

Séance à distance

Réduction (2) : éléments propres

Mode d'emploi

- **Travail par groupe de colle** dans votre salle. Tout le monde traite les parties 1, 2 et 3 dans l'ordre. Je passe régulièrement dans chaque groupe. Si vous êtes bloqués, signalez-le (chat ou main levée) plutôt que d'attendre.
- Les étoiles indiquent la difficulté : $\star$ application directe, $\star\star$ demande de l'initiative, $\star\star\star$ difficile.
- Les numéros entre parenthèses (7.28, 7.30...) renvoient au polycopié, partie III.

Dans toute la fiche, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. *Réduire* un endomorphisme u , c'est chercher une base dans laquelle sa matrice est simple ; les bons vecteurs de base sont ceux qui vérifient $u(e) = \lambda e$. On leur donne aujourd'hui un nom.

1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

1.1 Définitions

Définitions (7.28 et 7.30)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Une **droite** D de E (sous-espace de dimension 1) est dite **stable** par u si $u(D) \subset D$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel x est appelé **vecteur propre** de u associé à λ .

L'égalité $u(x) = \lambda x$ s'appelle l'*équation aux éléments propres* de u ; pour λ fixé, c'est une équation *linéaire* d'inconnue x , qui s'écrit aussi $(u - \lambda \text{Id})(x) = 0$.

Exercice 1 – guidé, pour tous : un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Calculer $u(1, 1)$ et $u(1, -1)$. En déduire que les droites $D_1 = \text{Vect}((1, 1))$ et $D_2 = \text{Vect}((1, -1))$ sont stables par u . (Prendre un vecteur quelconque (α, α) de D_1 et montrer que son image est dans D_1 .)
2. La droite $\text{Vect}((1, 0))$ est-elle stable par u ?
3. Donner deux valeurs propres de u et un vecteur propre associé à chacune.
4. Y en a-t-il d'autres ? Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Écrire l'équation $u(x, y) = \lambda(x, y)$ comme un système de deux équations. En ajoutant puis en soustrayant les deux lignes, montrer qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} 3(x + y) = \lambda(x + y) \\ -(x - y) = \lambda(x - y). \end{cases}$$

Résoudre ce système en discutant selon la valeur de λ (trois cas : $\lambda = 3$, $\lambda = -1$, et $\lambda \notin \{3, -1\}$). Conclure : les valeurs propres de u sont exactement 3 et -1 , et déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chacune.

5. Soit $x \in E$ non nul. Montrer que x est vecteur propre de u si et seulement si la droite $\text{Vect}(x)$ est stable par u . (*Deux sens à traiter.*) En déduire que D_1 et D_2 sont les seules droites de $\mathbb{R}^2$ stables par u .
6. Écrire la matrice de u dans la base $((1, 1), (1, -1))$. Qu'a-t-on fait ?

Attention

- Un vecteur propre est **non nul** par définition : $u(0) = \lambda \cdot 0$ est vrai pour tout λ et ne dit rien.
- En revanche, la **valeur propre** λ peut être nulle : 0 est valeur propre de u si et seulement s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\text{Ker } u \neq \{0\}$ (u non injectif).

Exercice 2 – ★ vrai ou faux.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Justifier ou donner un contre-exemple.

1. Si x est vecteur propre de u associé à λ , alors $2x$ aussi.
2. Si x et y sont vecteurs propres de u associés à la même valeur propre λ , alors $x + y$ aussi.
3. Un vecteur propre peut être associé à deux valeurs propres distinctes.
4. Si u est injectif, alors u n'a pas de valeur propre.
5. Si u est inversible et λ est valeur propre de u , alors $\lambda \neq 0$ et $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u^{-1} . (*Appliquer u^{-1} à l'égalité $u(x) = \lambda x$.*)
6. ★★ Si x et y sont vecteurs propres associés à deux valeurs propres *distinctes* $\lambda \neq \mu$, alors $x + y$ n'est pas vecteur propre. (*Supposer $u(x + y) = \nu(x + y)$, écrire $(\lambda - \nu)x + (\mu - \nu)y = 0$ et distinguer $\nu = \lambda$ ou non.*)

Exercice 3 – ★ des exemples dans toutes sortes d'espaces.

