

Séance à distance – Corrigé

Réduction (2) : éléments propres

Le réflexe à avoir tout au long du corrigé

Deux façons de montrer que λ est valeur propre

Exhiber un vecteur. Pour montrer que λ est valeur propre, il suffit de donner un vecteur $x \neq 0$ et de vérifier $u(x) = \lambda x$. Le « non nul » doit être dit explicitement.

Résoudre l'équation. Pour montrer que λ n'est pas valeur propre, ou pour déterminer $E_\lambda(u)$, on résout l'équation linéaire $u(x) = \lambda x$: elle a toujours la solution $x = 0$, et λ est valeur propre si et seulement s'il y en a d'autres.

Candidats. Un polynôme annulateur (partie 3) réduit la liste des λ à tester, mais ne dispense jamais de la vérification.

1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

1.1 Définitions

Exercice 1 – guidé, pour tous : un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- $u(1, 1) = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3) = 3(1, 1)$ et $u(1, -1) = (1 - 2, 2 - 1) = (-1, 1) = -(1, -1)$.
Soit $v \in D_1 : v = (\alpha, \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Par linéarité, $u(v) = \alpha u(1, 1) = 3\alpha(1, 1) \in D_1$. Donc $u(D_1) \subset D_1 : D_1$ **est stable**. De même, $u(\alpha, -\alpha) = -\alpha(1, -1) \in D_2 : D_2$ **est stable**.
- $u(1, 0) = (1, 2)$, qui n'est pas colinéaire à $(1, 0)$ (sa seconde coordonnée est non nulle). Donc $u(1, 0) \notin \text{Vect}((1, 0))$: **cette droite n'est pas stable**.
- D'après la question 1 : 3 est valeur propre de u , de vecteur propre $(1, 1)$ (qui est non nul), et -1 est valeur propre, de vecteur propre $(1, -1)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$u(x, y) = \lambda(x, y) \iff \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 2x + y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3y = \lambda(x + y) \\ -x + y = \lambda(y - x) \end{cases} \iff \begin{cases} 3(x + y) = \lambda(x + y) \\ -(x - y) = \lambda(x - y) \end{cases}$$

en remplaçant le système (L_1, L_2) par $(L_1 + L_2, L_1 - L_2)$, ce qui est bien une équivalence (on retrouve L_1, L_2 en refaisant somme et différence puis en divisant par 2). Le système s'écrit $(3 - \lambda)(x + y) = 0$ et $(-1 - \lambda)(x - y) = 0$.

- Si $\lambda \notin \{3, -1\} : x + y = 0$ et $x - y = 0$, donc $x = y = 0$. Seule solution : $(0, 0)$. λ **n'est pas valeur propre**.
- Si $\lambda = 3$: la première ligne est $0 = 0$, la seconde donne $x = y$. Les solutions sont les $(x, x) = x(1, 1) : 3$ **est valeur propre** et les vecteurs propres associés sont les $x(1, 1)$ avec $x \neq 0$.
- Si $\lambda = -1$: la seconde ligne est $0 = 0$, la première donne $y = -x$. Les vecteurs propres associés à -1 sont les $x(1, -1)$, $x \neq 0$.

Conclusion : les valeurs propres de u sont exactement 3 et -1 .

5. *Sens direct.* Si $u(x) = \lambda x$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $u(\alpha x) = \alpha \lambda x \in \text{Vect}(x)$: la droite $\text{Vect}(x)$ est stable.

Réciproque. Si $\text{Vect}(x)$ est stable, alors $u(x) \in \text{Vect}(x)$: il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $x \neq 0$, x est vecteur propre.

Soit D une droite stable par u , et x un vecteur non nul de D (donc $D = \text{Vect}(x)$). D'après ce qui précède, x est vecteur propre, donc x est colinéaire à $(1, 1)$ ou à $(1, -1)$ d'après la question 4. Ainsi $D = D_1$ ou $D = D_2$.

6. Avec $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, -1)$ (base de $\mathbb{R}^2$: deux vecteurs non colinéaires) : $u(e_1) = 3e_1$, $u(e_2) = -e_2$, donc

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a **réduit** u : on a trouvé une base de vecteurs propres, dans laquelle la matrice est diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale.

Exercice 2 – ★ vrai ou faux.

