

Questions de cours

Chapitre 6 — Suites et séries de fonctions

QUESTIONS DE COURS

Question 1

ch06/q01

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et f une fonction définie sur I . Définir « (f_n) converge simplement vers f sur I ».

Corrigé. La suite (f_n) converge simplement vers f sur I si, pour tout $t \in I$ fixé, la suite numérique $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$:

$$\forall t \in I, f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(t).$$

ATTENDUS

- ☐ Pour tout $t \in I$ fixé
- ☐ La suite numérique $(f_n(t))$ tend vers $f(t)$

Question 2

ch06/q02

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et f une fonction définie sur I . Définir « (f_n) converge uniformément vers f sur I ».

Corrigé. La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si :

- la différence $f_n - f$ est bornée sur I à partir d'un certain rang ;
- $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

ATTENDUS

- ☐ $f_n - f$ bornée sur I à partir d'un certain rang
- ☐ $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$

Question 3

ch06/q03

Quel lien y a-t-il entre convergence uniforme et convergence simple d'une suite de fonctions ? La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé. La convergence uniforme entraîne la convergence simple : si (f_n) converge uniformément vers f sur I , alors, pour tout $t \in I$, $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, donc $f_n(t) \rightarrow f(t)$.

La réciproque est fausse. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^n$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f nulle sur $[0, 1[$ et valant 1 en 1, mais $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout n : la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

ATTENDUS

- ☐ La convergence uniforme entraîne la convergence simple
- ☐ Réciproque fausse, avec un contre-exemple ($t \mapsto t^n$ sur $[0, 1]$, ou $t \mapsto nte^{-nt}$ sur $\mathbb{R}^+$)

Question 4

ch06/q04

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I . Décrire la méthode pour montrer que (f_n) converge uniformément sur I .

Corrigé.

1. **Limite simple.** Pour $t \in I$ fixé, on détermine la limite $f(t)$ de la suite numérique $(f_n(t))$. Si elle n'existe pas pour un t , il n'y a pas de convergence simple, donc pas de convergence uniforme.
2. **Majoration indépendante de t .** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, on cherche un réel M_n , qui ne dépend pas de t , tel que $|f_n(t) - f(t)| \leq M_n$, avec $M_n \rightarrow 0$. Au besoin, on étudie les variations de $f_n - f$ sur I pour en encadrer les valeurs, et on en déduit une majoration de $|f_n - f|$.
3. **Norme infinie.** Le réel M_n ne dépend pas de t : $f_n - f$ est bornée sur I et, par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq M_n$.
4. **Conclusion.** Par encadrement, $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$: (f_n) converge uniformément vers f sur I .

ATTENDUS

- ☐ Déterminer la limite simple f
- ☐ Majorer $|f_n(t) - f(t)|$ par un M_n indépendant de t avec $M_n \rightarrow 0$ (majoration directe ou étude des variations de $f_n - f$)
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n - f\|_\infty \leq M_n$
- ☐ Conclure par encadrement

Question 5

ch06/q05

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I . Définir « $\sum f_n$ converge simplement sur I » et sa somme.

Corrigé. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I si, pour tout $t \in I$ fixé, la série numérique $\sum f_n(t)$ converge. Sa somme est alors la fonction

$$S: I \rightarrow \mathbb{K}, t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t),$$

notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

ATTENDUS

- ☐ Pour tout $t \in I$ fixé
- ☐ La série numérique $\sum f_n(t)$ converge
- ☐ Somme : $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$

Question 6

ch06/q06

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I . Définir « $\sum f_n$ converge uniformément sur I ».

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ la somme partielle d'indice n . La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S définie sur I si :

- la différence $S_n - S$ est bornée sur I à partir d'un certain rang ;
- $\|S_n - S\|_\infty = \sup_{t \in I} |S_n(t) - S(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

ATTENDUS

- ☐ $S_n - S$ bornée sur I à partir d'un certain rang, où $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$
- ☐ $\|S_n - S\|_\infty \rightarrow 0$

Question 7

ch06/q07

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I . Définir « $\sum f_n$ converge normalement sur I ».

