

Questions de cours

Chapitre 5 — Normes

QUESTIONS DE COURS

Question 1

ch05/q01

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Définir une norme sur E .

Corrigé. Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. homogénéité : pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
2. inégalité triangulaire : pour tous $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$;
3. séparation : pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

ATTENDUS

- ☐ Application de E dans $\mathbb{R}^+$
- ☐ Homogénéité : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, avec le module de λ
- ☐ Inégalité triangulaire : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
- ☐ Séparation : $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

Question 2

ch05/q02

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Énoncer la seconde inégalité triangulaire.

Corrigé. Pour tous $x, y \in E$,

$$||x| - |y|| \leq \|x - y\|.$$

ATTENDUS

- ☐ Inégalité $||x| - |y|| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$, avec la valeur absolue à gauche

Question 3

ch05/q03

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Définir la distance associée à $\|\cdot\|$ et énoncer ses trois propriétés.

Corrigé. La distance associée à $\|\cdot\|$ est l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$. Pour tous $x, y, z \in E$:

1. séparation : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2. symétrie : $d(y, x) = d(x, y)$;
3. inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

ATTENDUS

- ☐ Définition $d(x, y) = \|x - y\|$
- ☐ Séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ☐ Symétrie : $d(y, x) = d(x, y)$
- ☐ Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Question 4

ch05/q04

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Définir $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.

Corrigé. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

ATTENDUS

- ☐ $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$
- ☐ $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$, avec des modules (pas x_k^2)
- ☐ $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

Question 5

ch05/q05

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Définir la norme associée au produit scalaire.

Corrigé. La norme associée au produit scalaire est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

ATTENDUS

- ☐ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Question 6

ch05/q06

Soit D un ensemble non vide et $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction bornée. Définir $\|f\|_\infty$. Sur quel espace vectoriel cela définit-il une norme ?

Corrigé. On pose

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in D\}.$$

Cela définit une norme sur l'espace $\mathcal{B}(D, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$.

ATTENDUS

- ☐ $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in D\}$ (borne supérieure, pas maximum)
- ☐ Norme sur $\mathcal{B}(D, \mathbb{K})$, l'espace des fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$

Question 7

ch05/q07

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. Définir la boule ouverte, la boule fermée et la sphère de centre a et de rayon r .

Corrigé. On pose

$$\overset{\circ}{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\},$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\},$$

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

ATTENDUS

- ☐ Boule ouverte : $\|x - a\| < r$
- ☐ Boule fermée : $\|x - a\| \leq r$
- ☐ Sphère : $\|x - a\| = r$

Question 8

ch05/q08

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Définir le segment $[x, y]$ d'extrémités $x, y \in E$, puis une partie convexe de E .

Corrigé. Le segment d'extrémités x et y est

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}.$$

Une partie D de E est convexe lorsque, pour tous $x, y \in D$, le segment $[x, y]$ est inclus dans D , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in D.$$

ATTENDUS

- ☐ Segment $[x, y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}$
- ☐ Convexe : pour tous $x, y \in D, [x, y] \subset D$

Question 9

ch05/q09

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Définir une partie bornée de E et énoncer sa caractérisation par la norme. Définir une suite bornée et une fonction bornée à valeurs dans E .

Corrigé. Une partie D de E est bornée s'il existe $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$ tels que $D \subset \overline{B}(a, r)$. Cela équivaut à l'existence de $M > 0$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in D$.

Une suite (u_n) d'éléments de E est bornée si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E , c'est-à-dire s'il existe $M > 0$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une fonction $f: I \rightarrow E$ est bornée si $f(I)$ est une partie bornée de E , c'est-à-dire s'il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M$ pour tout $x \in I$.

ATTENDUS

- ☐ Partie bornée : incluse dans une boule fermée $\overline{B}(a, r)$
- ☐ Caractérisation : il existe $M > 0$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in D$
- ☐ Suite bornée : $\|u_n\| \leq M$ pour tout n (ensemble des termes borné)
- ☐ Fonction bornée : $\|f(x)\| \leq M$ pour tout $x \in I$ (image bornée)

Question 10

ch05/q10

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, (x_n) une suite d'éléments de E et $\ell \in E$. Définir la convergence de (x_n) vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|$.