Déterminer toutes les valeurs propres des endomorphismes suivants, et pour chacune l'ensemble des vecteurs propres associés.

1. L'homothétie $u = \mu \text{Id}_E$, avec $\mu \in \mathbb{K}$ et $E \neq \{0\}$.
2. Le quart de tour $r : (x, y) \mapsto (-y, x)$ de $\mathbb{R}^2$. (*Montrer que $r(x, y) = \lambda(x, y)$ force $x = -\lambda^2 x$ et $y = -\lambda^2 y$.*) Reprendre la question en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{C}^2$.
3. La dérivation $u : f \mapsto f'$ sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (*Résoudre l'équation différentielle $f' = \lambda f$.*)
4. La dérivation $u : P \mapsto P'$ sur $E = \mathbb{K}_n[X]$. (*Comparer les degrés de P' et de λP lorsque $\lambda \neq 0$.*)
5. Un projecteur p sur F parallèlement à G , avec $E = F \oplus G$ et $F, G \neq \{0\}$. (*Que vaut $p(x)$ pour $x \in F$? pour $x \in G$? Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, décomposer $x = x_F + x_G$ dans $u(x) = \lambda x$.*)
6. Même question pour la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

1.2 Sous-espaces propres, spectre

Définitions (7.34 et 7.38)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . Le **sous-espace propre** de u associé à λ est

$$E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}).$$

C'est un sous-espace vectoriel de E (un noyau!), formé des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul. Il n'est jamais réduit à $\{0\}$.

Si E est de dimension finie, le **spectre** de u , noté $\text{Sp}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

Exercice 4 – ★ traduction.

1. Reprendre les exercices 1 et 3 et donner, à chaque fois que cela a un sens, le spectre et les sous-espaces propres (*donner une base ou une description simple de chacun*). Que valent $E_1(p)$ et $E_0(p)$ pour un projecteur p ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Compléter avec soin : λ est valeur propre de $u \iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \iff u - \lambda \text{Id}$ n'est pas Si de plus E est de dimension finie, $\iff u - \lambda \text{Id}$ n'est pas $\iff \det(u - \lambda \text{Id}) = 0$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Montrer que $0 \in \text{Sp}(u)$ si et seulement si u n'est pas inversible.

À retenir

- λ valeur propre $\iff$ il existe $x \neq 0$ avec $u(x) = \lambda x \iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \iff u - \lambda \text{Id}$ non injectif.
- Chercher les vecteurs propres, c'est chercher les droites stables.
- $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ est un sous-espace vectoriel ; le vecteur nul y est, mais n'est pas un vecteur propre.

2 Cas des matrices : résoudre l'équation $AX = \lambda X$

Définition (7.40 et 7.42)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de A s'il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$; X est alors un **vecteur propre** de A associé à λ , et $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est le sous-espace propre associé. Le **spectre** de A dans $\mathbb{K}$, noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

Ce sont exactement les éléments propres de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Plus généralement, si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et si X est la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, alors $u(x) = \lambda x \iff AX = \lambda X$: u et A ont les mêmes valeurs propres, et les vecteurs propres se correspondent.

Méthode : déterminer les éléments propres d'une matrice (pour l'instant)

1. Écrire l'équation $AX = \lambda X$ comme un système linéaire *homogène* d'inconnues $x_1, \dots, x_n$, dont les coefficients dépendent de λ .
2. Le résoudre en discutant selon λ : les valeurs propres sont les λ pour lesquels il y a une solution **non nulle** ; pour chacune, l'ensemble des solutions est $E_\lambda(A)$, dont on donne une base.
3. Vérifier : pour chaque vecteur X trouvé, calculer AX et constater $AX = \lambda X$.

On apprendra bientôt à trouver les valeurs propres avant de résoudre le système (polynôme caractéristique, partie IV). En attendant, les propriétés de la partie 3 donneront déjà des « candidats ».

Exemple détaillé. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Étape 1 : le système.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ 3y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (2 - \lambda)x + y = 0 \\ (3 - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Étape 2 : discussion.

- Si $\lambda \neq 3$, la seconde ligne donne $y = 0$, et la première devient $(2 - \lambda)x = 0$. Si de plus $\lambda \neq 2$, alors $x = 0$: la seule solution est $X = 0$, et λ n'est pas valeur propre. Si $\lambda = 2$, x est quelconque : les solutions sont les $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donc 2 est valeur propre et $E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda = 3$, la seconde ligne est toujours vraie et la première donne $y = x$: 3 est valeur propre et $E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{2, 3\}$.