Corrigé. La série $\sum f_n$ converge normalement sur I si les f_n sont bornées sur I et si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, où $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in I} |f_n(t)|$.

ATTENDUS

- ☐ Les f_n sont bornées sur I
- ☐ La série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Question 8

ch06/q08

Citer les trois modes de convergence d'une série de fonctions sur un intervalle I et les implications entre eux. Les réciproques sont-elles vraies ?

Corrigé. Les trois modes sont la convergence normale, la convergence uniforme et la convergence simple. La convergence normale entraîne la convergence uniforme, qui entraîne la convergence simple.

Les réciproques sont fausses.

- Convergence uniforme sans convergence normale : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} t^n$ sur $[0, 1]$. Le critère des séries alternées donne $|S(t) - S_n(t)| \leq \frac{1}{n+1}$, donc la convergence est uniforme, mais $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge.
- Convergence simple sans convergence uniforme : $\sum t^n$ sur $[0, 1[$. La série converge simplement, de somme $\frac{1}{1-t}$, mais $S(t) - S_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}$ n'est pas borné sur $[0, 1[$.

ATTENDUS

- ☐ Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple
- ☐ Réciproques fausses, avec un contre-exemple pour chacune

Question 9

ch06/q09

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge normalement sur un intervalle I . Que peut-on dire, pour $t \in I$ fixé, de la série numérique $\sum f_n(t)$?

Corrigé. La série numérique $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge.

ATTENDUS

- ☐ La série $\sum f_n(t)$ converge absolument (donc converge)

Question 10

ch06/q10

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I . Décrire la méthode pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur I .

Corrigé.

1. **Majoration indépendante de t .** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, on cherche un réel $u_n \geq 0$, qui ne dépend pas de t , tel que $|f_n(t)| \leq u_n$: majoration directe ($|\sin| \leq 1$, t dans un segment, dénominateur minoré) ou étude des variations de f_n sur I pour en encadrer les valeurs.
2. **Norme infinie.** Le réel u_n ne dépend pas de t : f_n est bornée sur I et, par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq u_n$.
3. **Série majorante.** On montre que $\sum u_n$ converge : série de référence (Riemann, géométrique) ou critère du chapitre sur les séries numériques.
4. **Conclusion.** Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : $\sum f_n$ converge normalement sur I .

Si $\sum u_n$ diverge, on ne conclut rien : on cherche un meilleur majorant, ou on calcule $\|f_n\|_\infty$ exactement.

ATTENDUS

- ☐ Majorer $|f_n(t)|$ par un u_n indépendant de t (majoration directe ou étude des variations de f_n)
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq u_n$
- ☐ Montrer que $\sum u_n$ converge
- ☐ Conclure par comparaison de séries à termes positifs

Question 11

ch06/q11

Énoncer le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions définies sur un intervalle I . Suffit-il que la convergence soit uniforme sur tout segment de I ?

Corrigé. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- (f_n) converge uniformément vers f sur I ;

alors f est continue sur I .

Oui : la continuité étant une propriété locale, il suffit que la convergence soit uniforme sur tout segment de I .

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les f_n sont continues sur I
- ☐ Hypothèse : (f_n) converge uniformément vers f sur I
- ☐ Conclusion : f est continue sur I
- ☐ La convergence uniforme sur tout segment de I suffit

Question 12

ch06/q12

Énoncer le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions définies sur un intervalle I . Suffit-il que la convergence soit uniforme sur tout segment de I ?

Corrigé. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I ;

alors la somme $S: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur I .

Oui : la continuité étant une propriété locale, il suffit que la convergence soit uniforme sur tout segment de I .

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les f_n sont continues sur I
- ☐ Hypothèse : $\sum f_n$ converge uniformément sur I
- ☐ Conclusion : la somme S est continue sur I
- ☐ La convergence uniforme sur tout segment de I suffit

Question 13

ch06/q13

Énoncer le théorème de la double limite pour une série de fonctions définies sur un intervalle I .