- Vrai.** $u(2x) = 2u(x) = 2\lambda x = \lambda(2x)$ et $2x \neq 0$ puisque $x \neq 0$.
- Faux** en général : $y = -x$ convient (c'est bien un vecteur propre, par le même argument qu'en 1), mais $x + y = 0$ n'est pas un vecteur propre. L'énoncé devient vrai si l'on ajoute l'hypothèse $x + y \neq 0$: $u(x + y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y)$.
- Faux.** Si $u(x) = \lambda x = \mu x$ avec $x \neq 0$, alors $(\lambda - \mu)x = 0$, donc $\lambda = \mu$.
- Faux.** u injectif signifie $\text{Ker } u = \{0\}$, c'est-à-dire que 0 n'est pas valeur propre ; cela n'interdit pas d'autres valeurs propres. Contre-exemple : Id_E (avec $E \neq \{0\}$) est injectif et 1 est valeur propre.
- Vrai.** Soit $x \neq 0$ avec $u(x) = \lambda x$. Si $\lambda = 0$, alors $u(x) = 0$ avec $x \neq 0$, ce qui contredit l'injectivité de u : donc $\lambda \neq 0$. En appliquant u^{-1} : $x = u^{-1}(\lambda x) = \lambda u^{-1}(x)$, d'où $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$: x est vecteur propre de u^{-1} pour $\frac{1}{\lambda}$.
- Vrai.** Notons d'abord que $x + y \neq 0$: sinon $x = -y$ serait vecteur propre pour λ et pour μ , ce qui contredit la question 3. Supposons par l'absurde $u(x + y) = \nu(x + y)$ pour un $\nu \in \mathbb{K}$. Comme $u(x + y) = \lambda x + \mu y$, on obtient $(\lambda - \nu)x + (\mu - \nu)y = 0$.
 - Si $\nu = \lambda$: $(\mu - \lambda)y = 0$ avec $\mu \neq \lambda$, donc $y = 0$: absurde.
 - Si $\nu \neq \lambda$: $x = \frac{\nu - \mu}{\lambda - \nu}y = \alpha y$, avec $\alpha \neq 0$ car $x \neq 0$. Alors $u(x) = \alpha u(y) = \alpha \mu y = \mu x$, donc $\lambda x = \mu x$ et $\lambda = \mu$ (question 3) : absurde.

Donc $x + y$ n'est pas vecteur propre. (On le redémontrera plus simplement avec la liberté de (x, y) , exercice 11.)

Exercice 3 – ★ des exemples dans toutes sortes d'espaces.

- Pour tout $x \neq 0$, $u(x) = \mu x$: μ est valeur propre et **tout vecteur non nul est vecteur propre associé à μ** . Si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $\mu x = \lambda x$ donc $\lambda = \mu$: **μ est la seule valeur propre.**

- $r(x, y) = \lambda(x, y) \iff \begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$. En reportant la seconde dans la première : $-y = \lambda^2 y$,

soit $(1 + \lambda^2)y = 0$; et $x = \lambda y = -\lambda^2 x$, soit $(1 + \lambda^2)x = 0$.

Sur $\mathbb{R}$: $1 + \lambda^2 > 0$, donc $x = y = 0$. **r n'a aucune valeur propre réelle** (ce qui est géométriquement clair : un quart de tour ne laisse aucune droite stable).

Sur $\mathbb{C}$: si $\lambda^2 \neq -1$, même conclusion. Si $\lambda = i$: le système devient $y = -ix$ (les deux lignes sont équivalentes), les vecteurs propres sont les $x(1, -i)$, $x \neq 0$. Si $\lambda = -i$: $y = ix$, vecteurs propres $x(1, i)$. Vérification : $r(1, -i) = (i, 1) = i(1, -i)$. **Sur $\mathbb{C}$, les valeurs propres sont i et $-i$.**

