

Questions de cours

Chapitre 3 – Séries numériques

QUESTIONS DE COURS

Question 1

ch03/q01

Énoncer la formule de Stirling.

Corrigé. On a : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

ATTENDUS

- ☐ Formule juste
- ☐ Écriture correcte de l'équivalent (ni égalité, ni développement limité)

Question 2

ch03/q02

Énoncer la règle de d'Alembert.

Corrigé. Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls telle que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$), la série diverge grossièrement : $u_n \not\rightarrow 0$.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

ATTENDUS

- ☐ Hypothèses : termes non nuls, existence de la limite ℓ du quotient des modules
- ☐ Cas $\ell < 1$: convergence absolue
- ☐ Cas $\ell > 1$: divergence grossière
- ☐ Cas $\ell = 1$: pas de conclusion

Question 3

ch03/q03

Donner un exemple de série convergente et un exemple de série divergente, à termes strictement positifs, pour lesquelles $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$.

Corrigé. Pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$ et la série converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Pour $u_n = \frac{1}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ et la série diverge (série harmonique).

ATTENDUS

- ☐ Exemple convergent correct avec vérification de la limite du quotient
- ☐ Exemple divergent correct avec vérification de la limite du quotient

Question 4

ch03/q04

Définir une série alternée.

Corrigé. Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est alternée si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant, c'est-à-dire si l'on peut écrire $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout n , ou $a_n \leq 0$ pour tout n .

ATTENDUS

- ☐ Signe constant de $(-1)^n u_n$, ou écriture $u_n = (-1)^n a_n$ avec (a_n) de signe constant

Question 5

ch03/q05

Énoncer le théorème spécial des séries alternées, avec la majoration et le signe du reste.

Corrigé. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, de limite nulle. Alors :

- la série $\sum (-1)^n a_n$ converge ;
- le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$;
- R_n est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} a_{n+1}$.

ATTENDUS

- ☐ Hypothèses : (a_n) positive, décroissante, de limite nulle
- ☐ Conclusion : convergence de $\sum (-1)^n a_n$
- ☐ Majoration du reste : $|R_n| \leq a_{n+1}$
- ☐ Signe du reste : celui de son premier terme

Question 6

ch03/q06

Définir le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ à termes complexes.

Corrigé. Le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ est la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

ATTENDUS

- ☐ Formule $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
- ☐ Aucune mention de convergence : la série est définie formellement dans tous les cas

Question 7

ch03/q07

Énoncer le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Corrigé. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à termes complexes absolument convergentes, leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les deux séries sont absolument convergentes
- ☐ Conclusion : le produit de Cauchy converge absolument
- ☐ Formule de la somme comme produit des deux sommes

Question 8

ch03/q08

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Converge-t-elle absolument ?

Corrigé. Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Elle ne converge pas absolument : $\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{n^{1/2}}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$).

ATTENDUS

- ☐ Vérification des trois hypothèses du théorème spécial : positivité, décroissance, limite nulle
- ☐ Conclusion : convergence
- ☐ Non convergence absolue, par la série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$

Exercice 1

ch03/x01

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Pour $N > n_0$, encadrer la somme partielle $\sum_{k=n_0}^N f(k)$ par deux intégrales de f .

Corrigé. Soit $k \geq n_0$ un entier. Par décroissance de f , pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant sur $[k, k+1]$, segment de longueur 1 :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

On somme l'inégalité de droite pour k allant de n_0 à N :

$$\sum_{k=n_0}^N \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^N f(k),$$

et par la relation de Chasles, le membre de gauche vaut $\int_{n_0}^{N+1} f(t) dt$. De même, en sommant l'inégalité de gauche pour k allant de n_0 à $N-1$, on obtient $\sum_{k=n_0+1}^N f(k) \leq \int_{n_0}^N f(t) dt$, puis on ajoute $f(n_0)$ aux deux membres. Finalement :

$$\int_{n_0}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^N f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^N f(t) dt.$$

ATTENDUS

- ☐ Encadrement de $f(t)$ sur $[k, k+1]$ par $f(k+1)$ et $f(k)$, justifié par la décroissance
- ☐ Intégration sur $[k, k+1]$ et encadrement de $\int_k^{k+1} f$
- ☐ Un côté détaillé : sommation sur k , puis relation de Chasles
- ☐ Formule correcte pour le second côté, avec les bonnes bornes et le terme $f(n_0)$

Montrer, par comparaison série-intégrale, que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Corrigé. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Soit $k \geq 1$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, donc en intégrant sur $[k, k+1]$, segment de longueur 1, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. Soit $N \geq 1$. En sommant pour k allant de 1 à N :

$$\sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Par la relation de Chasles, le membre de gauche vaut $\int_1^{N+1} \frac{dt}{t} = \ln(N+1)$. Ainsi $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq \ln(N+1)$. Comme $\ln(N+1) \rightarrow +\infty$, par comparaison, $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$: la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

ATTENDUS

- ☐ Minoration de $\frac{1}{k}$ par $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, justifiée par la décroissance
- ☐ Sommation pour k allant de 1 à N
- ☐ Relation de Chasles et calcul de l'intégrale : $\ln(N+1)$
- ☐ Conclusion par comparaison : les sommes partielles tendent vers $+\infty$

Donner un équivalent, quand $N \rightarrow +\infty$, de $H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$.