Étape 3 : vérification. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et la réduction ? Les deux vecteurs propres $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : (X_1, X_2)

est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. Dans cette base, l'endomorphisme $X \mapsto AX$ a pour matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(les colonnes sont les coordonnées de $AX_1 = 2X_1$ et $AX_2 = 3X_2$). Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage, on a $A = PDP^{-1}$: **on a réduit** A . Remarquer enfin que $\{2, 3\}$ est exactement l'ensemble des racines de polynôme annulateur $(X - 2)(X - 3)$ de A (le vérifier)... (voir partie 3).

Exercice 5 – guidé, pour tous.

Déterminer le spectre et les sous-espaces propres (avec une base de chacun) des matrices suivantes, en suivant la méthode.

1. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de N ?
2. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Généraliser : quel est le spectre d'une matrice diagonale ?
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. (Dans la seconde équation, exprimer y en fonction de x lorsque $\lambda \neq 0$, et reporter. Traiter $\lambda = 0$ à part.) Vérifier que $X^2 - 3X + 2$ annule A et comparer.
4. $\star J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Remarquer que $JX = sU$ où $s = x + y + z$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.) Donner une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de J , et écrire sans calcul la matrice de $X \mapsto JX$ dans cette base.

Exercice 6 – $\star$ en autonomie : décaler une matrice.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I_3$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. Montrer que $AX = \lambda X \iff JX = (\lambda + 1)X$. En déduire, à partir de l'exercice 5, le spectre et les sous-espaces propres de A sans résoudre de nouveau système.
2. Généraliser : si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, exprimer $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(B + \alpha I_n)$ et $E_{\lambda}(B + \alpha I_n)$ en fonction de ceux de B .

3. Soit P la matrice dont les colonnes sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible

et donner, sans calculer P^{-1} , la matrice $P^{-1}AP$. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}$ sous la forme PD^kP^{-1} ; On pourra comparer avec la méthode du polynôme annulateur, sachant que $A^2 - A - 2I_3 = 0$.

Exercice 7 – ★ une rotation n'a qu'une droite stable.

Soit $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ et $e_1 = (1, 0, 1)$. On admet que B est la matrice d'une rotation d'axe $\text{Vect}(e_1)$, et que la seule droite de $\mathbb{R}^3$ stable par B est $\text{Vect}(e_1)$.

1. Vérifier que 1 est valeur propre de B et que e_1 est un vecteur propre associé.
2. En utilisant le fait admis, déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B)$ et $E_1(B)$.
3. Pourquoi ne pourra-t-on jamais écrire $B = PDP^{-1}$ avec D diagonale réelle ? (Si c'était le cas, que seraient les colonnes de P ?)

3 Propriétés

3.1 Valeurs propres et polynômes annulateurs

Exercice 8 – guidé, pour tous : démontrer la proposition 7.44.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$.
2. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. En déduire que $P(u)(x) = P(\lambda)x$. (Donc si $x \neq 0$, x est vecteur propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$: c'est le corollaire 7.48.)
3. On suppose maintenant que P est un polynôme annulateur de u et que $x \neq 0$. Montrer que $P(\lambda) = 0$.

Proposition 7.44 et corollaire 7.48

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
- Si P est un polynôme annulateur de u , alors **toute valeur propre de u est racine de P** : $\text{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$.

Même chose pour une matrice A : $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines (dans $\mathbb{K}$) de tout polynôme annulateur de A .

Attention

La réciproque est **fausse** : une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre. Un annulateur donne des *candidats* ; il faut ensuite vérifier, pour chaque candidat, qu'il existe bien un vecteur propre (exercice 9, question 4).

Exercice 9 – ★ des candidats.