3. $f' = \lambda f$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, de solutions $f : t \mapsto Ce^{\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{\lambda t}$ est non nulle et solution : **tout réel est valeur propre**, et les vecteurs propres associés à λ sont les $Ce^{\lambda t}$, $C \neq 0$. Il y a donc une infinité de valeurs propres : c'est possible en dimension infinie.
4. Soit $P \neq 0$ avec $P' = \lambda P$. Si $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda P) = \deg P$ alors que $\deg P' < \deg P$: impossible. Donc **seule** $\lambda = 0$ **peut être valeur propre**, et $P' = 0$ équivaut à P constant : 0 est valeur propre, de vecteurs propres les constantes non nulles.
5. Pour $x \in F$, $p(x) = x$; comme $F \neq \{0\}$, **1 est valeur propre** et tout vecteur non nul de F est vecteur propre associé. Pour $x \in G$, $p(x) = 0 = 0 \cdot x$; comme $G \neq \{0\}$, **0 est valeur propre**.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = x_F + x_G$ (avec $x_F \in F$, $x_G \in G$) tel que $p(x) = \lambda x : x_F = \lambda x_F + \lambda x_G$, soit $(1 - \lambda)x_F + (-\lambda)x_G = 0$. Comme la somme $F \oplus G$ est directe, $(1 - \lambda)x_F = 0$ et $\lambda x_G = 0$. Si $\lambda \notin \{0, 1\} : x_F = x_G = 0$, $x = 0$: pas de valeur propre. Si $\lambda = 1 : x_G = 0$, donc $x \in F$; si $\lambda = 0 : x_F = 0$, donc $x \in G$. Conclusion : les vecteurs propres associés à 1 sont les vecteurs non nuls de F , ceux associés à 0 les vecteurs non nuls de G .
6. $s(x) = x_F - x_G$. Le même raisonnement donne $(1 - \lambda)x_F = 0$ et $(-1 - \lambda)x_G = 0$: **les valeurs propres sont 1 et -1**, de vecteurs propres les vecteurs non nuls de F (pour 1) et de G (pour -1).

1.2 Sous-espaces propres, spectre

Exercice 4 – ★ traduction.

1. — $u(x, y) = (x + 2y, 2x + y) : \text{Sp}(u) = \{3, -1\}$, $E_3(u) = \text{Vect}((1, 1))$, $E_{-1}(u) = \text{Vect}((1, -1))$.
— μId_E (dimension finie) : $\text{Sp} = \{\mu\}$, $E_\mu = E$.
— Quart de tour : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(r) = \emptyset$; sur $\mathbb{C}^2$, $\text{Sp}(r) = \{i, -i\}$, $E_i = \text{Vect}((1, -i))$, $E_{-i} = \text{Vect}((1, i))$.
— Dérivation sur $\mathcal{C}^\infty$: dimension infinie, on ne parle pas de spectre ; $E_\lambda = \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
— Dérivation sur $\mathbb{K}_n[X]$: $\text{Sp} = \{0\}$, $E_0 = \mathbb{K}_0[X]$ (constantes).
— Projecteur : $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$, $E_1(p) = F = \text{Im } p$, $E_0(p) = G = \text{Ker } p$. Symétrie : $\text{Sp}(s) = \{1, -1\}$, $E_1(s) = F$, $E_{-1}(s) = G$.
2. λ valeur propre $\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \iff u - \lambda \text{Id}$ n'est pas **injectif**. En dimension finie, injectif $\iff$ bijectif, donc $\iff u - \lambda \text{Id}$ n'est pas **bijectif (invertible)** $\iff \det(u - \lambda \text{Id}) = 0$.
3. $0 \in \text{Sp}(u) \iff \text{Ker}(u - 0 \text{Id}) = \text{Ker } u \neq \{0\} \iff u$ non injectif $\iff$ (dimension finie) u non bijectif.

2 Cas des matrices

Exercice 5 – guidé, pour tous.

Dans chaque cas, $\lambda \in \mathbb{K}$ et on résout $AX = \lambda X$.

1. $NX = \lambda X \iff \begin{cases} y = \lambda x \\ 0 = \lambda y \end{cases}$. Si $\lambda \neq 0 : y = 0$ puis $x = 0$: pas valeur propre. Si $\lambda = 0 : y = 0$, x quelconque.

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(N) = \{0\}, \quad E_0(N) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tous les vecteurs propres de N sont sur une même droite : deux d'entre eux sont toujours colinéaires, donc **on ne peut pas former une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ avec des vecteurs propres de N** . (N n'est pas « réductible à une forme diagonale ».)

2. $DX = \lambda X \iff (1 - \lambda)x = 0, (2 - \lambda)y = 0, (1 - \lambda)z = 0$. Si $\lambda \notin \{1, 2\}$, $X = 0$. Si $\lambda = 1$: $y = 0, x, z$ libres. Si $\lambda = 2$: $x = z = 0$.

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(D) = \{1, 2\}, \quad E_1(D) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(D) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En général, pour $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, le système est $(d_i - \lambda)x_i = 0$ pour tout i ; il a une solution non nulle si et seulement si λ est l'un des d_i : **le spectre d'une matrice diagonale est l'ensemble de ses coefficients diagonaux**, et $E_d(D)$ est engendré par les vecteurs e_i de la base canonique tels que $d_i = d$.

