

Questions de cours

Chapitre 4 — Compléments d'algèbre linéaire

QUESTIONS DE COURS

Question 1

ch04/q01

Soient $F_1, \dots, F_n$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Définir le produit $F_1 \times \dots \times F_n$ et donner sa dimension.

Corrigé. Le produit $F_1 \times \dots \times F_n$ est l'ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in F_i$ pour tout i , muni des lois composante par composante :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

C'est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de dimension $\dim F_1 + \dots + \dim F_n$.

ATTENDUS

- ☐ Ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in F_i$
- ☐ Lois composante par composante
- ☐ Dimension $\dim F_1 + \dots + \dim F_n$

Question 2

ch04/q02

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Définir la somme $F_1 + \dots + F_n$.

Corrigé. La somme est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme somme d'un élément de chaque F_i :

$$F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E , le plus petit qui contient tous les F_i .

ATTENDUS

- ☐ Ensemble des sommes $x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in F_i$ pour tout i

Question 3

ch04/q03

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Quand dit-on que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe ?

Corrigé. La somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe lorsque tout vecteur de la somme admet une unique décomposition :

$$\forall x \in F_1 + \dots + F_n, \quad \exists!(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \quad x = x_1 + \dots + x_n.$$

On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

ATTENDUS

- ☐ Unicité de la décomposition $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in F_i$, pour tout x de la somme

Question 4

ch04/q04

Énoncer la caractérisation d'une somme directe $F_1 + \dots + F_n$ par les décompositions du vecteur nul.

Corrigé. La somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si la seule décomposition du vecteur nul est la décomposition nulle :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \quad (x_1 + \dots + x_n = 0_E) \implies (x_1 = \dots = x_n = 0_E).$$

ATTENDUS

- ☐ Équivalence entre « somme directe » et « la seule décomposition de 0_E est la décomposition nulle »
- ☐ Quantificateurs corrects : le « pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in F_i$ » porte sur l'implication entière, non sur l'un de ses membres

Question 5

ch04/q05

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Énoncer l'inégalité reliant $\dim(F_1 + \dots + F_n)$ aux dimensions des F_i , et son cas d'égalité.

Corrigé. On a

$$\dim(F_1 + \dots + F_n) \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_n,$$

avec égalité si et seulement si la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

ATTENDUS

- ☐ Inégalité $\dim(F_1 + \dots + F_n) \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_n$
- ☐ Égalité si et seulement si la somme est directe

Question 6

ch04/q06

Soit $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ un espace vectoriel de dimension finie. Définir une base de E adaptée à cette décomposition. Définir une base de E adaptée à un sous-espace vectoriel F .

Corrigé. Une base de E adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ est une base obtenue par concaténation de bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ des sous-espaces $F_1, \dots, F_r$: $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$.

Une base de E adaptée à un sous-espace vectoriel F est une base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$, où G est un supplémentaire de F dans E ; autrement dit, une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont les $p = \dim F$ premiers vecteurs forment une base de F .

ATTENDUS

- ☐ Base adaptée à la décomposition : concaténation de bases des F_i , dans l'ordre
- ☐ Base adaptée à F : adaptée à $E = F \oplus G$ avec G supplémentaire, ou dont les premiers vecteurs forment une base de F

Question 7

ch04/q07

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . Quand dit-on que F est stable par u ? Définir alors l'endomorphisme induit par u sur F .

Corrigé. Le sous-espace F est stable par u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire si $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. Dans ce cas, l'endomorphisme induit par u sur F est l'application

$$u|_F : F \rightarrow F, \quad x \mapsto u(x).$$

C'est un endomorphisme de F (et non de E).

ATTENDUS

- ☐ Stabilité : $u(F) \subset F$
- ☐ Endomorphisme induit : $u|_F : F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$, à valeurs dans F

Question 8

ch04/q08

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Que peut-on dire de $\text{Ker } u$ et de $\text{Im } u$ vis-à-vis de v ?