Corrigé. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a un point de I ou une extrémité de I , éventuellement infinie. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I ;

alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge, la somme $S: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ admet une limite finie en a et

$$\lim_{t \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : chaque f_n admet une limite finie ℓ_n en a , point ou extrémité de I (éventuellement infinie)
- ☐ Hypothèse : $\sum f_n$ converge uniformément sur I
- ☐ Conclusion : $\sum \ell_n$ converge
- ☐ Conclusion : S admet une limite finie en a et $\lim_{t \rightarrow a} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$

Question 14

ch06/q14

Énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale pour une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.

Corrigé. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$;

alors f est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les f_n sont continues sur $[a, b]$
- ☐ Hypothèse : (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$
- ☐ Conclusion : $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ (et f est continue)

Question 15

ch06/q15

Énoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.

Corrigé. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $[a, b]$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$;

alors la somme $S: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[a, b]$, la série numérique $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt.$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les f_n sont continues sur $[a, b]$
- ☐ Hypothèse : $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$
- ☐ Conclusion : $\sum \int_a^b f_n$ converge et $\int_a^b S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$

Question 16

ch06/q16

Énoncer le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions définies sur un intervalle I . Suffit-il que la convergence de (f'_n) soit uniforme sur tout segment de I ?

Corrigé. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et f, g deux fonctions définies sur I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ;
- (f_n) converge simplement vers f sur I ;
- (f'_n) converge uniformément vers g sur I ;

alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$, c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f'_n$.

Oui : être de classe C^1 est une propriété locale, il suffit que la convergence de (f'_n) soit uniforme sur tout segment de I .

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les f_n sont de classe C^1 sur I
- ☐ Hypothèse : (f_n) converge simplement vers f sur I
- ☐ Hypothèse : (f'_n) converge uniformément vers g sur I
- ☐ Conclusion : f est de classe C^1 sur I et $f' = g$
- ☐ La convergence uniforme de (f'_n) sur tout segment de I suffit

Question 17

ch06/q17

Énoncer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions définies sur un intervalle I . Suffit-il que la convergence de $\sum f'_n$ soit uniforme sur tout segment de I ?

Corrigé. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ;
- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- $\sum f'_n$ converge uniformément sur I ;

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et, pour tout $t \in I$,

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Oui : être de classe C^1 est une propriété locale, il suffit que la convergence de $\sum f'_n$ soit uniforme sur tout segment de I .

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les f_n sont de classe C^1 sur I
- ☐ Hypothèse : $\sum f_n$ converge simplement sur I
- ☐ Hypothèse : $\sum f'_n$ converge uniformément sur I
- ☐ Conclusion : S est de classe C^1 sur I et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$
- ☐ La convergence uniforme de $\sum f'_n$ sur tout segment de I suffit

Question 18

ch06/q18

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Énoncer le théorème de régularité C^k de la somme d'une série de fonctions définies sur un intervalle I . Suffit-il que la convergence de $\sum f_n^{(k)}$ soit uniforme sur tout segment de I ?

Corrigé. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I ;
- pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ;

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et, pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$ et tout $t \in I$,

$$S^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(t).$$

Oui : être de classe C^k est une propriété locale, il suffit que la convergence de $\sum f_n^{(k)}$ soit uniforme sur tout segment de I .

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : les f_n sont de classe C^k sur I
- ☐ Hypothèse : $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I pour $j \leq k-1$
- ☐ Hypothèse : $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I
- ☐ Conclusion : S est de classe C^k sur I et $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$ pour $j \leq k$
- ☐ La convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment de I suffit

Question 19

ch06/q19

Dans les théorèmes de continuité et de dérivation, quelle propriété de la continuité et de la classe C^1 fait qu'il suffit de vérifier la convergence uniforme sur tout segment de I ? La définir. Pour quel théorème de ce chapitre cela ne suffit-il pas?

