

Questions de cours

Chapitre 7 — Réduction

QUESTIONS DE COURS

Question 1

ch07/q01

Soient $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Définir $P(u)$ et $P(A)$.

Corrigé. On a $P(u) = a_d u^d + \cdots + a_1 u + a_0 \text{Id} \in \mathcal{L}(E)$, avec $u^0 = \text{Id}$ et $u^k = u \circ \cdots \circ u$ (k facteurs), et $P(A) = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $A^0 = I_n$.

ATTENDUS

- ☐ $P(u) = a_d u^d + \cdots + a_1 u + a_0 \text{Id}$ (terme constant multiplié par Id)
- ☐ $P(A) = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$ (terme constant multiplié par I_n)

Question 2

ch07/q02

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Exprimer $(PQ)(u)$ en fonction de $P(u)$ et $Q(u)$. Qu'en déduit-on pour $P(u)$ et $Q(u)$? Que peut-on dire de $\text{Ker}(P(u))$ vis-à-vis de u ?

Corrigé. On a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Comme $PQ = QP$,

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u) :$$

$P(u)$ et $Q(u)$ commutent. En particulier $u = X(u)$ commute avec $P(u)$, donc $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u : si $P(u)(x) = 0$, alors $P(u)(u(x)) = u(P(u)(x)) = 0$.

ATTENDUS

- ☐ $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$
- ☐ $P(u)$ et $Q(u)$ commutent (car $PQ = QP$)
- ☐ $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u

Question 3

ch07/q03

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Que vaut $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$?

Corrigé. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$. En particulier, $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $P(A) = 0_n$.

ATTENDUS

- ☐ $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$

Question 4

ch07/q04

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Définir « P est un polynôme annulateur de u » et « P est un polynôme annulateur de A ».

Corrigé. Le polynôme P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_n$.

ATTENDUS

- ☐ P annule $u : P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- ☐ P annule $A : P(A) = 0_n$

Question 5

ch07/q05

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u admet un polynôme annulateur non nul de degré au plus n^2 .

Corrigé. Comme $\dim E = n$, on a $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$, donc la famille $(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{n^2})$, qui compte $n^2 + 1$ éléments, est liée : il existe $a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $a_0 \text{Id} + a_1 u + \dots + a_{n^2} u^{n^2} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le polynôme $P = a_{n^2} X^{n^2} + \dots + a_1 X + a_0$ est non nul, de degré au plus n^2 , et $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

ATTENDUS

- ☐ $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$, donc la famille $(\text{Id}, u, \dots, u^{n^2})$, de $n^2 + 1$ éléments, est liée
- ☐ Une relation de dépendance non triviale donne $P \neq 0$ de degré au plus n^2 avec $P(u) = 0$

Question 6

ch07/q06

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur non nul P et $k \in \mathbb{N}$. Décrire la méthode de calcul de u^k à partir de P .

Corrigé. Soit $d = \deg P \geq 1$.

1. **Division euclidienne.** On écrit $X^k = QP + R$ avec $\deg R \leq d - 1$.
2. **Calcul du reste.** On détermine les d coefficients de R sans calculer Q , en évaluant l'égalité en les racines de P : si λ est racine de P , alors $R(\lambda) = \lambda^k$. Si λ est racine multiple, on dérive l'égalité avant de l'évaluer en λ .
3. **Calcul de la puissance.** En appliquant l'égalité à u , $u^k = Q(u) \circ P(u) + R(u) = R(u)$, qui ne fait intervenir que $\text{Id}, u, \dots, u^{d-1}$.

ATTENDUS

- ☐ Division euclidienne $X^k = QP + R$ avec $\deg R < \deg P$
- ☐ Coefficients de R par évaluation en les racines de P (en dérivant pour une racine multiple)
- ☐ $u^k = Q(u) \circ P(u) + R(u) = R(u)$ car $P(u) = 0$

Question 7

ch07/q07

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. Décrire la méthode pour montrer que u est inversible et calculer u^{-1} .

Corrigé. On écrit $P = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_0 = P(0) \neq 0$.

1. **Isoler le terme constant.** L'égalité $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ s'écrit $a_d u^d + \dots + a_1 u = -a_0 \text{Id}$.
2. **Factoriser par u .** On obtient $u \circ (a_d u^{d-1} + \dots + a_1 \text{Id}) = -a_0 \text{Id}$, soit $u \circ v = \text{Id}$ avec $v = -\frac{1}{a_0} (a_d u^{d-1} + \dots + a_1 \text{Id})$.
3. **Conclure.** Comme v est un polynôme en u , il commute avec u , donc $v \circ u = \text{Id}$ également. Ainsi u est inversible et $u^{-1} = v$, polynôme en u de degré au plus $d - 1$.