3. $AX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - y = \lambda x \\ 2x = \lambda y. \end{cases}$ Si $\lambda = 0$: $x = 0$ puis $y = 0$: 0 n'est pas valeur propre. Si

$\lambda \neq 0$: $y = \frac{2x}{\lambda}$, et la première ligne devient $3x - \frac{2x}{\lambda} = \lambda x$, soit $x(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ (après multiplication par $\lambda \neq 0$). Si $\lambda^2 - 3\lambda + 2 \neq 0$, alors $x = 0$ puis $y = 0$. Sinon $\lambda \in \{1, 2\}$ et x est libre.

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{1, 2\}, \quad E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0_2$: les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme annulateur $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, sur lequel on est même retombé en cours de route. Ce n'est pas un hasard (partie 3).

4. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $JX = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix} = sU$ avec $s = x + y + z$.

— Si $\lambda \neq 0$ et $JX = \lambda X$, alors $X = \frac{s}{\lambda}U$ est colinéaire à U . Réciproquement, pour $X = \alpha U$ avec $\alpha \neq 0$, $JX = 3\alpha U = \lambda\alpha U$ impose $\lambda = 3$. Donc la seule valeur propre non nulle est 3 et $E_3(J) = \text{Vect}(U)$.

— Si $\lambda = 0$: $JX = 0 \iff x + y + z = 0$. C'est un plan, de base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (deux solutions non colinéaires ; $z = -x - y$ montre que le plan est de dimension 2).

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(J) = \{0, 3\}, \quad E_3(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre : les deux derniers vecteurs forment une famille libre du plan $E_0(J)$, et le premier n'est pas dans ce plan ($1 + 1 + 1 \neq 0$). Trois vecteurs libres dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$: c'est une base. Dans cette base, $X \mapsto JX$ a pour matrice $\text{diag}(3, 0, 0)$ (images des vecteurs de base : $3U, 0, 0$).

Exercice 6 – ★ en autonomie : décaler une matrice.

1. $AX = JX - X$, donc $AX = \lambda X \iff JX = \lambda X + X = (\lambda + 1)X$. Ainsi $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda + 1 \in \text{Sp}(J) = \{0, 3\}$ et $E_{\lambda}(A) = E_{\lambda+1}(J)$:

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{-1, 2\}, \quad E_2(A) = E_3(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1}(A) = E_0(J) = \{x + y + z = 0\}.$$

2. $(B + \alpha I_n)X = \lambda X \iff BX = (\lambda - \alpha)X$. Donc $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(B + \alpha I_n) = \{\mu + \alpha, \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)\}$ et $E_{\lambda}(B + \alpha I_n) = E_{\lambda - \alpha}(B)$: **ajouter αI_n décale les valeurs propres de α et ne change pas les vecteurs propres.**
3. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ (exercice 5, question 4) : P est inversible (matrice de passage). $P^{-1}AP$ est la matrice de $X \mapsto AX$ dans cette base de vecteurs propres :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Avec $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (à vérifier : $PP^{-1} = I_3$), le produit donne

$$A^k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^k + 2(-1)^k & 2^k - (-1)^k & 2^k - (-1)^k \\ 2^k - (-1)^k & 2^k + 2(-1)^k & 2^k - (-1)^k \\ 2^k - (-1)^k & 2^k - (-1)^k & 2^k + 2(-1)^k \end{pmatrix}.$$

C'est exactement ce que donnait la méthode de l'annulateur : $X^k = Q_k(X-2)(X+1) + a_kX + b_k$ avec $a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3}$, $b_k = \frac{2^k + 2(-1)^k}{3}$, et $A^k = a_kA + b_kI_3$. Les deux méthodes sont les deux faces d'une même réalité : les racines de l'annulateur sont les valeurs propres, et D^k ne fait que calculer λ^k pour chacune.

Exercice 7 – ★★ une rotation n'a qu'une droite stable.

1. $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 \\ \sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $e_1 \neq 0$, 1 est valeur propre et e_1 est vecteur propre associé.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre et x un vecteur propre associé. La droite $\text{Vect}(x)$ est stable par B (exercice 1, question 5), donc $\text{Vect}(x) = \text{Vect}(e_1) : x = \alpha e_1$ avec $\alpha \neq 0$. Alors $Bx = \alpha Be_1 = \alpha e_1 = x$, donc $\lambda = 1$. Conclusion :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{1\}, \quad E_1(B) = \text{Vect}(e_1).$$

3. Si $B = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$ réelle, alors $BP = PD$: en lisant colonne par colonne, $BC_j = d_jC_j$ où C_j est la j -ième colonne de P . Les colonnes de P (non nulles, car P est inversible) seraient trois vecteurs propres réels de B , donc trois vecteurs de la droite $\text{Vect}(e_1)$: ils seraient colinéaires et P ne serait pas inversible. Contradiction. **B ne peut pas être réduite à une forme diagonale réelle** ; on verra qu'elle le peut sur $\mathbb{C}$, avec les valeurs propres $1, i, -i$.