Corrigé. La continuité et la classe C^1 sont des propriétés locales : une fonction f est continue (respectivement de classe C^1) sur I dès qu'elle l'est au voisinage de chaque point de I , c'est-à-dire dès que, pour tout $t_0 \in I$, il existe un segment $[c, d] \subset I$, contenant t_0 et tous les points de I assez proches de t_0 , sur lequel f est continue (respectivement de classe C^1). Il suffit donc d'appliquer le théorème sur chacun de ces segments. Cela ne suffit pas pour le théorème de la double limite : le point a y est en général une extrémité de I , qu'aucun segment de I n'atteint.

ATTENDUS

- ☐ La continuité et la classe C^1 sont des propriétés locales
- ☐ Définition : la propriété vaut sur I dès qu'elle vaut au voisinage de chaque point, c'est-à-dire sur un segment de I contenant les points voisins de chaque point
- ☐ Cela ne suffit pas pour le théorème de la double limite

Exercice 1

ch06/x01

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2 + \frac{\sin(nt)}{n}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.

Corrigé. Limite simple. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{\sin(nt)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $f_n(t) \rightarrow t^2$. La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f: t \mapsto t^2$.

Majoration indépendante de t . Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. On a

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{|\sin(nt)|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t : $f_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et, par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.

Conclusion. Par encadrement, $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$: la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto t^2$.

ATTENDUS

- ☐ Limite simple $f: t \mapsto t^2$
- ☐ $|f_n(t) - t^2| \leq \frac{1}{n}$, majorant indépendant de t
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$
- ☐ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, conclusion par encadrement

Exercice 2

ch06/x02

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$. Déterminer la limite simple de (f_n) sur $[0, 1]$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Corrigé. Limite simple. Si $t \in [0, 1[$, alors $t^n \rightarrow 0$; si $t = 1$, alors $f_n(1) = 1$ pour tout n . La suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f nulle sur $[0, 1[$ et valant 1 en 1.

Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_n(1) - f(1) = 0$ et, pour $t \in [0, 1[$, $f_n(t) - f(t) = t^n \in [0, 1[$: $f_n - f$ est bornée par 1. Comme $t^n \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 1^-$, aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore $|f_n - f|$, donc $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Cette quantité ne tend pas vers 0 : la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

On peut aussi remarquer que les f_n sont continues et que f ne l'est pas en 1 : par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, la convergence ne peut pas être uniforme.

ATTENDUS

- ☐ Limite simple : 0 sur $[0, 1[$, 1 en 1
- ☐ Pas de convergence uniforme : $\|f_n - f\|_\infty = 1$ (ou f discontinue alors que les f_n sont continues)

Exercice 3

ch06/x03

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$. Déterminer la limite simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n > |t|$, on a $1 + \frac{t}{n} > 0$, donc

$$f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)\right).$$

Si $t = 0$, alors $f_n(0) = 1$ pour tout n . Si $t \neq 0$, comme $\frac{t}{n} \rightarrow 0$ et $\ln(1 + u) \sim u$ quand $u \rightarrow 0$,

$$n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \sim n \cdot \frac{t}{n} = t,$$

donc $n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \rightarrow t$, puis, par continuité de l'exponentielle, $f_n(t) \rightarrow e^t$. Dans les deux cas, la limite vaut e^t : la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

ATTENDUS

- ☐ Pour $n > |t|$, $f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)\right)$
- ☐ $n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \rightarrow t$ par $\ln(1 + u) \sim u$ en 0
- ☐ Limite simple : $t \mapsto e^t$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

ch06/x04

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto |t|$.

Corrigé. Limite simple. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $t^2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow t^2$, donc, par continuité de la racine carrée, $f_n(t) \rightarrow \sqrt{t^2} = |t|$. Posons $f: t \mapsto |t|$.

Majoration indépendante de t . Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. En multipliant par la quantité conjuguée,

$$f_n(t) - f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t|}.$$

Le dénominateur vérifie $\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t| \geq \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} > 0$, donc

$$0 \leq f_n(t) - f(t) \leq \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t : $f_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et, par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.

Conclusion. Par encadrement, $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$: la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto |t|$.