1. Soit p un projecteur de E et s une symétrie de E . Retrouver, avec un polynôme annulateur, que $\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $\text{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ *nilpotent* : il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = 0$. Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$. Si E est de dimension finie non nulle, montrer que $\text{Sp}(u) = \{0\}$. (Un endomorphisme nilpotent est-il injectif ?)
3. Reprendre les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (annulée par $X^2 - 3X + 2$), $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (annulée par $X^2 + 1$) et B (la rotation, annulée par $(X - 1)(X^2 + 1)$) : que donne la proposition pour $\text{Sp}_{\mathbb{R}}$? pour $\text{Sp}_{\mathbb{C}}$? Comparer aux résultats de la partie 2.
4. *Réciproque fausse.* Donner un polynôme annulateur de degré 2 de I_2 dont l'une des racines n'est pas valeur propre de I_2 . Même question avec le projecteur $p = \text{Id}_E$ et le polynôme $X^2 - X$.

5. ★★ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$ et E de dimension finie. Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 0, 1\}$. Donner un exemple (matrice de taille 3) où les trois sont valeurs propres, un exemple où seule 1 est valeur propre.

Exercice 10 – ★ utiliser le corollaire 7.48 pour ne pas calculer.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (vecteurs propres pour 3 et -1 , exercice 1).

1. Soit $C = A^3 - 2A + I_2$. Sans calculer C , donner CX_1 et CX_2 . En déduire la matrice de $X \mapsto CX$ dans la base (X_1, X_2) , puis $\text{Sp}(C)$. (Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, écrire un vecteur propre $X = \alpha X_1 + \beta X_2$.)
2. Même question pour A^k , $k \in \mathbb{N}$. Retrouver ainsi la formule $A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + (-1)^k & 3^k - (-1)^k \\ 3^k - (-1)^k & 3^k + (-1)^k \end{pmatrix}$ (écrire les vecteurs de la base canonique en fonction de X_1, X_2).
3. Donner $\text{Sp}(A^{-1})$ et ses vecteurs propres (exercice 2, question 5).

3.2 Les sous-espaces propres sont en somme directe

Exercice 11 – ★ deux valeurs propres distinctes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de u .

1. Soit $x \in E_\lambda(u) \cap E_\mu(u)$. Calculer $u(x)$ de deux façons et en déduire $x = 0$. Conclure : $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0\}$, la somme $E_\lambda(u) + E_\mu(u)$ est directe.
2. Soient x un vecteur propre associé à λ et y un vecteur propre associé à μ . Montrer que (x, y) est libre. (Si $\alpha x + \beta y = 0$, appliquer u et combiner les deux égalités.)

Le cours (proposition 7.50, démontrée avec les polynômes de Lagrange) généralise ce résultat à un nombre quelconque de valeurs propres distinctes.

Proposition 7.50 et corollaires 7.51, 7.53

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.

- Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont **en somme directe**.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est **libre**.

Même chose pour les matrices.

Exercice 12 – ★ conséquences en dimension finie.

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u a au plus n valeurs propres distinctes.
2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u . Montrer que $\dim E_{\lambda_1}(u) + \dots + \dim E_{\lambda_p}(u) \leq n$. (Concaténer des bases de chaque sous-espace propre.)
3. Si u a exactement n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres, et écrire la matrice de u dans cette base. Que dire alors de chaque $E_{\lambda_i}(u)$?
4. Relire les exercices 5 et 6 : dans quels cas la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut-elle n ? dans quels cas est-elle strictement plus petite?
5. *Dimension infinie.* Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts. Montrer que la famille de fonctions $(t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \dots, t \mapsto e^{\lambda_p t})$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (exercice 3, question 3).

3.3 Endomorphismes qui commutent

Exercice 13 – ★ démontrer la proposition 7.37.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, et λ une valeur propre de u .

1. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Calculer $u(v(x))$ et en déduire que $v(x) \in E_\lambda(u)$. Conclure : **les sous-espaces propres de u sont stables par v** .
2. Application : donner un endomorphisme v qui commute avec u et pour lequel ce résultat est déjà connu (cours 7.10).
3. ★★ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $AM = MA$. Montrer que $MX_1 \in \text{Vect}(X_1)$

et $MX_2 \in \text{Vect}(X_2)$ (notations de l'exercice 10). En déduire que $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $a, b \in \mathbb{K}$, puis que le commutant de A est de dimension 2. Comparer avec le commutant de $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

À retenir

- **Annulateur $\Rightarrow$ candidats.** Les valeurs propres sont parmi les racines de n'importe quel polynôme annulateur, mais il faut ensuite *vérifier* chaque candidat.
- **Vecteurs propres de $P(u)$.** Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$: on calcule $A^k X$, $A^{-1}X$, $(A^3 - 2A)X$ sans aucun produit de matrices.
- **Somme directe.** Les sous-espaces propres sont en somme directe ; des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes forment une famille libre. En dimension n : au plus n valeurs propres, et $\sum_\lambda \dim E_\lambda(u) \leq n$. Quand il y a égalité, on peut construire une base de vecteurs propres : c'est la *diagonalisation*, objet de la suite du chapitre.
- **Commutation.** Si $u \circ v = v \circ u$, les sous-espaces propres de u sont stables par v .