Corrigé. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Soit $k \geq 1$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, donc en intégrant sur $[k, k+1]$, segment de longueur 1 :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Soit $N \geq 2$. En sommant l'inégalité de droite pour k allant de 1 à N , puis par la relation de Chasles, $\ln(N+1) = \int_1^{N+1} \frac{dt}{t} \leq H_N$. En sommant l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à $N-1$, puis par la relation de Chasles, $H_N - 1 = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \leq \int_1^N \frac{dt}{t} = \ln N$. Ainsi :

$$\ln(N+1) \leq H_N \leq 1 + \ln N.$$

Divisons par $\ln N > 0$:

$$\frac{\ln(N+1)}{\ln N} \leq \frac{H_N}{\ln N} \leq \frac{1}{\ln N} + 1.$$

Or $\ln(N+1) = \ln N + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$, donc $\frac{\ln(N+1)}{\ln N} = 1 + \frac{\ln(1+1/N)}{\ln N} \rightarrow 1$; et $\frac{1}{\ln N} + 1 \rightarrow 1$. Par le théorème des gendarmes, $\frac{H_N}{\ln N} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $H_N \sim \ln N$.

ATTENDUS

- ☐ Encadrement de $\frac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$ et intégration
- ☐ Minoration $H_N \geq \ln(N+1)$ par sommation et relation de Chasles
- ☐ Majoration $H_N \leq 1 + \ln N$, avec le décalage d'indice et le terme 1
- ☐ Division par $\ln N$
- ☐ Calcul de la limite de $\frac{\ln(N+1)}{\ln N}$, sans composer $\ln$ avec des équivalents
- ☐ Conclusion par le théorème des gendarmes : $H_N \sim \ln N$

Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$, du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Corrigé. La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Soit $k \geq 2$ un entier. Pour $t \in [k, k+1]$, $t^{-\alpha} \leq k^{-\alpha}$, et pour $t \in [k-1, k]$, $k^{-\alpha} \leq t^{-\alpha}$; en intégrant sur ces segments de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Soient $n \geq 1$ et $M > n$. En sommant pour k allant de $n+1$ à M , puis par la relation de Chasles :

$$\int_{n+1}^{M+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^M \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^M \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Or, pour $a \geq 1$, comme $\alpha > 1$,

$$\int_a^M \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{M^{\alpha-1}} \right) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

La majoration montre que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ sont majorées : elle converge et R_n est bien défini. En faisant tendre M vers $+\infty$ dans l'encadrement :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Divisons par $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} > 0$:

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \leq (\alpha-1) n^{\alpha-1} R_n \leq 1.$$

Comme $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, la borne de gauche tend vers 1. Par le théorème des gendarmes, $(\alpha-1) n^{\alpha-1} R_n \rightarrow 1$, c'est-à-dire $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1) n^{\alpha-1}}$.

ATTENDUS

- ☐ Encadrement de $k^{-\alpha}$ par deux intégrales sur $[k, k+1]$ et $[k-1, k]$, justifié par la décroissance
- ☐ Sommation pour k de $n+1$ à M , relation de Chasles et calcul des intégrales
- ☐ Passage à la limite $M \rightarrow +\infty$: encadrement de R_n
- ☐ Division par la borne de droite et théorème des gendarmes : $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Donner un équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$, de $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k$.

Corrigé. La fonction $\ln$ est croissante sur $[1, +\infty[$. Soit $k \geq 1$ un entier. Pour $t \in [k, k+1]$, $\ln k \leq \ln t$, et si $k \geq 2$, pour $t \in [k-1, k]$, $\ln t \leq \ln k$; en intégrant sur ces segments de longueur 1 :

$$\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt.$$

En sommant l'inégalité de gauche pour k allant de 2 à n et celle de droite pour k allant de 1 à n , puis par la relation de Chasles :

$$\int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln t \, dt.$$

Une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$ est $t \mapsto t \ln t - t$, donc $\int_1^n \ln t \, dt = n \ln n - n + 1$ et $\int_1^{n+1} \ln t \, dt = (n+1) \ln(n+1) - n$. Pour $n \geq 2$, divisons par $n \ln n > 0$:

$$1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n} \leq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{\ln n}.$$

La borne de gauche tend vers 1. À droite, $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ et $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \rightarrow 1$, donc la borne de droite tend vers 1. Par le théorème des gendarmes, $\frac{\ln(n!)}{n \ln n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $\ln(n!) \sim n \ln n$.