ATTENDUS

- ☐ Limite simple $t \mapsto |t|$
- ☐ Quantité conjuguée : $f_n(t) - |t| = \frac{1/n^2}{\sqrt{t^2 + 1/n^2} + |t|}$
- ☐ Dénominateur minoré par $\frac{1}{n}$, majorant $\frac{1}{n}$ indépendant de t
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (n+1)(n+2)t^n(1-t)$. Calculer $\int_0^1 g_n(t) dt$ et déterminer la limite simple de (g_n) sur $[0, 1]$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Corrigé. Intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}$. En développant $t^n(1-t) = t^n - t^{n+1}$,

$$\int_0^1 g_n(t) dt = (n+1)(n+2) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = (n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Limite simple. En $t = 1$, $g_n(1) = 0$ pour tout n . Soit $t \in [0, 1[$. Par croissances comparées, $n^2 t^n \rightarrow 0$, $nt^n \rightarrow 0$ et $t^n \rightarrow 0$, donc

$$g_n(t) = (n^2 t^n + 3nt^n + 2t^n)(1-t) \rightarrow 0.$$

La suite (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme. Si la convergence était uniforme sur $[0, 1]$, les g_n étant continues sur ce segment, le théorème d'interversion limite-intégrale donnerait

$$\int_0^1 g_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 0 dt = 0,$$

ce qui contredit $\int_0^1 g_n(t) dt = 1$ pour tout n . La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$.

ATTENDUS

- ☐ $\int_0^1 g_n = (n+1)(n+2) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 1$
- ☐ Limite simple nulle : $g_n(1) = 0$ et croissances comparées sur $[0, 1[$
- ☐ Pas de convergence uniforme : sinon $\int_0^1 g_n \rightarrow \int_0^1 0 = 0 \neq 1$ (ou $\|g_n\|_\infty \geq \int_0^1 g_n = 1$)

Exercice 6

ch06/x06

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{n^2} e^{-t/n}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geq 0$,

$$f'_n(t) = \frac{1}{n^2} e^{-t/n} - \frac{t}{n^3} e^{-t/n} = \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{t}{n}\right) e^{-t/n},$$

du signe de $n - t$. Comme $f_n(n) = \frac{1}{n} e^{-1}$ et $f_n(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ par croissances comparées :

t	0	n	$+\infty$
$f'_n(t)$		+	0
$f_n(t)$	0	$\frac{1}{en}$	0

La fonction f_n est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ et atteint son maximum en $t = n$: $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{en}$. Par encadrement, $\|f_n - 0\|_\infty \rightarrow 0$: la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

ATTENDUS

- ☐ Variations de f_n : croissante sur $[0, n]$, décroissante ensuite, maximum $\frac{1}{en}$ en $t = n$
- ☐ $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{en}$ (maximum atteint)
- ☐ $\frac{1}{en} \rightarrow 0$, conclusion

Exercice 7

ch06/x07

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto nte^{-nt}$. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, mais pas uniformément.

Corrigé. Convergence simple. On a $f_n(0) = 0$ pour tout n . Soit $t > 0$. Posons $x = nt$; quand $n \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $f_n(t) = xe^{-x} \rightarrow 0$ par croissances comparées. La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} e^{-1} = e^{-1}.$$

Si f_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors $\|f_n - 0\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}$. Cette quantité ne tend pas vers 0 : la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

ATTENDUS

- ☐ Limite simple nulle : $f_n(0) = 0$ et, pour $t > 0$, $nte^{-nt} \rightarrow 0$ par croissances comparées
- ☐ $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}$, donc $\|f_n\|_\infty \geq e^{-1}$ ne tend pas vers 0

Exercice 8

ch06/x08

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$ et calculer sa somme. Soit $a \in [0, 1[$; montrer que la convergence est uniforme sur $[-a, a]$.