3 Propriétés

3.1 Valeurs propres et polynômes annulateurs

Exercice 8 – guidé, pour tous : démontrer la proposition 7.44.

1. *Initialisation.* $u^0(x) = \text{Id}(x) = x = \lambda^0 x$. *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k(x) = \lambda^k x$. Alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(\lambda^k x) = \lambda^k u(x) = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x$. Par récurrence, $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Par définition de $P(u)$ et linéarité :

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^d a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k x = \left(\sum_{k=0}^d a_k \lambda^k \right) x = P(\lambda) x.$$

3. Si $P(u) = 0$, alors $P(u)(x) = 0$, donc $P(\lambda)x = 0$; comme $x \neq 0$, $P(\lambda) = 0$. Toute valeur propre est racine de P .

Rédaction type : « les valeurs propres sont parmi... »

« Le polynôme $P = \dots$ est annulateur de u car $\dots$. Ses racines sont $\dots$. D'après le cours, toute valeur propre de u est racine de P , donc $\text{Sp}(u) \subset \{\dots\}$. » Puis, pour chaque candidat λ : « λ est bien valeur propre car le vecteur $x = \dots$ est non nul et vérifie $u(x) = \lambda x$ », ou « λ n'est pas valeur propre car l'équation $u(x) = \lambda x$ n'a que la solution nulle ».

Exercice 9 – ★ des candidats.

- $p^2 = p$ donc $X^2 - X = X(X-1)$ annule p : $\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$. $s^2 = \text{Id}$ donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule s : $\text{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$. (L'exercice 3 montre qu'il y a égalité dès que F et G sont non nuls.)
- X^m annule u et sa seule racine est 0 : $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$. Si E est de dimension finie non nulle, u n'est pas injectif : sinon u serait bijectif, donc u^m aussi, or $u^m = 0$ n'est pas bijectif sur $E \neq \{0\}$. Donc $\text{Ker } u \neq \{0\}$ et 0 est valeur propre : $\text{Sp}(u) = \{0\}$.
- A : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1, 2\}$. L'exercice 5 montre que les deux sont valeurs propres : égalité.
— R : $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \emptyset$; sur $\mathbb{C}$, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(R) \subset \{i, -i\}$, et l'exercice 3 montre l'égalité.
— B : les racines réelles de $(X-1)(X^2+1)$ se réduisent à 1, donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) \subset \{1\}$, et on a vu $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{1\}$. Sur $\mathbb{C}$: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \subset \{1, i, -i\}$.
- $I_2 - I_2 = 0$, donc $(X-1)(X-2)$ (ou $X-1$ multiplié par n'importe quoi) annule I_2 ; mais 2 n'est pas valeur propre de I_2 puisque $I_2 X = 2X$ impose $X = 0$. De même $X^2 - X$ annule $p = \text{Id}_E$ (c'est un projecteur), mais 0 n'est pas valeur propre de Id_E (injectif). **Une racine d'un annulateur n'est qu'un candidat.**
- $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ annule u , donc $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 0, 1\}$. Pour $A = \text{diag}(-1, 0, 1)$, on a bien $A^3 = A$ et $\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Pour $A = I_3$, $A^3 = A$ et $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

Exercice 10 – ★ utiliser le corollaire 7.48 pour ne pas calculer.

- Avec $P = X^3 - 2X + 1$, $C = P(A)$ et $CX_1 = P(3)X_1 = (27 - 6 + 1)X_1 = 22X_1$, $CX_2 = P(-1)X_2 = (-1 + 2 + 1)X_2 = 2X_2$. La matrice de $X \mapsto CX$ dans la base (X_1, X_2) est $\begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi 22 et 2 sont valeurs propres de C ($X_1, X_2 \neq 0$).

Pas d'autre : si $CX = \mu X$ avec $X = \alpha X_1 + \beta X_2 \neq 0$, alors $22\alpha X_1 + 2\beta X_2 = \mu\alpha X_1 + \mu\beta X_2$, et par liberté de (X_1, X_2) : $(22 - \mu)\alpha = 0$ et $(2 - \mu)\beta = 0$. Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $\mu \in \{22, 2\}$.

Donc $\text{Sp}(C) = \{22, 2\}$. (Vérification : $C = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.)