ATTENDUS

- ☐ Isoler le terme constant $a_0 = P(0) \neq 0$ dans $P(u) = 0$
- ☐ Factoriser par u : $u \circ v = \text{Id}$ avec $v = -\frac{1}{a_0} (a_d u^{d-1} + \dots + a_1 \text{Id})$
- ☐ v commute avec u , donc u est inversible et $u^{-1} = v$

Question 8

ch07/q08

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Définir « λ est une valeur propre de u » et « x est un vecteur propre de u associé à λ ».

Corrigé. Le scalaire λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x , non nul et vérifiant $u(x) = \lambda x$, est un vecteur propre de u associé à λ .

ATTENDUS

- ☐ Valeur propre : il existe $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$
- ☐ Le vecteur x est non nul
- ☐ Vecteur propre associé à λ : $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$

Question 9

ch07/q09

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et λ une valeur propre de u . Définir le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ et justifier que c'est un sous-espace vectoriel de E .

Corrigé. Le sous-espace propre de u associé à λ est

$$E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}).$$

C'est un sous-espace vectoriel de E , comme noyau de l'application linéaire $u - \lambda \text{Id}$.

ATTENDUS

- ☐ $E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$
- ☐ $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$
- ☐ Noyau d'une application linéaire, donc sous-espace vectoriel

Question 10

ch07/q10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Définir « λ est une valeur propre de A », « X est un vecteur propre de A associé à λ » et le sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

Corrigé. Le scalaire λ est une valeur propre de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$; un tel X est un vecteur propre de A associé à λ . Le sous-espace propre associé est

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

ATTENDUS

- ☐ Valeur propre : il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$
- ☐ Vecteur propre associé à λ : $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$
- ☐ $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

Question 11

ch07/q11

Définir le spectre d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie et le spectre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le spectre d'une matrice dépend-il du corps $\mathbb{K}$? Donner un exemple.

Corrigé. Le spectre $\text{Sp}(u)$ de u est l'ensemble de ses valeurs propres. Le spectre $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ de A dans $\mathbb{K}$ est l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$. Il dépend du corps : pour $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_R = X^2 + 1$, donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \emptyset$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(R) = \{i, -i\}$.

ATTENDUS

- ☐ $\text{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u ; $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ celui des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$
- ☐ Oui, le spectre d'une matrice dépend du corps
- ☐ Un exemple de matrice réelle dont le spectre complexe diffère du spectre réel

Question 12

ch07/q12

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Que peut-on dire des sous-espaces propres de u vis-à-vis de v ?

Corrigé. Les sous-espaces propres de u sont stables par v : pour toute valeur propre λ de u , $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$.

ATTENDUS

- ☐ Les sous-espaces propres de u sont stables par v

Question 13

ch07/q13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de u . Quel lien y a-t-il entre les valeurs propres de u et les racines de P ? La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé. Toute valeur propre de u est racine de P : $\text{Sp}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}, P(\lambda) = 0\}$. La réciproque est fautive : le polynôme $X^2 - X$ annule Id_E , puisque $\text{Id}^2 = \text{Id}$, et 0 en est racine sans être valeur propre de Id_E , dont la seule valeur propre est 1.

ATTENDUS

- ☐ Toute valeur propre de u est racine de P
- ☐ La réciproque est fautive
- ☐ Un contre-exemple : un endomorphisme, un polynôme annulateur et une racine qui n'est pas valeur propre

Question 14

ch07/q14

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes. Que peut-on dire des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$? Qu'en déduit-on pour une famille de vecteurs propres associés à ces valeurs propres ?

Corrigé. Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe. Par conséquent, toute famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs propres de u , x_i étant associé à λ_i , est libre.

ATTENDUS

- ☐ Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe
- ☐ Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre

Question 15

ch07/q15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Définir le polynôme caractéristique χ_A . Définir de même χ_u pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie. Quel lien y a-t-il entre χ_u et le polynôme caractéristique d'une matrice de u ?