Corrigé. Convergence simple. Soit $t \in]-1, 1[$. La série géométrique $\sum t^n$ est de raison t avec $|t| < 1$: elle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

La série $\sum f_n$ converge donc simplement sur $] -1, 1[$, de somme $S: t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

Convergence uniforme sur $[-a, a]$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-a, a]$. La somme partielle d'indice n vaut $S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$, donc

$$|S_n(t) - S(t)| = \left| \frac{1-t^{n+1}}{1-t} - \frac{1}{1-t} \right| = \frac{|t|^{n+1}}{1-t}.$$

Or $|t|^{n+1} \leq a^{n+1}$ et $1-t \geq 1-a > 0$, donc

$$|S_n(t) - S(t)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t : $S_n - S$ est bornée sur $[-a, a]$ et, par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|S_n - S\|_\infty \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$. Comme $0 \leq a < 1$, $a^{n+1} \rightarrow 0$, donc, par encadrement, $\|S_n - S\|_\infty \rightarrow 0$: la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

ATTENDUS

- ☐ Série géométrique de raison $t \in]-1, 1[$: convergence simple, somme $\frac{1}{1-t}$
- ☐ $S_n(t) - S(t) = -\frac{t^{n+1}}{1-t}$
- ☐ $|S_n(t) - S(t)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$, majorant indépendant de t
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|S_n - S\|_\infty \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \rightarrow 0$

Exercice 9

ch06/x09

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{n^2+t^2}$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Comme $t^2 \geq 0$,

$$0 < f_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t : f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

ATTENDUS

- ☐ $0 < f_n(t) \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, majorant indépendant de t
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$
- ☐ Série de Riemann convergente, comparaison de séries à termes positifs

Exercice 10

ch06/x10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2 e^{-nt}$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec, pour tout $t \geq 0$,

$$f'_n(t) = 2te^{-nt} - nt^2 e^{-nt} = t(2 - nt)e^{-nt},$$

du signe de $2 - nt$. Comme $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}e^{-2}$ et $f_n(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ par croissances comparées :

t	0	$\frac{2}{n}$	$+\infty$
$f'_n(t)$	0	+	0
$f_n(t)$	0	$\frac{4}{e^2 n^2}$	0

La fonction f_n est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ et atteint son maximum en $\frac{2}{n}$: $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{e^2 n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$), donc $\sum \frac{4}{e^2 n^2}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

ATTENDUS

- ☐ $f'_n(t) = t(2 - nt)e^{-nt}$ et tableau de variations, maximum en $t = \frac{2}{n}$
- ☐ f_n bornée et $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{e^2 n^2}$ (maximum atteint)
- ☐ Comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, conclusion

Exercice 11

ch06/x11

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^n$. Soit $q \in [0, 1[$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, q]$, mais pas sur $[0, 1[$.

Corrigé. Sur $[0, q]$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, q]$. Comme $0 \leq t \leq q$, on a $0 \leq t^n \leq q^n$. Ce majorant ne dépend pas de t : f_n est bornée sur $[0, q]$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty, [0, q]} \leq q^n$. Or $\sum q^n$ est une série géométrique de raison $q \in [0, 1[$, donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, q]$.

Sur $[0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1[$, $0 \leq t^n < 1$, et $t^n \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 1^-$: aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore f_n , donc $\|f_n\|_{\infty, [0, 1[} = 1$. La série $\sum 1$ diverge grossièrement : la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1[$.

ATTENDUS

- ☐ Sur $[0, q]$: $\|f_n\|_\infty \leq q^n$, série géométrique convergente ($0 \leq q < 1$)
- ☐ Sur $[0, 1[$: $\|f_n\|_\infty = 1$ car $t^n \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 1^-$, et $\sum 1$ diverge

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{(-1)^n}{n} t^n$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$, mais pas normalement.