Corrigé. Si u et v commutent, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

ATTENDUS

- ☐ $\text{Ker } u$ est stable par v
- ☐ $\text{Im } u$ est stable par v

Question 9

ch04/q09

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $E = F \oplus G$ avec F stable par u , $\dim F = p$ et $\dim G = q$. Donner la forme de la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition, en précisant la taille des blocs et ce que représente le bloc en haut à gauche.

Corrigé. Dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}),$$

le bloc nul étant de taille $q \times p$. Le bloc A est la matrice de l'endomorphisme induit $u|_F$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

ATTENDUS

- ☐ Forme triangulaire supérieure par blocs, bloc nul en bas à gauche
- ☐ Tailles des blocs : A de taille $p \times p$, C de taille $p \times q$, D de taille $q \times q$
- ☐ A est la matrice de l'endomorphisme induit $u|_F$ dans $\mathcal{B}_F$

Question 10

ch04/q10

Énoncer le résultat sur le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Corrigé. Soit M une matrice carrée triangulaire par blocs (supérieure ou inférieure), le découpage des lignes étant le même que celui des colonnes, de sorte que les blocs diagonaux $A_1, \dots, A_r$ sont des matrices carrées. Alors

$$\det M = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_r.$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : matrice triangulaire par blocs, même découpage des lignes et des colonnes, donc blocs diagonaux carrés
- ☐ $\det M = \det A_1 \cdots \det A_r$

Question 11

ch04/q11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Définir $\text{tr}(A)$ et énoncer les propriétés de la trace vis-à-vis des combinaisons linéaires et de la transposition.

Corrigé. Si $A = (a_{ij})$, la trace de A est la somme de ses coefficients diagonaux : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

La trace est linéaire : pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$. C'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$.

ATTENDUS

- ☐ $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
- ☐ Linéarité : $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- ☐ $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$

Question 12

ch04/q12

Énoncer la relation entre la trace et le produit matriciel, en précisant les formats des matrices impliquées. Qu'en déduit-on pour deux matrices semblables ?

Corrigé. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, les produits $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont carrés et

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

On en déduit que deux matrices semblables ont la même trace : si $B = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A)$.

ATTENDUS

- ☐ $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
- ☐ Deux matrices semblables ont la même trace
- ☐ Justification avec le parenthésage $\text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1})$

Question 13

ch04/q13

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Définir $\text{tr}(u)$. Quel résultat garantit que cette définition a un sens ?

Corrigé. On pose $\text{tr}(u) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E .

Cette définition a un sens car elle ne dépend pas de la base choisie : les matrices de u dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont semblables, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P$ avec P la matrice de passage, et deux matrices semblables ont la même trace.

ATTENDUS

- ☐ $\text{tr}(u)$ est la trace de la matrice de u dans une base de E
- ☐ Les matrices de u dans deux bases sont semblables (même endomorphisme, deux bases)
- ☐ La trace est invariante par similitude, donc la définition ne dépend pas de la base

Question 14

ch04/q14

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Donner l'expression des polynômes interpolateurs de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ associés à ces points, et la valeur de $L_i(a_j)$.

Corrigé. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j},$$

et $L_i(a_j) = \delta_{ij}$, c'est-à-dire $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$.

ATTENDUS

- ☐ $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$
- ☐ $L_i(a_j) = \delta_{ij}$

Question 15

ch04/q15

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés. Énoncer le théorème sur la famille $(L_0, \dots, L_n)$ et donner l'expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette famille.

Corrigé. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i :$$

les coordonnées de P dans cette base sont ses valeurs aux points a_i .

ATTENDUS

- ☐ $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (l'espace est précisé)
- ☐ $P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$

Question 16

ch04/q16

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Définir la matrice de Vandermonde $V(a_1, \dots, a_n)$, donner la valeur de son déterminant et une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible.