Corrigé. Le polynôme caractéristique de A est l'unique polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{K}, \chi_A(t) = \det(tI_n - A).$$

De même, χ_u est le polynôme tel que, pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\chi_u(t) = \det(t \text{Id} - u)$. Si A est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E , alors $\chi_u = \chi_A$: en particulier χ_A ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

ATTENDUS

- ☐ $\chi_A(t) = \det(tI_n - A)$ pour tout $t \in \mathbb{K}$
- ☐ $\chi_u(t) = \det(t \text{Id} - u)$ pour tout $t \in \mathbb{K}$
- ☐ $\chi_u = \chi_A$ pour A matrice de u dans une base quelconque

Question 16

ch07/q16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le degré, le coefficient dominant, le coefficient de degré $n - 1$ et le coefficient constant de χ_A .

Corrigé. Le polynôme χ_A est unitaire de degré n , son coefficient de degré $n - 1$ est $-\text{tr}(A)$ et son coefficient constant est $(-1)^n \det(A)$:

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

ATTENDUS

- ☐ $\deg \chi_A = n$
- ☐ χ_A est unitaire
- ☐ Coefficient de degré $n - 1$: $-\text{tr}(A)$
- ☐ Coefficient constant : $(-1)^n \det(A)$

Question 17

ch07/q17

Donner le polynôme caractéristique d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, puis celui d'une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients diagonaux $a_{11}, \dots, a_{nn}$.

Corrigé. Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\chi_A = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A).$$

Pour T triangulaire, $tI_n - T$ est triangulaire de coefficients diagonaux $t - a_{11}, \dots, t - a_{nn}$, donc

$$\chi_T = (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}).$$

ATTENDUS

- ☐ $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$
- ☐ $\chi_T = (X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn})$

Question 18

ch07/q18

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables. Que peut-on dire de leurs polynômes caractéristiques ? de leurs spectres ? La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc le même spectre, avec les mêmes multiplicités. La réciproque est fausse : I_2 et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont toutes deux pour polynôme caractéristique $(X - 1)^2$, mais pour toute matrice P inversible, $P^{-1}I_2P = I_2 \neq N$: elles ne sont pas semblables.

ATTENDUS

- ☐ Même polynôme caractéristique
- ☐ Même spectre (et mêmes multiplicités)
- ☐ Réciproque fausse, avec un contre-exemple : deux matrices de même polynôme caractéristique non semblables

Question 19

ch07/q19

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Quel lien y a-t-il entre les valeurs propres de u et le polynôme caractéristique χ_u ?

Corrigé. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$:

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \chi_u(\lambda) = 0\}.$$

ATTENDUS

- ☐ λ est valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$

Question 20

ch07/q20

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propre de u . Définir la multiplicité $m_\lambda(u)$ de λ et énoncer l'encadrement de $\dim E_\lambda(u)$.

Corrigé. La multiplicité $m_\lambda(u)$ de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u , c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $(X - \lambda)^m$ divise χ_u . On a

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u).$$

ATTENDUS

- ☐ $m_\lambda(u)$ est la multiplicité de λ comme racine de χ_u
☐ $\dim E_\lambda(u) \geq 1$
☐ $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$

Question 21

ch07/q21

Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Corrigé. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_n$. De même, pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou u endomorphisme d'un espace de dimension finie
☐ Conclusion : $\chi_A(A) = 0_n$, ou $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$; le polynôme caractéristique est annulateur

Question 22

ch07/q22

Définir « u est diagonalisable » pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie, puis « A est diagonalisable » pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corrigé. L'endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u . La matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale : il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

ATTENDUS

- ☐ u diagonalisable : il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale (base de vecteurs propres)
- ☐ A diagonalisable : A est semblable à une matrice diagonale, $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale

Question 23

ch07/q23

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . Énoncer la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de u portant sur ses sous-espaces propres, puis celle portant sur leurs dimensions.

Corrigé. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u),$$

si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = n.$$

ATTENDUS

- ☐ u diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$
- ☐ u diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = n$

Question 24

ch07/q24

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Énoncer la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de u faisant intervenir le polynôme caractéristique et les multiplicités.

Corrigé. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;
- pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.

ATTENDUS

- ☐ χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$
- ☐ Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$

Question 25

ch07/q25

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n . Énoncer une condition suffisante de diagonalisabilité de u portant sur le nombre de ses valeurs propres. Est-elle nécessaire ?