ATTENDUS

- ☐ Encadrement de $\ln k$ par des intégrales, dans le sens de la croissance de $\ln$
- ☐ Sommatation et relation de Chasles : $\int_1^n \ln \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln$
- ☐ Calcul des intégrales avec la primitive $t \ln t - t$
- ☐ Division par $n \ln n$, limites des bornes et théorème des gendarmes : $\ln(n!) \sim n \ln n$

Exercice 6

ch03/x06

À l'aide de la formule de Stirling, donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé. On a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Par la formule de Stirling :

$$(2n)! \sim \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}, \quad (n!)^2 \sim 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}.$$

En faisant le quotient (les équivalents se multiplient et se divisent) :

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \cdot 2^{2n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

 ATTENDUS

- ☐ Écriture $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
- ☐ Équivalent correct de $(2n)! : \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$
- ☐ Quotient des équivalents et simplification des puissances : facteur 4^n
- ☐ Résultat $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Exercice 7

ch03/x07

Déterminer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de $\frac{(n!)^{1/n}}{n}$.

Corrigé. Posons $v_n = \frac{(n!)^{1/n}}{n} > 0$. Par la formule de Stirling, $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} \rightarrow 1$, donc, par continuité du logarithme en 1,

$$\varepsilon_n = \ln \left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} \right) = \ln(n!) - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$, et

$$\ln v_n = \frac{\ln(n!)}{n} - \ln n = -1 + \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Par croissances comparées, $\frac{\ln(2\pi n)}{2n} \rightarrow 0$; de plus $\frac{\varepsilon_n}{n} \rightarrow 0$. Donc $\ln v_n \rightarrow -1$ et, par continuité de l'exponentielle, $v_n = \exp(\ln v_n) \rightarrow e^{-1}$.

 ATTENDUS

- ☐ Stirling écrit comme un quotient de limite 1, puis passage au logarithme : $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$
- ☐ Expression de $\ln v_n = \frac{\ln(n!)}{n} - \ln n$
- ☐ Limite -1 , par croissances comparées
- ☐ Conclusion e^{-1} par continuité de l'exponentielle

Exercice 8

ch03/x08

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$.

Corrigé. Posons $u_n = \frac{n!}{n^n} > 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Or $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} \rightarrow 1$, car $\frac{\ln(1+h)}{h} \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Donc $-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow -1$ et, par continuité de l'exponentielle, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow e^{-1}$. Comme $e^{-1} < 1$, la série $\sum u_n$ converge par la règle de d'Alembert.

ATTENDUS

- ☐ Calcul et simplification du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$
- ☐ Limite e^{-1} : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$ puis continuité de l'exponentielle
- ☐ Conclusion par d'Alembert : convergence

Exercice 9

ch03/x09

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Corrigé. Si $x = 0$, la série est nulle à partir du rang 1 et converge. Sinon, posons $u_n = \frac{x^n}{n!} \neq 0$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

La série converge absolument par la règle de d'Alembert, pour tout réel x .

ATTENDUS

- ☐ Traitement du cas $x = 0$ (ou remarque que les termes sont non nuls pour $x \neq 0$)
- ☐ Quotient $\frac{|x|}{n+1}$ et limite 0
- ☐ Conclusion : convergence absolue pour tout x

Exercice 10

ch03/x10

On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Déterminer un rang n à partir duquel $|S - S_n| \leq 10^{-2}$.

Corrigé. La suite $a_n = \frac{1}{2n+1}$ est positive, décroissante et de limite nulle : le théorème spécial des séries alternées s'applique et donne

$$|S - S_n| = |R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{2n+3}.$$

Il suffit donc que $\frac{1}{2n+3} \leq 10^{-2}$, soit $2n+3 \geq 100$, soit $n \geq 49$. Le rang $n = 49$ convient.

ATTENDUS

- ☐ Majoration du reste par $a_{n+1} = \frac{1}{2n+3}$, hypothèses vérifiées
- ☐ Résolution de l'inégalité : $n \geq 49$

Exercice 11

ch03/x11

Déterminer le produit de Cauchy de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ par elle-même, et calculer sa somme.

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}.$$

La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ est absolument convergente (termes positifs, raison $\frac{1}{2}$), de somme 2. Par le théorème sur le produit de Cauchy, $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^n}$ converge et sa somme vaut $2 \times 2 = 4$.

ATTENDUS

- ☐ Calcul du terme général $c_n = \frac{n+1}{2^n}$
- ☐ Convergence absolue de la série géométrique, somme 2
- ☐ Somme du produit de Cauchy : 4

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer, à l'aide du produit de Cauchy, que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a) \exp(b) = \exp(a + b)$.

Corrigé. Les séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ convergent absolument (règle de d'Alembert, ou série exponentielle de $|a|$ et $|b|$). Le terme général de leur produit de Cauchy est

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

par la formule du binôme. Par le théorème sur le produit de Cauchy,

$$\exp(a) \exp(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b).$$

ATTENDUS

- ☐ Convergence absolue des deux séries exponentielles
- ☐ Calcul de c_n et reconnaissance de la formule du binôme : $c_n = \frac{(a+b)^n}{n!}$
- ☐ Conclusion par le théorème sur le produit de Cauchy