Corrigé. La matrice de Vandermonde associée à $a_1, \dots, a_n$ est

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut

$$\det V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i),$$

et la matrice est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

ATTENDUS

- ☐ Matrice : la ligne i est $(1, a_i, a_i^2, \dots, a_i^{n-1})$ (ou sa transposée)
- ☐ $\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$
- ☐ Inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts

Exercice 1

ch04/x01

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$, $x_1 + \dots + x_n = 0_E$ entraîne $x_1 = \dots = x_n = 0_E$.

Corrigé. Supposons la somme directe, et soit $(x_1, \dots, x_n)$ dans $F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 0_E$. Le vecteur nul appartient à la somme et admet la décomposition $0_E = 0_E + \dots + 0_E$; par unicité de la décomposition, $x_1 = \dots = x_n = 0_E$.

Réciproquement, supposons la condition vérifiée. Soit $x \in F_1 + \dots + F_n$. L'existence d'une décomposition est acquise par définition de la somme; montrons son unicité. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $F_1 \times \dots \times F_n$ tels que $x = x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$. En soustrayant,

$$(x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n) = 0_E,$$

avec $x_i - y_i \in F_i$ pour tout i , car F_i est un sous-espace vectoriel. L'hypothèse donne $x_i - y_i = 0_E$, soit $x_i = y_i$, pour tout i . La somme est donc directe.

ATTENDUS

- ☐ Sens direct : $0_E = 0_E + \dots + 0_E$ et unicité de la décomposition
- ☐ Réciproque : deux décompositions d'un même x , soustraction
- ☐ $x_i - y_i \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel
- ☐ Conclusion $x_i = y_i$ pour tout i : unicité

Exercice 2

ch04/x02

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3) , on pose $F_1 = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $F_2 = \text{Vect}(e_2, e_3)$. Montrer que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ et que cette somme n'est pas directe.

Corrigé. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On a $x = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$ avec $(x_1, x_2, 0) \in F_1$ et $(0, 0, x_3) \in F_2$, donc $x \in F_1 + F_2$. Ainsi $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

La somme n'est pas directe : $e_2 \in F_1 \cap F_2$ et $e_2 \neq 0$, de sorte que $0 = e_2 + (-e_2)$ est une décomposition non nulle du vecteur nul, avec $e_2 \in F_1$ et $-e_2 \in F_2$.

ATTENDUS

- ☐ Décomposition explicite de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ (ou inclusion et argument de dimension)
- ☐ Non directe : $e_2 \in F_1 \cap F_2$ non nul, ou deux décompositions distinctes d'un même vecteur

Exercice 3

ch04/x03

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés des matrices symétriques et antisymétriques ; on rappelle que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $M = M^T = -M$, donc $2M = 0$ et $M = 0$. La somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est donc directe.

Par la formule de la dimension d'une somme directe,

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a la même dimension que lui : il lui est égal.

ATTENDUS

- ☐ Intersection nulle : $M = M^T = -M$ entraîne $M = 0$
- ☐ Somme des dimensions égale à n^2 (ou décomposition explicite $M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$)
- ☐ Conclusion : sous-espace de dimension n^2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc égal

Exercice 4

ch04/x04

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que $\dim(F_1 + \dots + F_n) \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_n$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Corrigé. Considérons l'application

$$\varphi: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow F_1 + \dots + F_n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n.$$

Elle est linéaire, et surjective par définition de la somme. Par le théorème du rang,

$$\dim(F_1 + \dots + F_n) = \dim(F_1 \times \dots \times F_n) - \dim(\text{Ker } \varphi) = \sum_{i=1}^n \dim F_i - \dim(\text{Ker } \varphi).$$

D'où l'inégalité, avec égalité si et seulement si $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. Or $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ signifie exactement que la seule décomposition du vecteur nul est la décomposition nulle, c'est-à-dire que la somme est directe.

ATTENDUS

- ☐ Application φ linéaire et surjective sur la somme
- ☐ Théorème du rang, avec $\dim(F_1 \times \dots \times F_n) = \sum \dim F_i$
- ☐ Inégalité, et égalité si et seulement si $\text{Ker } \varphi = \{0\}$
- ☐ $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ équivaut à « somme directe » (caractérisation par le vecteur nul)

Exercice 5

ch04/x05

Soit $\mathcal{H}_0 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \mathcal{H}_0$ et en déduire $\dim \mathcal{H}_0$.