Corrigé. Si u admet n valeurs propres distinctes, c'est-à-dire si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable. Cette condition n'est pas nécessaire : pour $n \geq 2$, Id_E est diagonalisable, sa matrice dans toute base étant I_n , et n'a qu'une valeur propre.

ATTENDUS

- ☐ Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable
- ☐ Condition non nécessaire
- ☐ Un contre-exemple : un endomorphisme diagonalisable ayant moins de n valeurs propres

Question 26

ch07/q26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Décrire les étapes de la méthode pour diagonaliser A .

Corrigé.

1. **Calculer χ_A et ses racines.** On calcule $\chi_A(t) = \det(tI_n - A)$ en cherchant à le factoriser (développement selon une ligne ou une colonne creuse, opérations sur les lignes ou les colonnes). On en déduit $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et la multiplicité de chaque valeur propre. Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
2. **Déterminer une base de chaque sous-espace propre.** Pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on résout le système $(A - \lambda I_n)X = 0$; on a $\dim E_\lambda(A) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$.
3. **Conclure par les dimensions.** A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$ pour toute valeur propre λ .
4. **Construire P et D .** Les colonnes de P sont les vecteurs des bases des sous-espaces propres mis bout à bout; D est diagonale, son j -ième coefficient diagonal étant la valeur propre associée à la j -ième colonne de P . Alors $A = PDP^{-1}$.

ATTENDUS

- ☐ Calculer χ_A , ses racines et leurs multiplicités (non scindé $\Rightarrow$ non diagonalisable)
- ☐ Résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$ pour chaque valeur propre : base de $E_\lambda(A)$
- ☐ Comparer $\dim E_\lambda(A)$ et $m_\lambda(A)$ pour chaque valeur propre
- ☐ P = vecteurs propres en colonnes, D = valeurs propres dans le même ordre, $A = PDP^{-1}$

Question 27

ch07/q27

Soit $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$. Exprimer A^k pour $k \in \mathbb{N}$. À quelle condition A est-elle inversible, et que vaut alors A^{-1} ?

Corrigé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$, où D^k est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1^k, \dots, d_n^k$. La matrice A est inversible si et seulement si D l'est, c'est-à-dire si et seulement si tous les d_i sont non nuls, et alors $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, où D^{-1} est diagonale de coefficients diagonaux $\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}$.

ATTENDUS

- ☐ $A^k = PD^kP^{-1}$ avec D^k diagonale de coefficients $d_1^k, \dots, d_n^k$
- ☐ A inversible si et seulement si tous les d_i sont non nuls
- ☐ $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

Question 28

ch07/q28

Soit (u_n) une suite vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Écrire cette récurrence sous la forme $X_{n+1} = AX_n$, en précisant X_n et A , et exprimer X_n en fonction de X_0 .

Corrigé. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$AX_n = \begin{pmatrix} au_{n+1} + bu_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1},$$

et $X_n = A^n X_0$ (qui s'obtient par récurrence).

ATTENDUS

- ☐ $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
- ☐ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $X_n = A^n X_0$

EXERCICES

Exercice 1

ch07/x01

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A . En déduire que A est inversible, préciser A^{-1} , et calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $A^2 - I_2 = 0_2$: le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A .

L'égalité $A \cdot A = I_2$ montre que A est inversible et que $A^{-1} = A$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} = (A^2)^k = I_2^k = I_2$ et $A^{2k+1} = A^{2k}A = A$: $A^n = I_2$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.

ATTENDUS

- ☐ $A^2 = I_2$, donc $X^2 - 1$ annule A
- ☐ $A \cdot A = I_2$, donc A est inversible et $A^{-1} = A$
- ☐ $A^n = I_2$ si n est pair, $A^n = A$ si n est impair

Exercice 2

ch07/x02

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

Corrigé. Les endomorphismes $u = X(u)$ et $P(u)$ sont deux polynômes en u , donc ils commutent. Or le noyau et l'image d'un endomorphisme qui commute avec u sont stables par u : $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

ATTENDUS

- ☐ u et $P(u)$ commutent (polynômes en u)
- ☐ Le noyau et l'image d'un endomorphisme qui commute avec u sont stables par u

Exercice 3

ch07/x03

Soit p un projecteur et s une symétrie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Donner un polynôme annulateur non nul de p et un de s . Qu'en déduit-on sur leurs valeurs propres ?