- $A^k X_1 = 3^k X_1$ et $A^k X_2 = (-1)^k X_2$: matrice $\text{diag}(3^k, (-1)^k)$ dans (X_1, X_2) . Les vecteurs de la base canonique s'écrivent $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$, donc

$$A^k \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(3^k X_1 + (-1)^k X_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + (-1)^k \\ 3^k - (-1)^k \end{pmatrix}, \quad A^k \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(3^k X_1 - (-1)^k X_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k - (-1)^k \\ 3^k + (-1)^k \end{pmatrix},$$

ce sont les deux colonnes de A^k : on retrouve la formule.

- A est inversible ($0 \notin \text{Sp}(A)$). D'après l'exercice 2, question 5 : $A^{-1}X_1 = \frac{1}{3}X_1$ et $A^{-1}X_2 = -X_2$, donc $\text{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{3}, -1\}$ (pas d'autre valeur propre, même argument qu'en 1), avec les mêmes vecteurs propres.

3.2 Les sous-espaces propres sont en somme directe

Exercice 11 – ★ deux valeurs propres distinctes.

1. $x \in E_\lambda(u)$ donne $u(x) = \lambda x$, et $x \in E_\mu(u)$ donne $u(x) = \mu x$. Donc $\lambda x = \mu x$, soit $(\lambda - \mu)x = 0$, et comme $\lambda \neq \mu : x = 0$. Ainsi $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0\}$, ce qui caractérise une **somme directe** de deux sous-espaces.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha x + \beta y = 0$. En appliquant $u : \alpha \lambda x + \beta \mu y = 0$. En retranchant $\mu \times (\alpha x + \beta y = 0) : \alpha(\lambda - \mu)x = 0$, donc $\alpha = 0$ (car $\lambda \neq \mu$ et $x \neq 0$). Alors $\beta y = 0$ et $\beta = 0$ (car $y \neq 0$). **La famille (x, y) est libre.**

Remarque

Pour p valeurs propres, on peut procéder par récurrence : si $x_1 + \dots + x_p = 0$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, on applique $u - \lambda_p \text{Id}$, ce qui tue x_p et donne une relation entre $p - 1$ vecteurs $(\lambda_i - \lambda_p)x_i \in E_{\lambda_i}(u)$; l'hypothèse de récurrence conclut. Le cours fait tout d'un coup avec les polynômes de Lagrange.

Exercice 12 – ★ conséquences en dimension finie.

1. Si u avait $p > n$ valeurs propres distinctes, en choisissant un vecteur propre pour chacune on obtiendrait une famille libre de $p > n$ vecteurs dans un espace de dimension n : impossible.
2. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$. Comme la somme est directe, la concaténation $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de $E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u)$, donc une famille libre de E : son cardinal $\sum \dim E_{\lambda_i}(u)$ est $\leq n$.
3. Des vecteurs propres $e_1, \dots, e_n$ associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ forment une famille libre de n vecteurs : **une base** de E , dans laquelle $\text{Mat}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est de dimension ≥ 1 , et leur somme est $\leq n$ (question 2) : donc chacun est de dimension exactement 1, $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$.
4. Somme des dimensions égale à n : D ($2 + 1 = 3$), $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ($1 + 1 = 2$), J et $J - I_3$ ($1 + 2 = 3$). Strictement plus petite : N ($1 < 2$) et B ($1 < 3$). Ce sont exactement les cas où l'on a pu (resp. n'a pas pu) construire une base de vecteurs propres.
5. Les $e_{\lambda_i} : t \mapsto e^{\lambda_i t}$ sont des vecteurs propres de la dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, associés aux valeurs propres λ_i deux à deux distinctes : **la famille est libre** (corollaire 7.51, valable sans hypothèse de dimension finie).

3.3 Endomorphismes qui commutent

Exercice 13 – ★ démontrer la proposition 7.37.

1. $u(v(x)) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Donc $v(x) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) = E_\lambda(u) : E_\lambda(u)$ **est stable par v .**
2. $v = u : u$ commute avec lui-même, et on savait déjà que $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$, noyau d'un polynôme en u , est stable par u . Plus généralement $v = P(u)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
3. $E_3(A) = \text{Vect}(X_1)$ et $E_{-1}(A) = \text{Vect}(X_2)$ sont stables par $X \mapsto MX$ (question 1 appliquée aux endomorphismes $X \mapsto AX$ et $X \mapsto MX$, qui commutent). Donc $MX_1 = aX_1$ et $MX_2 = bX_2$ pour certains $a, b \in \mathbb{K}$: la matrice de $X \mapsto MX$ dans la base (X_1, X_2) est $\text{diag}(a, b)$, c'est-à-dire $M = P \text{diag}(a, b) P^{-1}$.