Corrigé. La suite (x_n) converge vers ℓ pour $\|\cdot\|$ lorsque

$$\|x_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

c'est-à-dire lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

ATTENDUS

- ☐ La suite réelle $(\|x_n - \ell\|)$ tend vers 0 (ou la version avec quantificateurs)

Question 11

ch05/q11

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et (x_n) une suite de $\mathbb{K}^d$. Énoncer le théorème de convergence composante par composante pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé. On écrit $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,d})$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d)$. La suite (x_n) converge vers ℓ pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, la suite $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k dans $\mathbb{K}$.

ATTENDUS

- ☐ Équivalence entre la convergence de (x_n) pour $\|\cdot\|_\infty$ et celle de chacune des d suites composantes
☐ La k -ième composante converge vers la k -ième composante ℓ_k de la limite

Question 12

ch05/q12

Énoncer le lien entre suite convergente et suite bornée dans un espace vectoriel normé. La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé. Toute suite convergente pour une norme est bornée pour cette norme.

La réciproque est fausse : dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, la suite $((-1)^n)$ est bornée mais ne converge pas.

ATTENDUS

- ☐ Convergente implique bornée
☐ Pour une même norme
☐ Réciproque fausse, avec un contre-exemple

Question 13

ch05/q13

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Énoncer les résultats sur la limite d'une combinaison linéaire de deux suites convergentes et sur celle du produit d'une suite convergente de scalaires par une suite convergente de vecteurs.

Corrigé. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' , et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Soient (λ_n) une suite de $\mathbb{K}$ convergeant vers λ et (x_n) une suite de E convergeant vers ℓ . Alors $(\lambda_n x_n)$ converge vers $\lambda\ell$.

ATTENDUS

- ☐ $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha\ell + \beta\ell'$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ fixés
- ☐ $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda\ell$ pour (λ_n) suite de scalaires convergeant vers λ

Question 14

ch05/q14

Énoncer le résultat sur les suites extraites d'une suite convergente d'un espace vectoriel normé.

Corrigé. Toute suite extraite d'une suite convergente de E est convergente, et sa limite est celle de la suite de départ.

ATTENDUS

- ☐ Toute suite extraite d'une suite convergente converge
- ☐ Vers la même limite

Question 15

ch05/q15

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Quand dit-on que N_1 et N_2 sont équivalentes ? Écrire la définition avec des quantificateurs.

Corrigé. Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes lorsque

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

ATTENDUS

- ☐ Les deux inégalités $N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$
- ☐ Ordre des quantificateurs : $\exists \alpha, \beta$ avant $\forall x \in E$, les constantes ne dépendent pas de x
- ☐ Constantes strictement positives

Question 16

ch05/q16

Quelles propriétés d'une suite d'un espace vectoriel normé sont conservées lorsqu'on remplace la norme par une norme équivalente ?

Corrigé. Si N_1 et N_2 sont équivalentes, une suite est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2 , et elle est convergente pour N_1 si et seulement si elle est convergente pour N_2 , avec la même limite.

ATTENDUS

- ☐ Le caractère borné
- ☐ La convergence
- ☐ Avec la même limite

Question 17

ch05/q17

Donner une méthode pour montrer que deux normes sur un même espace vectoriel ne sont pas équivalentes.

Corrigé. On exhibe une suite (x_n) de E qui n'a pas la même nature pour les deux normes : convergente pour l'une et non pour l'autre, ou bornée pour l'une et non pour l'autre. Deux normes équivalentes ayant les mêmes suites bornées et les mêmes suites convergentes, les deux normes ne sont pas équivalentes.

En pratique, on cherche souvent une suite (x_n) de vecteurs non nuls telle que $N_1(x_n)/N_2(x_n)$ ne soit pas bornée : une inégalité $N_1 \leq \alpha N_2$ est alors impossible.

ATTENDUS

- ☐ Exhiber une suite convergente (ou bornée) pour l'une des normes et non pour l'autre
- ☐ Justification : contraposée de l'invariance du caractère borné et de la convergence par équivalence des normes

Exercice 1

ch05/x01

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n: t \mapsto t^n$. Calculer $\|f_n\|_\infty$, $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_2$, où $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Corrigé. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est positive, donc $|f_n| = f_n$, et croissante sur $[0, 1]$, donc $\sup_{t \in [0, 1]} f_n(t) = f_n(1) = 1$. Ainsi $\|f_n\|_\infty = 1$. Ensuite,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

et, comme $|f_n|^2 = f_n^2: t \mapsto t^{2n}$,

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^1 t^{2n} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

ATTENDUS

- ☐ $\|f_n\|_\infty = 1$ (f_n positive et croissante, borne supérieure en 1)
- ☐ $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$
- ☐ $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (intégrale de t^{2n} , puis racine)

Exercice 2

ch05/x02

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que, pour tous $x, y \in E$, $|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$.