Corrigé. Comme $p \circ p = p$, on a $p^2 - p = 0_{\mathcal{L}(E)}$: le polynôme $X^2 - X$ annule p .
Comme $s \circ s = \text{Id}$, on a $s^2 - \text{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$: le polynôme $X^2 - 1$ annule s .
Toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur, donc $\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $\text{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$. On n'obtient que des inclusions : pour $p = \text{Id}$, par exemple, 0 n'est pas valeur propre.

ATTENDUS

- ☐ $p^2 = p$, donc $X^2 - X$ annule p
- ☐ $s^2 = \text{Id}$, donc $X^2 - 1$ annule s
- ☐ Les valeurs propres sont racines du polynôme annulateur : $\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$, inclusion seulement
- ☐ De même $\text{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$, inclusion seulement

Exercice 4

ch07/x04

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 - A + 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A .

Corrigé. L'égalité $A^3 - A + 2I_n = 0_n$ s'écrit $A^3 - A = -2I_n$, soit $A(A^2 - I_n) = -2I_n$, ou encore

$$A \cdot \frac{1}{2}(I_n - A^2) = I_n.$$

Comme A et $\frac{1}{2}(I_n - A^2)$ sont des matrices carrées, cette égalité suffit : A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(I_n - A^2)$.

ATTENDUS

- ☐ Isoler le terme constant : $A(A^2 - I_n) = -2I_n$
- ☐ $A \cdot \frac{1}{2}(I_n - A^2) = I_n$
- ☐ Pour des matrices carrées, $AB = I_n$ suffit à conclure
- ☐ A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(I_n - A^2)$

Exercice 5

ch07/x05

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer χ_A . En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de A^k en fonction de A et I_2 .

Corrigé. On a $\text{tr}(A) = 4$ et $\det(A) = 3 + 1 = 4$, donc $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A annule A .

Soit $k \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^k par χ_A s'écrit $X^k = Q\chi_A + aX + b$. En évaluant en 2, puis en dérivant avant d'évaluer en 2, racine double de χ_A :

$$2^k = 2a + b \quad \text{et} \quad k2^{k-1} = a.$$

Donc $a = k2^{k-1}$ et $b = 2^k - 2a = (1 - k)2^k$.

En appliquant l'égalité à A ,

$$A^k = Q(A)\chi_A(A) + aA + bI_2 = k2^{k-1}A + (1 - k)2^kI_2.$$

ATTENDUS

- ☐ $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$
- ☐ Par Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$
- ☐ Division euclidienne $X^k = Q\chi_A + aX + b$, évaluée en 2 puis dérivée (racine double) : $a = k2^{k-1}$, $b = (1 - k)2^k$
- ☐ $A^k = k2^{k-1}A + (1 - k)2^kI_2$

Exercice 6

ch07/x06

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. En déduire que toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .

Corrigé. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$.

Pour $k = 0$, $u^0(x) = \text{Id}(x) = x = \lambda^0 x$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $u^k(x) = \lambda^k x$. Montrons que $u^{k+1}(x) = \lambda^{k+1} x$.

On a $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(\lambda^k x) = \lambda^k u(x) = \lambda^{k+1} x$.

En écrivant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, par linéarité,

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^d a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k x = P(\lambda)x.$$

Soit λ une valeur propre de u , x un vecteur propre associé et P un polynôme annulateur de u . Montrons que $P(\lambda) = 0$.

On a $0 = P(u)(x) = P(\lambda)x$. Comme $x \neq 0$, $P(\lambda) = 0$: λ est racine de P .

ATTENDUS

- ☐ Récurrence : $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- ☐ Par linéarité, $P(u)(x) = \sum a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$
- ☐ Si $P(u) = 0$, alors $P(\lambda)x = 0$ avec $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$

Exercice 7

ch07/x07

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Corrigé. La matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, de trace 2 et de déterminant -3 , donc

$$\chi_u = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1) \text{ et } \text{Sp}(u) = \{3, -1\}.$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $u(x, y) = 3(x, y)$ s'écrit $x + 2y = 3x$ et $2x + y = 3y$, soit $y = x : E_3(u) = \text{Vect}((1, 1))$.

L'équation $u(x, y) = -(x, y)$ s'écrit $x + 2y = -x$ et $2x + y = -y$, soit $y = -x : E_{-1}(u) = \text{Vect}((1, -1))$.

