrence double

Exercice 10

redac/x10

Comment rédige-t-on une démonstration par récurrence forte ? Illustrer sur une suite réelle (u_n) telle que $u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n u_k$, en montrant que $u_n \leq 2^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. Rédaction : « Montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$.

Initialisation : vérifions $\mathcal{P}_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. »

Exemple : montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.

Initialisation : $2^0 u_0 = u_0$, donc $u_0 \leq 2^0 u_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_k \leq 2^k u_0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrons que $u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0$.

On a

$$u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n 2^k u_0 = (2^{n+1} - 1) u_0 \leq 2^{n+1} u_0,$$

la deuxième inégalité par l'hypothèse de récurrence, la dernière car $u_0 \geq 0$.

Conclusion : par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : annonce de la récurrence forte et de la propriété $\mathcal{P}_n$
- ☐ Rédaction, initialisation : vérification de $\mathcal{P}_0$
- ☐ Rédaction, hérédité : « Soit $n \in \mathbb{N}$ »
- ☐ Rédaction, hérédité : « On suppose $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ »
- ☐ Initialisation : $2^0 u_0 = u_0$
- ☐ Hérédité : majoration terme à terme de $\sum_{k=0}^n u_k$, puis $2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$ avec $u_0 \geq 0$
- ☐ Conclusion par le principe de récurrence forte

Exercice 11

redac/x11

Comment rédige-t-on une démonstration par l'absurde ? Illustrer en montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2 + 2}$ n'est pas un entier.

Corrigé. Rédaction : « Montrons par l'absurde que $\mathcal{P}$.

On suppose non($\mathcal{P}$).

... Contradiction.

Donc $\mathcal{P}$. »

Exemple : montrons par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2 + 2}$ n'est pas un entier.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = \sqrt{n^2 + 2}$ soit un entier, naturel puisque positif.

Alors $p^2 - n^2 = 2$, soit $(p - n)(p + n) = 2$. Comme $p^2 > n^2$ avec p et n positifs, $p > n$: $p - n$ et $p + n$ sont des entiers naturels avec $1 \leq p - n \leq p + n$. La seule écriture de 2 comme produit de deux entiers naturels ainsi ordonnés est 1×2 , donc $p - n = 1$ et $p + n = 2$, d'où $2p = 3$, impossible pour p entier. Contradiction.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2 + 2}$ n'est pas un entier.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction : « Montrons par l'absurde que $\mathcal{P}$. On suppose non($\mathcal{P}$) »
- ☐ Rédaction : aboutir à une contradiction, puis conclure $\mathcal{P}$
- ☐ Négation correcte : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n^2 + 2}$ soit entier
- ☐ $(p - n)(p + n) = 2$ avec $1 \leq p - n \leq p + n$
- ☐ $p - n = 1$ et $p + n = 2$ donnent $2p = 3$: contradiction

Exercice 12

redac/x12

Comment rédige-t-on un raisonnement par analyse-synthèse ? Illustrer en montrant que toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Corrigé. Rédaction : « Analyse : soit x une solution. ... Donc x est nécessairement de la forme ... »

Synthèse : soit x de cette forme. Vérifions que c'est une solution. »

Exemple : soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Analyse : soient p paire et i impaire telles que $f = p + i$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. En ajoutant et en retranchant ces deux égalités,

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Le couple (p, i) est donc entièrement déterminé par f : unicité.

Synthèse : posons $p: x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i: x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Vérifions que p est paire, i impaire et $f = p + i$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = p(x)$, $i(-x) = -i(x)$ et $p(x) + i(x) = f(x)$: p est paire, i est impaire et $f = p + i$. D'où l'existence.

ATTENDUS

- ☐ Rédaction, analyse : « Soit x une solution. ... Donc x est nécessairement de la forme ... »
- ☐ Rédaction, synthèse : « Soit x de cette forme. Vérifions que c'est une solution »
- ☐ Analyse : $f(x)$ et $f(-x)$ donnent $p(x) = (f(x) + f(-x)) / 2$ et $i(x) = (f(x) - f(-x)) / 2$
- ☐ Synthèse : parité, imparité et somme vérifiées
- ☐ Unicité par l'analyse, existence par la synthèse