Corrigé. Convergence simple. Soit $t \in [0, 1]$. Posons $a_n = \frac{t^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $f_n(t) = (-1)^n a_n$. La suite (a_n) est positive, décroissante car

$$a_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{n+1} \leq \frac{t^n}{n+1} \leq \frac{t^n}{n} = a_n,$$

et de limite nulle car $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$. D'après le critère des séries alternées, $\sum f_n(t)$ converge, et sa somme $S(t)$ et ses sommes partielles $S_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$ vérifient

$$|S(t) - S_n(t)| \leq a_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le majorant $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de t : $S_n - S$ est bornée sur $[0, 1]$ et, par définition de la borne supérieure, $0 \leq \|S_n - S\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, $\|S_n - S\|_\infty \rightarrow 0$: la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Convergence normale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| = \frac{t^n}{n} \leq \frac{1}{n}$, avec égalité en $t = 1$, donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge : la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.

ATTENDUS

- Critère des séries alternées à t fixé : $\left(\frac{t^n}{n}\right)$ positive, décroissante, de limite nulle
- $|S(t) - S_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, majorant indépendant de t
- Par définition de la borne supérieure, $\|S_n - S\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$
- $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge : pas de convergence normale

Montrer que $S: t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t^n}{n^2}$.

Convergence normale. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1, 1]$. Comme $|t| \leq 1$,

$$|f_n(t)| = \frac{|t|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t : f_n est bornée sur $[-1, 1]$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1, 1]$. En particulier, elle converge simplement : S est définie sur $[-1, 1]$.

Continuité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une fonction polynomiale, donc continue sur $[-1, 1]$, et $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$. D'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, S est continue sur $[-1, 1]$.

ATTENDUS

- ☐ $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}$ sur $[-1, 1]$, majorant indépendant de t
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$; série de Riemann, convergence normale
- ☐ Convergence normale $\Rightarrow$ uniforme (et simple, donc S définie)
- ☐ Les f_n sont continues : théorème de continuité de la somme

Montrer que $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n}$.

Définition. Soit $s > 1$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$ converge : la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ et ζ est définie.

Convergence normale sur tout segment. Soit $[a, b]$ un segment de $]1, +\infty[$, de sorte que $1 < a \leq b$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [a, b]$. Comme $\ln n \geq 0$ et $s \geq a$,

$$0 < \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \leq e^{-a \ln n} = \frac{1}{n^a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de s : f_n est bornée sur $[a, b]$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^a}$. Or $\sum \frac{1}{n^a}$ est une série de Riemann convergente ($a > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$. Le majorant dépend de a : on ne dispose pas d'une majoration valable sur $]1, +\infty[$ tout entier.

Continuité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]1, +\infty[$. Sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$, la série converge uniformément : d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, ζ est continue sur $[a, b]$. Par caractère local de la continuité, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

ATTENDUS

- ☐ Définie : série de Riemann convergente pour tout $s > 1$
- ☐ Sur un segment $[a, b]$ avec $a > 1$: $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$, majorant indépendant de s
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^a}$; convergence normale
- ☐ Continuité sur tout segment, donc sur $]1, +\infty[$ par caractère local

Montrer que $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et exprimer $\zeta'(s)$ sous forme d'une somme de série.

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n}$.

Régularité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $s > 1$,

$$f'_n(s) = -\ln n \cdot e^{-s \ln n} = -\frac{\ln n}{n^s}.$$

Convergence simple de $\sum f_n$. Pour tout $s > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$ converge : $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$, de somme ζ .

Convergence normale de $\sum f'_n$ sur tout segment. Soient $1 < a \leq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $s \in [a, b]$,

$$|f'_n(s)| = \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

Ce majorant ne dépend pas de s : f'_n est bornée sur $[a, b]$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\ln n}{n^a}$. Posons $c = \frac{a+1}{2}$, de sorte que $1 < c < a$. Par croissances comparées,

$$n^c \cdot \frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-c}} \rightarrow 0,$$

donc $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^c}$ est une série de Riemann convergente ($c > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge, puis $\sum \|f'_n\|_{\infty, [a, b]}$ converge : $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$.