ATTENDUS

- ☐ $\chi_u = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$
- ☐ $\text{Sp}(u) = \{3, -1\}$
- ☐ $E_3(u) = \text{Vect}((1, 1))$ et $E_{-1}(u) = \text{Vect}((1, -1))$

Exercice 8

ch07/x08

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \mapsto P'$ l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que 0 est la seule valeur propre de u et déterminer $E_0(u)$.

Corrigé. Pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, $u^{n+1}(Q) = Q^{(n+1)} = 0$ car $\deg Q \leq n$: le polynôme X^{n+1} annule u . Toute valeur propre de u en est racine, donc $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$.

Le polynôme constant 1 est non nul et $u(1) = 0 = 0 \cdot 1 : 0$ est valeur propre de u , et c'est la seule.

Enfin $E_0(u) = \text{Ker } u$ est l'ensemble des polynômes de dérivée nulle, c'est-à-dire des polynômes constants : $E_0(u) = \mathbb{K}_0[X]$.

ATTENDUS

- ☐ $u^{n+1} = 0$, donc X^{n+1} annule u et $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$
- ☐ $u(1) = 0$ avec $1 \neq 0 : 0$ est valeur propre
- ☐ $E_0(u) = \text{Ker } u = \mathbb{K}_0[X]$, les polynômes constants

Exercice 9

ch07/x09

Soit r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $r(x, y) = (-y, x)$. Montrer que r n'a pas de valeur propre. Déterminer les valeurs propres complexes de sa matrice dans la base canonique.

Corrigé. La matrice de r dans la base canonique est $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de trace 0 et de déterminant 1, donc $\chi_r = X^2 + 1$. Les valeurs propres de r sont les racines réelles de χ_r ; comme $t^2 + 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il n'y en a pas : r n'a pas de valeur propre.
Les racines complexes de $\chi_R = X^2 + 1$ sont i et $-i$: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(R) = \{i, -i\}$.

ATTENDUS

- ☐ $\chi_r = X^2 + 1$
- ☐ Pas de racine réelle, donc pas de valeur propre
- ☐ $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(R) = \{i, -i\}$

Exercice 10

ch07/x10

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$ et λ une valeur propre de u . Montrer que $E_{\lambda}(u)$ est stable par v .

Corrigé. Soit $x \in E_{\lambda}(u)$, c'est-à-dire $u(x) = \lambda x$. Montrons que $v(x) \in E_{\lambda}(u)$.
On a

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

donc $v(x) \in E_{\lambda}(u)$: $E_{\lambda}(u)$ est stable par v .

ATTENDUS

- ☐ Pour $x \in E_{\lambda}(u)$, $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$
- ☐ Donc $v(x) \in E_{\lambda}(u)$

Exercice 11

ch07/x11

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et x_1, x_2 deux vecteurs propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrer que la famille (x_1, x_2) est libre.

Corrigé. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$. Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
En appliquant u , $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0$. En retranchant λ_1 fois la première égalité, il vient $\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x_2 = 0$. Comme $x_2 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq \lambda_1$, $\alpha_2 = 0$. La première égalité donne alors $\alpha_1 x_1 = 0$, donc $\alpha_1 = 0$ puisque $x_1 \neq 0$. La famille (x_1, x_2) est libre.

ATTENDUS

- ☐ Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$; montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- ☐ Appliquer u : $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0$
- ☐ Résoudre le système (toute méthode juste) en utilisant $x_1, x_2 \neq 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Exercice 12

ch07/x12

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer χ_A sous forme factorisée. En déduire le spectre de A et la multiplicité de chaque valeur propre.

Corrigé. Pour $t \in \mathbb{K}$, on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \\ &= (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t-2)(t+1)^2. \end{aligned}$$

Donc $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$, $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{2, -1\}$, la valeur propre 2 est simple et la valeur propre -1 est double.

ATTENDUS

- ☐ Opérations sur les colonnes et lignes faisant apparaître le facteur $t-2$
- ☐ $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$
- ☐ $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{2, -1\}$, 2 simple et -1 double

Exercice 13

ch07/x13

Montrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique.

Corrigé. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables : il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Montrons que $\chi_B = \chi_A$. Pour tout $t \in \mathbb{K}$,

$$tI_n - B = P^{-1}(tI_n)P - P^{-1}AP = P^{-1}(tI_n - A)P,$$

donc, le déterminant étant multiplicatif,

$$\chi_B(t) = \det(P^{-1}) \det(tI_n - A) \det(P) = \det(tI_n - A) = \chi_A(t).$$

Les polynômes χ_A et χ_B coïncident en tout point de $\mathbb{K}$, qui est infini : ils sont égaux.