Corrigé. Soient $x, y \in E$. En écrivant $x = (x - y) + y$, l'inégalité triangulaire donne $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, c'est-à-dire $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Par homogénéité, $\|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\|$, donc l'inégalité précédente, appliquée en échangeant x et y , donne $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.

Le réel $\|x - y\|$ majore $\|x\| - \|y\|$ et son opposé : il majore donc leur valeur absolue.

ATTENDUS

- ☐ $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ en écrivant $x = (x - y) + y$
- ☐ Échange de x et y , avec $\|y - x\| = \|x - y\|$ par homogénéité
- ☐ Conclusion : un réel qui majore $\|x\| - \|y\|$ et son opposé majore leur valeur absolue

Exercice 3

ch05/x03

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée. Montrer que, pour tous $x, y, z \in E$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, $d(y, x) = d(x, y)$ et $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Corrigé. Soient $x, y, z \in E$.

Si $x = y$, alors $d(x, y) = \|0_E\| = \|0 \cdot 0_E\| = 0$ par homogénéité. Réciproquement, si $d(x, y) = \|x - y\| = 0$, l'axiome de séparation donne $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$.

Comme $y - x = (-1)(x - y)$, l'homogénéité donne $d(y, x) = |-1| \|x - y\| = d(x, y)$.

Enfin $x - z = (x - y) + (y - z)$, donc l'inégalité triangulaire de la norme donne

$$d(x, z) = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

ATTENDUS

- ☐ Séparation dans les deux sens : $\|0_E\| = 0$ par homogénéité, et $\|x - y\| = 0 \Rightarrow x - y = 0_E$ par séparation de la norme
- ☐ Symétrie par homogénéité avec le scalaire -1
- ☐ Inégalité triangulaire en écrivant $x - z = (x - y) + (y - z)$

Exercice 4

ch05/x04

Montrer que $\|\cdot\|_1 : x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Corrigé. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_1$ est une somme de réels positifs, donc un réel positif. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Homogénéité :

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^n |\lambda| |x_k| = |\lambda| \|x\|_1.$$

Inégalité triangulaire : pour tout k , $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$, et en sommant,

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Séparation : si $\|x\|_1 = 0$, c'est une somme nulle de termes positifs, donc $|x_k| = 0$ pour tout k , et $x = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Homogénéité : $|\lambda x_k| = |\lambda| |x_k|$, puis $|\lambda|$ en facteur de la somme
- ☐ Inégalité triangulaire en sommant les inégalités triangulaires du module
- ☐ Séparation : une somme nulle de termes positifs a tous ses termes nuls

Exercice 5

ch05/x05

Soit D un ensemble non vide. Montrer que $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in D\}$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{B}(D, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$.

Corrigé. Soient $f, g \in \mathcal{B}(D, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\{|f(t)|, t \in D\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}^+$, donc $\|f\|_\infty$ est bien définie et positive.

Homogénéité : pour toute partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{R}^+$, $\sup(kA) = k \sup(A)$. En l'appliquant à $k = |\lambda| \geq 0$,

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t \in D} |\lambda| |f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in D} |f(t)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

Inégalité triangulaire : pour tout $t \in D$,

$$|(f+g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Le réel $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|(f+g)(t)|, t \in D\}$, donc majore sa borne supérieure : $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Séparation : si $\|f\|_\infty = 0$, alors pour tout $t \in D$, $0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty = 0$, donc $f(t) = 0$. Ainsi $f = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Existence de la borne supérieure : partie non vide et majorée de $\mathbb{R}^+$
- ☐ Homogénéité par $\sup(kA) = k \sup(A)$ avec $k = |\lambda| \geq 0$
- ☐ Inégalité triangulaire : majoration de $|f(t) + g(t)|$ pour chaque t , puis passage à la borne supérieure
- ☐ Séparation : $0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty = 0$ pour tout t

Exercice 6

ch05/x06

Montrer que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ définit une norme sur $C^0([0, 1], \mathbb{K})$.