Réciproquement, toute matrice de cette forme commute avec $A = P \text{diag}(3, -1) P^{-1}$ (deux matrices diagonales commutent, et $PDP^{-1}PD'P^{-1} = PDD'P^{-1}$). Donc $\mathcal{C}(A) = \{P \text{diag}(a, b) P^{-1}, (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$, image du plan des matrices diagonales par l'application linéaire injective $D \mapsto PDP^{-1}$: $\dim \mathcal{C}(A) = 2$. Comme $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_2, A) \subset \mathcal{C}(A)$ est aussi de dimension 2 (I_2 et A ne sont

pas colinéaires), $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$. C'est le résultat sur le commutant de la matrice diagonale $\text{diag}(3, -1)$ (qui est formé des matrices diagonales), transporté par le changement de base P . L'exercice 19 généralise.

4 Exercices pour ceux qui vont vite

Exercice 14 – ★ une matrice par blocs.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} 2x = \lambda x \\ y + z = \lambda y \\ y + z = \lambda z. \end{cases} \quad \text{Les deux dernières lignes donnent } \lambda(y - z) = 0.$$

— $\lambda = 0$: $x = 0$ et $y + z = 0$. Solutions : $z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc 0 est valeur propre et $E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

— $\lambda \neq 0$: $y = z$, puis $2y = \lambda y$ et $2x = \lambda x$. Si $\lambda \neq 2$: $x = y = z = 0$. Si $\lambda = 2$: x et $y = z$ libres, $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{0, 2\}$, $\dim E_2 + \dim E_0 = 3$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base (concaténation de bases de sous-espaces en somme directe, 3 vecteurs), dans laquelle $X \mapsto AX$ a pour matrice $\text{diag}(2, 2, 0)$.

Exercice 15 – ★★ l'endomorphisme $P \mapsto XP'$.

1. Linéarité : $X(\alpha P + Q)' = \alpha XP' + XQ'$. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P' \leq n - 1$ et $\deg(XP') \leq n$: $u(P) \in E$.
2. $u(X^k) = X \cdot kX^{k-1} = kX^k$ (y compris $k = 0$: $u(1) = 0$). Comme $X^k \neq 0$, $0, 1, \dots, n$ sont $n + 1$ valeurs propres distinctes de u , et $X^k \in E_k(u)$.
3. $\dim E = n + 1$ et u a $n + 1$ valeurs propres distinctes : d'après l'exercice 12, question 3, il n'y en a pas d'autre, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de vecteurs propres et $E_k(u) = \text{Vect}(X^k)$. Dans la base canonique, $\text{Mat}(u) = \text{diag}(0, 1, 2, \dots, n)$.
4. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$: $XP' = \sum k a_k X^k$, donc $XP' = \lambda P \iff (k - \lambda)a_k = 0$ pour tout k . Si $\lambda \notin \{0, \dots, n\}$, tous les a_k sont nuls : pas valeur propre. Si $\lambda = k_0$: $a_k = 0$ pour $k \neq k_0$, $P = a_{k_0} X^{k_0}$: $E_{k_0}(u) = \text{Vect}(X^{k_0})$.

Exercice 16 – ★★ la transposition.

1. $(\alpha M + N)^\top = \alpha M^\top + N^\top$: T est linéaire, et $M^\top \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $T \circ T = \text{Id}$ (transposer deux fois redonne M), donc $X^2 - 1$ annule T : $\text{Sp}(T) \subset \{-1, 1\}$.
2. $E_1(T) = \{M, M^\top = M\} = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, de base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, dimension 3.
 $E_{-1}(T) = \{M, M^\top = -M\} = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, de base $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dimension 1. Somme : $4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Les quatre matrices ci-dessus forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (concaténation de bases de sous-espaces en somme directe), dans laquelle $\text{Mat}(T) = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$. Comme $T^2 = \text{Id}$, T est une symétrie : la **symétrie par rapport à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$** (décomposition $M = \frac{M+M^\top}{2} + \frac{M-M^\top}{2}$).

Exercice 17 – ★★ matrices de rang 1.