ATTENDUS

- ☐ $B = P^{-1}AP$ et $tI_n - B = P^{-1}(tI_n - A)P$
- ☐ $\det(P^{-1}) \det(tI_n - A) \det(P) = \det(tI_n - A)$, donc $\chi_B(t) = \chi_A(t)$ pour tout t
- ☐ Deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{K}$ infini sont égaux

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{A^\top} = \chi_A$. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de $A^\top$?

Corrigé. Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $tI_n - A^\top = (tI_n - A)^\top$, et une matrice a le même déterminant que sa transposée, donc

$$\chi_{A^\top}(t) = \det(tI_n - A^\top) = \det(tI_n - A) = \chi_A(t).$$

Les deux polynômes coïncident sur $\mathbb{K}$, infini, donc $\chi_{A^\top} = \chi_A$.

Les valeurs propres de $A^\top$ sont les racines de $\chi_{A^\top} = \chi_A$: $A^\top$ et A ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités.

ATTENDUS

- ☐ $tI_n - A^\top = (tI_n - A)^\top$
- ☐ $\det M^\top = \det M$, donc $\chi_{A^\top}(t) = \chi_A(t)$ pour tout t , et $\chi_{A^\top} = \chi_A$
- ☐ $A^\top$ et A ont les mêmes valeurs propres
- ☐ Avec les mêmes multiplicités

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. On a $\text{tr}(A) = 2$ et $\det(A) = -3$, donc $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$. La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, 3 et -1 : elle est diagonalisable.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'équation $AX = 3X$ s'écrit $y = x$ et l'équation $AX = -X$ s'écrit $y = -x$:

$$E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

puisque $P^2 = 2I_2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $PD^n = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^n & -(-1)^n \end{pmatrix}$, donc

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

ATTENDUS

- ☐ $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$
- ☐ Deux valeurs propres distinctes en dimension 2 : A est diagonalisable
- ☐ $E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, d'où P et D
- ☐ $P^{-1} = \frac{1}{2}P$
- ☐ $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$

Exercice 16

ch07/x16

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable par un argument de dimension des sous-espaces propres.

Corrigé. La matrice A est triangulaire, donc $\chi_A = (X - 1)^2 : \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{1\}$ et $m_1(A) = 2$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'équation $AX = X$ s'écrit $x + y = x$ et $y = y$, soit $y = 0 : E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A)$. La matrice A n'est pas diagonalisable.

ATTENDUS

- ☐ $\chi_A = (X - 1)^2$, 1 est valeur propre double
- ☐ $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, de dimension 1
- ☐ $\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A)$, donc A n'est pas diagonalisable

Exercice 17

ch07/x17

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

Corrigé. La matrice A est triangulaire, donc $\chi_A = (X - 1)^2$ et $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{1\}$.

On suppose par l'absurde que A est diagonalisable : il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A , donc $D = I_2$, et $A = PI_2P^{-1} = I_2$. Or $A \neq I_2$. Contradiction.

Donc A n'est pas diagonalisable.

ATTENDUS

- ☐ $\chi_A = (X - 1)^2$, donc $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{1\}$
- ☐ Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de $A : D = I_2$
- ☐ Alors $A = PI_2P^{-1} = I_2$, contradiction

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$. Montrer que A est diagonalisable et donner une base de chaque sous-espace propre.

Corrigé. Le polynôme $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$ est scindé, avec 2 valeur propre simple et -1 valeur propre double.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, les trois équations du système $(A + I_3)X = 0$ s'écrivent toutes $x + y + z = 0$, soit $z = -x - y$ avec x et y quelconques : les solutions sont les

$$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\dim E_{-1}(A) = 2 = m_{-1}(A)$.

La valeur propre 2 étant simple, $\dim E_2(A) = 1 = m_2(A)$: la matrice A est diagonalisable.