Corrigé. Pour $f \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$, la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $\|f\|_1$ est bien définie, et positive par positivité de l'intégrale. Soient $f, g \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Homogénéité : par linéarité de l'intégrale, $|\lambda|$ étant une constante,

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda| |f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| \|f\|_1.$$

Inégalité triangulaire : pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$, et par croissance de l'intégrale,

$$\|f+g\|_1 \leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Séparation : supposons $\|f\|_1 = 0$. La fonction $|f|$ est continue sur $[0, 1]$, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, et les bornes vérifient $0 < 1$: l'intégrale est prise dans le bon sens, sur un intervalle non réduit à un point. Donc $|f|$ est nulle sur $[0, 1]$, et $f = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Homogénéité par linéarité de l'intégrale, avec $|\lambda x| = |\lambda| |x|$
- ☐ Inégalité triangulaire en intégrant $|f+g| \leq |f| + |g|$ (croissance de l'intégrale)
- ☐ Séparation par les quatre hypothèses : $|f|$ continue, positive, d'intégrale nulle, bornes $0 < 1$ dans le bon sens et distinctes

Exercice 7

ch05/x07

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est convexe.

Corrigé. Soient $x, y \in \overline{B}(a, r)$ et $t \in [0, 1]$. On écrit

$$(1-t)x + ty - a = (1-t)(x-a) + t(y-a),$$

donc, par inégalité triangulaire et homogénéité, $1-t$ et t étant positifs,

$$\|(1-t)x + ty - a\| \leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| \leq (1-t)r + tr = r.$$

Ainsi $(1-t)x + ty \in \overline{B}(a, r)$: la boule fermée est convexe.

ATTENDUS

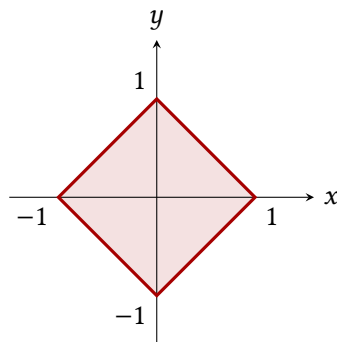
- ☐ Écriture $(1-t)x + ty - a = (1-t)(x-a) + t(y-a)$
- ☐ Majoration par $(1-t)\|x-a\| + t\|y-a\|$ (inégalité triangulaire et homogénéité, $1-t \geq 0$ et $t \geq 0$)
- ☐ Conclusion $\leq (1-t)r + tr = r$

Exercice 8

ch05/x08

Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée de centre 0 pour la norme $\|\cdot\|_1$. Justifier.

Corrigé. La boule unité fermée est $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$. Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, la condition s'écrit $x + y \leq 1$: dans le quart de plan $x \geq 0, y \geq 0$, la partie B est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, délimité par la droite d'équation $x + y = 1$. La condition $|x| + |y| \leq 1$ ne change pas quand on remplace x par $-x$ ou y par $-y$: B est symétrique par rapport aux deux axes, et s'obtient en reproduisant ce triangle dans les quatre quarts de plan. C'est le carré de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$, bords compris.



ATTENDUS

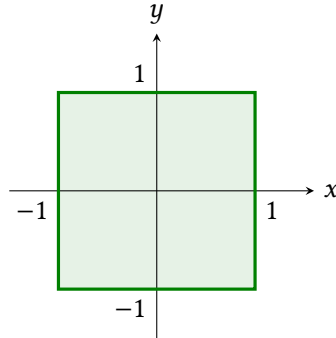
- ☐ Condition $|x| + |y| \leq 1$
- ☐ Dans le quart de plan $x, y \geq 0$, le triangle $x + y \leq 1$; les autres par symétrie (ou les quatre cas de signes)
- ☐ Carré de sommets $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, bords compris

Exercice 9

ch05/x09

Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée de centre 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Justifier.

Corrigé. La boule unité fermée est $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}$. Or $\max(|x|, |y|) \leq 1$ si et seulement si $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$: le plus grand des deux est inférieur à 1 si et seulement si tous les deux le sont. Cela s'écrit $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$. Ainsi $B = [-1, 1]^2$: c'est le carré de sommets $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$, bords compris.