Corrigé. La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc $\mathcal{H}_0 = \text{Ker tr}$ est un sous-espace vectoriel.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On écrit

$$M = \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n + \left(M - \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n \right),$$

où le premier terme est dans $\text{Vect}(I_n)$ et le second est de trace $\text{tr}(M) - \frac{\text{tr}(M)}{n} \text{tr}(I_n) = \text{tr}(M) - \text{tr}(M) = 0$. Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(I_n) + \mathcal{H}_0$.

Si $\lambda I_n \in \mathcal{H}_0$, alors $\text{tr}(\lambda I_n) = n\lambda = 0$, donc $\lambda = 0 : \text{Vect}(I_n) \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$ et la somme est directe.

Enfin, $\dim \mathcal{H}_0 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \dim \text{Vect}(I_n) = n^2 - 1$.

ATTENDUS

- ☐ $\mathcal{H}_0$ est un sous-espace vectoriel (noyau de la forme linéaire tr)
- ☐ Décomposition $M = \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n + \left(M - \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n \right)$ avec second terme de trace nulle
- ☐ Intersection nulle : $\text{tr}(\lambda I_n) = n\lambda$
- ☐ $\dim \mathcal{H}_0 = n^2 - 1$

Exercice 6

ch04/x06

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

Corrigé. Soit $x \in \text{Ker } u$. Alors

$$u(v(x)) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E,$$

donc $v(x) \in \text{Ker } u$: le noyau de u est stable par v .

Soit $y \in \text{Im } u$; il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors

$$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im } u,$$

donc $\text{Im } u$ est stable par v .

ATTENDUS

- ☐ Noyau : pour $x \in \text{Ker } u$, $u(v(x)) = v(u(x)) = 0_E$
- ☐ Image : pour $y = u(x)$, $v(y) = u(v(x)) \in \text{Im } u$

Exercice 7

ch04/x07

Soit $u: P \mapsto P'$ l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}_3[X]$. Montrer que $F = \mathbb{K}_1[X]$ est stable par u et donner la matrice de l'endomorphisme induit $u|_F$ dans la base $(1, X)$ de F .

Corrigé. Soit $P = a + bX \in \mathbb{K}_1[X]$. Alors $u(P) = P' = b$, qui est un polynôme constant, donc appartient à $\mathbb{K}_1[X]$: F est stable par u .

L'endomorphisme induit $u|_F$ vérifie $u|_F(1) = 0$ et $u|_F(X) = 1$, donc

$$\text{Mat}_{(1,X)}(u|_F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ATTENDUS

- ☐ Stabilité : la dérivée d'un polynôme de degré au plus 1 est de degré au plus 1 (ou calcul sur $a + bX$)
- ☐ Images des vecteurs de base : $u(1) = 0$, $u(X) = 1$
- ☐ Matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (colonnes dans le bon sens)

Exercice 8

ch04/x08

Soit r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $r(x, y) = (-y, x)$. Montrer qu'aucune droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par r .

Corrigé. Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ s'écrit $D = \text{Vect}(v)$ avec $v = (x, y) \neq (0, 0)$. Elle est stable par r si et seulement si $r(v) \in D$, c'est-à-dire si et seulement si $r(v) = (-y, x)$ est colinéaire à v . Or

$$\det(v, r(v)) = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 > 0,$$

car $(x, y) \neq (0, 0)$. Les vecteurs v et $r(v)$ ne sont pas colinéaires : aucune droite de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par r .

ATTENDUS

- ☐ Une droite est $\text{Vect}(v)$ avec $v \neq 0$, stable si et seulement si $r(v)$ est colinéaire à v
- ☐ Non-colinéarité : $\det(v, r(v)) = x^2 + y^2 \neq 0$, ou $r(v) = \lambda v$ impose $\lambda^2 = -1$
- ☐ Conclusion pour toute droite

Exercice 9

ch04/x09

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ inversibles, et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est inversible et exprimer M^{-1} par blocs.