4 Exercices pour ceux qui vont vite

Exercice 14 – ★ une matrice par blocs.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et une base de chaque sous-espace propre. Donner

une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A , et la matrice de $X \mapsto AX$ dans cette base.

Exercice 15 – ★★ l'endomorphisme $P \mapsto XP'$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $u : P \mapsto XP'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Calculer $u(X^k)$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$. En déduire $n + 1$ valeurs propres de u .
3. À l'aide de l'exercice 12, montrer que u n'a pas d'autre valeur propre et que $E_k(u) = \text{Vect}(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Écrire la matrice de u dans la base canonique de E .
4. Retrouver $\text{Sp}(u)$ et $E_k(u)$ directement, en résolvant $XP' = \lambda P$ (écrire $P = \sum a_k X^k$ et comparer les coefficients).

Exercice 16 – ★★ la transposition.

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $T : M \mapsto M^\top$.

1. Justifier que $T \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $T \circ T$. En déduire un polynôme annulateur de T et les candidats valeurs propres.

2. Déterminer $E_1(T)$ et $E_{-1}(T)$ (ce sont des ensembles de matrices bien connus), et une base de chacun. Que vaut $\dim E_1(T) + \dim E_{-1}(T)$?
3. En déduire une base de E formée de vecteurs propres de T et la matrice de T dans cette base. Quelle est la nature géométrique de T ?

Exercice 17 – ** matrices de rang 1.

Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles. On pose $A = UV^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $c = V^\top U \in \mathbb{K}$ (un scalaire).

1. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, montrer que $AX = (V^\top X)U$. Quel est le rang de A ?
2. Calculer AU et A^2 . En déduire un polynôme annulateur de degré 2 de A , puis $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \{0, c\}$.
3. Déterminer $E_0(A)$ et sa dimension.
4. On suppose $c \neq 0$. Montrer que c est valeur propre, déterminer $E_c(A)$, et en déduire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A . Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 5 sur J ($J = UU^\top$ avec U de coefficients tous égaux à 1).
5. On suppose $c = 0$. Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{0\}$ et que $A^2 = 0$. Peut-on trouver une base de vecteurs propres de A ?

Exercice 18 – * valeurs propres de $u \circ v$ et de $v \circ u$.**

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $u \circ v$, et x un vecteur propre associé. Montrer que $v(x) \neq 0$, puis que $v(x)$ est vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ .
2. En déduire que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres *non nulles*.
3. Si E est de dimension finie, montrer que 0 est valeur propre de $u \circ v$ si et seulement si 0 est valeur propre de $v \circ u$ (*penser au déterminant*). Conclure : $\text{Sp}(u \circ v) = \text{Sp}(v \circ u)$.
4. *En dimension infinie, c'est faux.* Sur $E = \mathbb{K}[X]$, soient $u : P \mapsto P'$ et $v : P \mapsto XP$. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$, et montrer que 0 est valeur propre de l'un mais pas de l'autre.

Exercice 19 – * commutant d'un endomorphisme à n valeurs propres distinctes.**

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec e_i un vecteur propre associé à λ_i . On note $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$ et $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Justifier que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et que $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$ pour tout i .
2. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Montrer qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $v(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout i . Que dire de la matrice de v dans la base $(e_1, \dots, e_n)$?
3. Réciproquement, montrer que tout endomorphisme dont la matrice dans $(e_1, \dots, e_n)$ est diagonale commute avec u . En déduire $\dim \mathcal{C}(u) = n$.
4. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$, de coefficients diagonaux $\mu_1, \dots, \mu_n$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i (*interpolation de Lagrange*), puis que $v = P(u)$. Conclure : $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.