ATTENDUS

- ☐ $\max(|x|, |y|) \leq 1$ si et seulement si $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$
- ☐ Carré $[-1, 1]^2$, bords compris

Exercice 10

ch05/x10

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E convergeant vers ℓ et vers ℓ' pour cette norme. Montrer que $\ell = \ell'$.

Corrigé. Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell \neq \ell'$. Par l'axiome de séparation, $\|\ell - \ell'\| > 0$; posons $\varepsilon = \frac{1}{3} \|\ell - \ell'\| > 0$. Comme $x_n \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$; de même, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - \ell'\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N'$. Pour $n = \max(N, N')$, l'inégalité triangulaire donne

$$\|\ell - \ell'\| = \|(\ell - x_n) + (x_n - \ell')\| \leq \|\ell - x_n\| + \|x_n - \ell'\| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3} \|\ell - \ell'\|,$$

d'où $\|\ell - \ell'\| \leq 0$, ce qui contredit $\|\ell - \ell'\| > 0$. Donc $\ell = \ell'$.

ATTENDUS

- ☐ Par l'absurde : $\ell \neq \ell'$, donc $\|\ell - \ell'\| > 0$ par séparation, et choix de ε (par exemple $\frac{1}{3} \|\ell - \ell'\|$)
- ☐ Rang commun $n \geq \max(N, N')$ à partir duquel les deux inégalités valent
- ☐ $\|\ell - \ell'\| \leq \|\ell - x_n\| + \|x_n - \ell'\| \leq 2\varepsilon$ en intercalant x_n
- ☐ Contradiction avec $\|\ell - \ell'\| > 0$

Exercice 11

ch05/x11

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute suite convergente de E est bornée.

Corrigé. Soit (x_n) une suite de E convergeant vers ℓ , c'est-à-dire telle que $\|x_n - \ell\| \rightarrow 0$. La suite réelle $(\|x_n - \ell\|)$ est convergente, donc bornée : il existe $M > 0$ tel que $\|x_n - \ell\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$\|x_n\| = \|(x_n - \ell) + \ell\| \leq \|x_n - \ell\| + \|\ell\| \leq M + \|\ell\|.$$

Le réel $M + \|\ell\|$ ne dépend pas de n : la suite (x_n) est bornée.

ATTENDUS

- ☐ Majoration de $\|x_n - \ell\|$ par une constante M (suite réelle convergente donc bornée, ou $\varepsilon = 1$ puis maximum des premiers termes)
- ☐ $\|x_n\| \leq \|x_n - \ell\| + \|\ell\|$ par inégalité triangulaire
- ☐ Borne $M + \|\ell\|$ indépendante de n

Exercice 12

ch05/x12

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, (x_n) une suite de $\mathbb{K}^d$ et $\ell \in \mathbb{K}^d$. On note $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,d})$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d)$. Montrer que (x_n) converge vers ℓ pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si $x_{n,k} \rightarrow \ell_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - \ell\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} |x_{n,k} - \ell_k|.$$

Supposons que $x_n \rightarrow \ell$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout k et tout n , $0 \leq |x_{n,k} - \ell_k| \leq \|x_n - \ell\|_\infty$, et le membre de droite tend vers 0 : par encadrement, $x_{n,k} \rightarrow \ell_k$.

Réciproquement, supposons que $x_{n,k} \rightarrow \ell_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque k , il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n,k} - \ell_k| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_k$. Posons $N = \max(N_1, \dots, N_d)$. Pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_k$ pour tout k , donc

$$\|x_n - \ell\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} |x_{n,k} - \ell_k| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $x_n \rightarrow \ell$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

ATTENDUS

- ☐ $\|x_n - \ell\|_\infty = \max_k |x_{n,k} - \ell_k|$
- ☐ Sens direct : $0 \leq |x_{n,k} - \ell_k| \leq \|x_n - \ell\|_\infty$ et encadrement
- ☐ Réciproque : rang $N = \max(N_1, \dots, N_d)$ à partir des rangs N_k de chaque composante (ou majoration du maximum par la somme des $|x_{n,k} - \ell_k|$)
- ☐ Le maximum porte sur un nombre fini de composantes

Exercice 13

ch05/x13

Étudier la convergence, dans $\mathbb{R}^3$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \left(\frac{2n+1}{n+3}, \frac{(-1)^n}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right).$$

Corrigé. On étudie chaque composante. D'abord

$$\frac{2n+1}{n+3} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2, \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ensuite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ et, comme $\ln(1+u) \sim u$ en 0, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ par continuité de l'exponentielle.