Corrigé. La matrice M est triangulaire par blocs, à blocs diagonaux carrés, donc $\det M = \det A \cdot \det C \neq 0$: M est inversible.

Posons $N = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, dont les blocs ont les mêmes tailles que ceux de M . Par produit par blocs,

$$MN = \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BC^{-1} + BC^{-1} \\ 0 & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = I_{p+q}.$$

Comme M est carrée, $MN = I_{p+q}$ suffit à conclure : $M^{-1} = N$.

ATTENDUS

- ☐ Inversibilité : $\det M = \det A \cdot \det C \neq 0$ (ou résolution du système par blocs)
- ☐ Produit par blocs correct, tailles compatibles
- ☐ $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$

Exercice 10

ch04/x10

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

Corrigé. Notons $A = (a_{ik})$ et $B = (b_{ki})$. Le produit AB est carré de taille n et BA est carré de taille p . On a

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^p (BA)_{kk} = \text{tr}(BA).$$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables : il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Alors

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A).$$

ATTENDUS

- ☐ $\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki}$ avec les bons indices
- ☐ Intversion des deux sommes et identification de $\text{tr}(BA)$
- ☐ Semblables : $B = P^{-1}AP$, regroupement $P^{-1}(AP)$ et application de la relation

Exercice 11

ch04/x11

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour chacune des égalités suivantes, dire si elle est vraie pour toutes matrices A, B, C , en la justifiant, ou donner un contre-exemple :

$$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA), \quad \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(ACB), \quad \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CBA).$$

Corrigé. *Première égalité : vraie.* En posant $X = A$ et $Y = BC$, la relation $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ donne $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)$.

Deuxième et troisième égalités : fausses dès que $n \geq 2$. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

complétées par des zéros si $n > 2$. Alors $BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $ABC = A$ et $\operatorname{tr}(ABC) = 1$. D'autre part $AC = 0$, donc $\operatorname{tr}(ACB) = 0$; et $CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $CBA = 0$ et $\operatorname{tr}(CBA) = 0$. Les deux dernières égalités sont donc fausses en général.

(Pour $n = 1$, le produit est commutatif et les trois égalités sont vraies.)

ATTENDUS

- ☐ Première égalité vraie, par $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ avec $X = A$ et $Y = BC$
- ☐ Deuxième égalité fausse : contre-exemple explicite et vérifié
- ☐ Troisième égalité fausse : contre-exemple explicite et vérifié

Exercice 12

ch04/x12

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

Corrigé. Notons $n = \dim E$ et $r = \operatorname{rg} p = \dim(\operatorname{Im} p)$.

On sait que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. De plus, si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$, et $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$: p induit l'identité sur $\operatorname{Im} p$. Sur $\operatorname{Ker} p$, p induit l'endomorphisme nul.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. Les deux sous-espaces étant stables par p , la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, les blocs étant ceux des endomorphismes induits :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le bloc nul en bas à droite étant de taille $(n - r) \times (n - r)$. Sa trace vaut r . La trace de p ne dépendant pas de la base choisie, $\operatorname{tr}(p) = r = \operatorname{rg}(p)$.

ATTENDUS

- ☐ $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, avec p induisant l'identité sur $\operatorname{Im} p$ et 0 sur $\operatorname{Ker} p$
- ☐ Matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base adaptée, $r = \operatorname{rg} p$
- ☐ Conclusion : $\operatorname{tr}(p) = r$, la trace ne dépendant pas de la base

Exercice 13

ch04/x13

Déterminer les polynômes interpolateurs de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés aux points $-1, 0$ et 1 , puis décomposer $P = X^2 - X + 1$ dans la base (L_0, L_1, L_2) de $\mathbb{K}_2[X]$.