Conclusion. Sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$, les f_n sont de classe C^1 , $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f'_n$ converge uniformément. D'après le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions, ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, de dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$. Par caractère local, ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $s > 1$,

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

ATTENDUS

- ☐ f_n de classe C^1 , $f'_n(s) = -\frac{\ln n}{n^s}$
- ☐ $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ (Riemann)
- ☐ Sur $[a, b]$ avec $a > 1$: $|f'_n(s)| \leq \frac{\ln n}{n^a}$, donc, par définition de la borne supérieure, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\ln n}{n^a}$
- ☐ $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ avec $1 < c < a$: convergence normale de $\sum f'_n$ sur $[a, b]$
- ☐ Théorème de dérivation sur tout segment, caractère local, $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t^n}{2^{n+1}}$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$, calculer sa somme et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

Corrigé. Convergence normale. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$. Comme $0 \leq t \leq 1$,

$$0 \leq f_n(t) = \frac{t^n}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t : f_n est bornée sur $[0, 1]$ et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Or $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Somme. Soit $t \in [0, 1]$. La série géométrique $\sum \left(\frac{t}{2}\right)^n$ est de raison $\frac{t}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$, donc

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{2-t}.$$

Intégration terme à terme. Les f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$ et $\sum f_n$ y converge normalement, donc uniformément. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la série $\sum \int_0^1 f_n(t) dt$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{2^{n+1}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{2-t}.$$

Or $\int_0^1 \frac{t^n}{2^{n+1}} dt = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{2-t} = [-\ln(2-t)]_0^1 = \ln 2$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln 2.$$

ATTENDUS

- $|f_n(t)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, donc, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n+1}}$; série géométrique, convergence normale
- Somme $S(t) = \frac{1}{2-t}$ (série géométrique de raison $\frac{t}{2}$)
- Intégration terme à terme sur $[0, 1]$ (continuité, convergence uniforme) : $\sum \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{2-t} = \ln 2$

On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$. Montrer que $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$.

Corrigé. Seule la limite en $+\infty$ est en jeu : on se place sur $I = [2, +\infty]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{1}{n^s}$.

Limite des termes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, $f_1(s) = 1$ pour tout s , donc $\ell_1 = 1$. Si $n \geq 2$, alors $\ln n > 0$ et $f_n(s) = e^{-s \ln n} \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$, donc $\ell_n = 0$.

Convergence normale sur I . Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \geq 2$. Comme $\ln n \geq 0$,

$$0 < \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n} \leq e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de s : f_n est bornée sur I et, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur I .

Conclusion. Le point $+\infty$ est une extrémité de I . D'après le théorème de la double limite, ζ admet une limite en $+\infty$ et

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

ATTENDUS

- ☐ Se placer sur $[2, +\infty]$: $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^2}$, majorant indépendant de s
- ☐ Par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$; convergence normale donc uniforme
- ☐ Limites des termes en $+\infty$: $\ell_1 = 1$ et $\ell_n = 0$ pour $n \geq 2$
- ☐ Théorème de la double limite : $\zeta(s) \rightarrow \sum \ell_n = 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$. On rappelle que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto |t|$. Déterminer la limite simple de (f'_n) sur $\mathbb{R}$ et montrer que (f'_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. Dérivées. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}, t^2 + \frac{1}{n^2} > 0$, donc f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$f'_n(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Limite simple. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t > 0$, alors $f'_n(t) \rightarrow \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \frac{t}{|t|} = 1$; si $t < 0$, alors $f'_n(t) \rightarrow -1$; enfin $f'_n(0) = 0$ pour tout n . La suite (f'_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par $g(t) = 1$ si $t > 0$, $g(0) = 0$ et $g(t) = -1$ si $t < 0$.

Convergence uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f'_n est continue sur $\mathbb{R}$, mais g n'est pas continue en 0. Si (f'_n) convergeait uniformément vers g sur $\mathbb{R}$, le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions donnerait g continue sur $\mathbb{R}$. Donc (f'_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

ATTENDUS

- ☐ $f'_n(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1/n^2}}$
- ☐ Limite simple : 1 si $t > 0$, -1 si $t < 0$, 0 en $t = 0$
- ☐ Pas de convergence uniforme : les f'_n sont continues et la limite ne l'est pas en 0 (contraposée du théorème de continuité)