Les trois composantes convergent, donc, par convergence composante par composante, (u_n) converge vers $(2, 0, e)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

ATTENDUS

- ☐ Limites 2 et 0 des deux premières composantes
- ☐ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow e$, avec $\ln(1+u) \sim u$
- ☐ Conclusion par convergence composante par composante : limite $(2, 0, e)$

Exercice 14

ch05/x14

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, identifié à $\mathbb{K}^4$, de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et déterminer la nature de la suite (A^n) .

Corrigé. On écrit $A = I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = 0$, donc $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Comme I_2 et N commutent, la formule du binôme donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k.$$

Pour $n \geq 1$, seuls les termes $k=0$ et $k=1$ subsistent : $A^n = I_2 + nN$. Pour $n=0$, la somme se réduit au terme $k=0$ et $A^0 = I_2$, ce qui est encore $I_2 + 0 \cdot N$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient d'indice $(1, 2)$ de A^n vaut n et ne converge pas. Si (A^n) convergerait pour $\|\cdot\|_\infty$, chaque coefficient convergerait par convergence composante par composante. La suite (A^n) diverge donc pour $\|\cdot\|_\infty$.

ATTENDUS

- ☐ $A = I_2 + N$ avec $N^2 = 0$; binôme justifié par la commutation de I_2 et N , termes $k \geq 2$ nuls
- ☐ Cas $n=0$ traité à part : la somme se réduit à $I_2 = I_2 + 0 \cdot N$
- ☐ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ Divergence : le coefficient n ne converge pas (convergence composante par composante), ou $\|A^n\|_\infty = n$ non bornée

Exercice 15

ch05/x15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$. Qu'en déduit-on ?

Corrigé. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Le maximum $\|x\|_\infty$ est l'un des $|x_k|$, et tous les termes de la somme $\sum_{k=1}^n |x_k|$ sont positifs : la somme est supérieure à celui de ses termes qui vaut $\|x\|_\infty$, d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$.

Réciproquement, $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ pour tout k , et en sommant ces n inégalités, $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$.

Ce sont les deux inégalités de la définition, avec les constantes 1 et n : les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

ATTENDUS

- ☐ $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$: le maximum est l'un des termes d'une somme de réels positifs
- ☐ $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$ en sommant n inégalités $|x_k| \leq \|x\|_\infty$
- ☐ Conclusion : $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$

Exercice 16

ch05/x16

Montrer que, pour toute $f \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

Corrigé. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{K})$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$. Par croissance de l'intégrale, le segment $[0, 1]$ étant de longueur 1,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

ATTENDUS

- ☐ $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $t \in [0, 1]$
- ☐ Intégration de l'inégalité sur $[0, 1]$, de longueur 1 (croissance de l'intégrale)

Exercice 17

ch05/x17

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n$. Montrer que (f_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$ mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$. Qu'en déduit-on pour ces deux normes ?

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: la suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$. La fonction f_n est positive et croissante sur $[0, 1]$, donc $\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1) = 1$, qui ne tend pas vers 0 : (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_\infty$.

Si les deux normes étaient équivalentes, la convergence vers 0 pour $\|\cdot\|_1$ entraînerait la convergence vers 0 pour $\|\cdot\|_\infty$. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes sur E .

ATTENDUS

- ☐ $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$
- ☐ $\|f_n\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0
- ☐ Conclusion : normes non équivalentes, car l'équivalence conserverait la convergence vers 0

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , et (x_n) une suite de E convergeant vers ℓ pour N_1 . Montrer que (x_n) converge vers ℓ pour N_2 .

Corrigé. Par équivalence des normes, il existe $\beta > 0$ tel que $N_2 \leq \beta N_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq N_2(x_n - \ell) \leq \beta N_1(x_n - \ell).$$

Comme $x_n \rightarrow \ell$ pour N_1 , le membre de droite tend vers 0, donc $N_2(x_n - \ell) \rightarrow 0$ par encadrement : (x_n) converge vers ℓ pour N_2 .

ATTENDUS

- ☐ Encadrement $0 \leq N_2(x_n - \ell) \leq \beta N_1(x_n - \ell)$, avec β donné par l'équivalence
- ☐ Conclusion par encadrement, $N_1(x_n - \ell) \rightarrow 0$