Corrigé. Avec $a_0 = -1, a_1 = 0$ et $a_2 = 1$:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(X-0)(X-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{X(X-1)}{2}, \\ L_1 &= \frac{(X+1)(X-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - X^2, \\ L_2 &= \frac{(X+1)(X-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{X(X+1)}{2}. \end{aligned}$$

Les coordonnées de P dans la base de Lagrange sont ses valeurs aux points : $P(-1) = 3, P(0) = 1$ et $P(1) = 1$.
Donc

$$P = 3L_0 + L_1 + L_2.$$

ATTENDUS

- ☐ Les trois polynômes $L_0 = \frac{X(X-1)}{2}, L_1 = 1 - X^2, L_2 = \frac{X(X+1)}{2}$
- ☐ Coordonnées $P(-1) = 3, P(0) = 1, P(1) = 1$ par la formule $P = \sum P(a_i)L_i$
- ☐ $P = 3L_0 + L_1 + L_2$

Exercice 14

ch04/x14

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés.

Montrer que $\sum_{i=0}^n L_i = 1$.

Corrigé. Le polynôme constant $P = 1$ appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ et vérifie $P(a_i) = 1$ pour tout i . La formule de décomposition dans la base de Lagrange donne

$$1 = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i = \sum_{i=0}^n L_i.$$

ATTENDUS

- ☐ Application de $P = \sum P(a_i)L_i$ à $P = 1$ (ou : $\sum L_i - 1$, de degré au plus n , a $n+1$ racines distinctes)
- ☐ Justification que $P = 1$ est dans $\mathbb{K}_n[X]$ et que $P(a_i) = 1$

Exercice 15

ch04/x15

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés.

Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et que, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.

Corrigé. Chaque L_i est un produit de n facteurs de degré 1, donc appartient à $\mathbb{K}_n[X]$. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ compte $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$: il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$. En évaluant en a_k , comme $L_i(a_k) = \delta_{ik}$, on obtient $\lambda_k = 0$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. La famille est libre, donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Il existe $\mu_0, \dots, \mu_n$ tels que $P = \sum_{i=0}^n \mu_i L_i$. En évaluant en a_k , $P(a_k) = \mu_k$. Donc $P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.

ATTENDUS

- ☐ $n + 1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, espace de dimension $n + 1$: il suffit de montrer la liberté
- ☐ Évaluation en a_k d'une combinaison linéaire nulle, grâce à $L_i(a_k) = \delta_{ik}$
- ☐ Formule : évaluation des coordonnées en a_k (ou $P = \sum P(a_i) L_i$ a $n + 1$ racines et degré au plus n)

Exercice 16

ch04/x16

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Corrigé. Considérons l'application d'évaluation

$$\Phi: \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}, \quad P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

Elle est linéaire, entre deux espaces de même dimension $n + 1$. Soit $P \in \text{Ker } \Phi$: P est de degré au plus n et s'annule aux $n + 1$ points distincts $a_0, \dots, a_n$, donc $P = 0$. Ainsi Φ est injective, donc bijective puisque les dimensions sont égales.

L'unique antécédent de $(b_0, \dots, b_n)$ par Φ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i .

ATTENDUS

- ☐ Existence : surjectivité de l'application d'évaluation, ou polynôme $\sum b_i L_i$
- ☐ Unicité : la différence de deux solutions, de degré au plus n , a $n + 1$ racines distinctes, donc est nulle
- ☐ Rédaction qui fait apparaître le rôle de l'hypothèse « a_i distincts » et de la contrainte $\deg P \leq n$

Calculer le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, 3)$, d'abord directement, puis à l'aide de la formule du cours.

Corrigé. On a $V(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Directement, avec les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, qui ne changent pas le déterminant :

$$\det V(1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2.$$

Par la formule du cours,

$$\det V(1, 2, 3) = (2 - 1)(3 - 1)(3 - 2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

ATTENDUS

- ☐ Matrice $V(1, 2, 3)$ correcte
- ☐ Calcul direct : 2
- ☐ Formule $\prod_{i < j} (a_j - a_i) = (2 - 1)(3 - 1)(3 - 2) = 2$