1. $AX = U(V^\top X)$ et $V^\top X$ est une matrice 1×1 , c'est-à-dire un scalaire : $AX = (V^\top X)U$. Toutes les colonnes AX sont colinéaires à U , et $V \neq 0$ donne un X avec $V^\top X \neq 0$ (par exemple $X = V$) : $\text{Im } A = \text{Vect}(U)$, $\text{rg } A = 1$.
2. $AU = (V^\top U)U = cU$. $A^2 = UV^\top UV^\top = U(V^\top U)V^\top = cUV^\top = cA$. Donc $X^2 - cX = X(X - c)$ annule A et $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \{0, c\}$.
3. $AX = 0 \iff (V^\top X)U = 0 \iff V^\top X = 0$ (car $U \neq 0$). $E_0(A) = \text{Ker } A$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $X \mapsto V^\top X$: un **hyperplan**, de dimension $n - 1$. En particulier 0 est valeur propre dès que $n \geq 2$.
4. $AU = cU$ avec $U \neq 0$: c est valeur propre. Si $AX = cX$, alors $cX = (V^\top X)U$ donc $X = \frac{V^\top X}{c}U \in \text{Vect}(U)$; réciproquement $U \in E_c(A)$: $E_c(A) = \text{Vect}(U)$. Une base de $E_0(A)$ ($n - 1$ vecteurs) complétée par U : n vecteurs libres (somme directe), donc une base de vecteurs propres de A . Pour $J = UU^\top$ avec $U = {}^\top(1 \ 1 \ 1)$: $c = U^\top U = 3$, $E_3(J) = \text{Vect}(U)$, $E_0(J) = \{x + y + z = 0\}$. On retrouve l'exercice 5.
5. Si $c = 0$: $\text{Sp} \subset \{0\}$, et 0 est valeur propre (question 3, et $n \geq 2$ car $V^\top U = 0$ avec $U, V \neq 0$ est impossible pour $n = 1$) : $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{0\}$. $A^2 = cA = 0$. Tous les vecteurs propres sont dans $E_0(A)$, de dimension $n - 1 < n$: **pas de base de vecteurs propres**. (Cas typique : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Exercice 18 – *** valeurs propres de $u \circ v$ et de $v \circ u$.

1. $u(v(x)) = \lambda x \neq 0$ (car $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$), donc $v(x) \neq 0$ (sinon $u(v(x)) = u(0) = 0$). Ensuite $(v \circ u)(v(x)) = v(u(v(x))) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$: $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ .
2. D'après 1, toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$. En échangeant les rôles de u et v , réciproque. Donc $\text{Sp}(u \circ v) \setminus \{0\} = \text{Sp}(v \circ u) \setminus \{0\}$.
3. En dimension finie, $0 \in \text{Sp}(u \circ v) \iff u \circ v$ non injectif $\iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det u \cdot \det v = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0 \in \text{Sp}(v \circ u)$. Avec 2 : $\text{Sp}(u \circ v) = \text{Sp}(v \circ u)$.
4. $(u \circ v)(P) = (XP)' = P + XP'$ et $(v \circ u)(P) = XP'$. Pour $v \circ u$: $XP' = 0 \iff P' = 0 \iff P$ constant, donc 0 est valeur propre. Pour $u \circ v$: si $P = \sum a_k X^k$, $P + XP' = \sum (k+1)a_k X^k = 0$ impose $a_k = 0$ pour tout k : 0 n'est pas valeur propre. (Plus précisément $(u \circ v)(X^k) = (k+1)X^k$ et $(v \circ u)(X^k) = kX^k$: les spectres sont $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$.)

Exercice 19 – *** commutant d'un endomorphisme à n valeurs propres distinctes.

1. C'est l'exercice 12, question 3.
2. $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$ est stable par v (proposition 7.37), donc $v(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$: il existe μ_i avec $v(e_i) = \mu_i e_i$. La matrice de v dans $(e_1, \dots, e_n)$ est $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
3. Si $\text{Mat}(v) = D'$ est diagonale, alors $\text{Mat}(u \circ v) = DD' = D'D = \text{Mat}(v \circ u)$ (avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$; deux matrices diagonales commutent), donc $v \in \mathcal{C}(u)$. Ainsi $v \mapsto \text{Mat}_{(e_i)}(v)$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}(u)$ sur l'espace des matrices diagonales : $\dim \mathcal{C}(u) = n$.
4. Les λ_i étant deux à deux distincts, le polynôme d'interpolation de Lagrange $P = \sum_{i=1}^n \mu_i L_i$ (avec $L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$) vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$. Alors $P(u)(e_i) = P(\lambda_i)e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$ (corollaire 7.48) pour tout i : $P(u)$ et v coïncident sur une base, donc $v = P(u) \in \mathbb{K}[u]$. Avec l'inclusion $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$ (un polynôme en u commute avec u) : $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$, de dimension n . (On retrouve l'exercice 13.)