Le système $(A - 2I_3)X = 0$ s'écrit $-2x + y + z = 0$, $x - 2y + z = 0$ et $x + y - 2z = 0$; en retranchant les deux premières lignes, $x = y$, puis $z = x$:

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

ATTENDUS

□ χ_A scindé, 2 simple et -1 double

□ $(A + I_3)X = 0$ équivaut à $z = -x - y$: $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, de dimension $2 = m_{-1}(A)$

□ Valeur propre 2 simple : $\dim E_2(A) = 1$, donc A est diagonalisable

□ $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 19

ch07/x19

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\sin \theta \neq 0$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. La matrice R_θ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Corrigé. On a $\text{tr}(R_\theta) = 2 \cos \theta$ et $\det(R_\theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, donc $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$, de discriminant $4 \cos^2 \theta - 4 = -4 \sin^2 \theta < 0$. Le polynôme χ_{R_θ} n'a pas de racine réelle : il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et R_θ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sur $\mathbb{C}$, ses racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, distinctes car $\sin \theta \neq 0$: R_θ admet deux valeurs propres complexes distinctes, donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

ATTENDUS

- ☐ $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$
- ☐ Discriminant $-4 \sin^2 \theta < 0$: pas de racine réelle, non diagonalisable sur $\mathbb{R}$
- ☐ Racines complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, distinctes car $\sin \theta \neq 0$
- ☐ Deux valeurs propres distinctes en dimension 2 : diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Exercice 20

ch07/x20

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Vérifier par le calcul que $A^2 - \text{tr}(A) A + \det(A) I_2 = 0$.

Corrigé. On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) A = \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^2 - \text{tr}(A) A = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = -\det(A) I_2,$$

soit $A^2 - \text{tr}(A) A + \det(A) I_2 = 0_2$.

ATTENDUS

- ☐ $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\text{tr}(A) A = (a + d)A$
- ☐ $A^2 - (a + d)A = (bc - ad)I_2 = -\det(A) I_2$

Exercice 21

ch07/x21

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = X^3 - 3X - 2$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A .

Corrigé. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0_3$, soit $A^3 - 3A - 2I_3 = 0_3$. On isole le terme constant : $A^3 - 3A = 2I_3$, donc

$$A \cdot \frac{1}{2} (A^2 - 3I_3) = I_3.$$

Comme A et $\frac{1}{2}(A^2 - 3I_3)$ sont des matrices carrées, cette égalité suffit : A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I_3)$.

ATTENDUS

- ☐ Cayley-Hamilton : $A^3 - 3A - 2I_3 = 0_3$
- ☐ Factoriser : $A \cdot \frac{1}{2}(A^2 - 3I_3) = I_3$
- ☐ Pour des matrices carrées, $AB = I_3$ suffit à conclure
- ☐ A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I_3)$

Exercice 22

ch07/x22

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n , puis les valeurs propres de A . En déduire la forme de u_n et la calculer.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $X_n = A^n X_0$.

On a $\text{tr}(A) = 1$ et $\det(A) = -2$, donc $\chi_A = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$: les valeurs propres de A sont 2 et -1 .

Elles sont distinctes, donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et P inversible, et $A^n = PD^nP^{-1}$: les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires de 2^n et $(-1)^n$, et u_n , deuxième coordonnée de $A^n X_0$, est de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta (-1)^n$.

Les conditions $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent $\alpha + \beta = 1$ et $2\alpha - \beta = 1$, d'où $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

ATTENDUS

- ☐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_n = A^n X_0$
- ☐ $\chi_A = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$, valeurs propres 2 et -1
- ☐ A diagonalisable, $A^n = PD^nP^{-1}$, donc $u_n = \alpha 2^n + \beta (-1)^n$
- ☐ Conditions initiales : $u_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

Exercice 23

ch07/x23

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

Montrer que $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Corrigé. Comme χ_A est unitaire et scindé de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité,

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) = X^n - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Par ailleurs, le coefficient de degré $n - 1$ de χ_A est $-\text{tr}(A)$ et son coefficient constant est $(-1)^n \det(A)$. En identifiant, $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

ATTENDUS

- ☐ $\chi_A = \prod (X - \lambda_i)$, de coefficient de degré $n - 1$ égal à $-\sum \lambda_i$ et de coefficient constant $(-1)^n \prod \lambda_i$
- ☐ Identification avec $-\text{tr}(A)$: $\text{tr}(A) = \sum \lambda_i$
- ☐ Identification avec $(-1)^n \det(A)$: $\det(A) = \prod \lambda_i$

Exercice 24

ch07/x24

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, avec $p \neq 0$ et $p \neq \text{Id}$. Montrer que p est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.

Corrigé. Comme $p \circ p = p$, le polynôme $X^2 - X$ annule p , donc $\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.

Comme $p \neq \text{Id}$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) \neq x$. Le vecteur $y = x - p(x)$ est non nul et $p(y) = p(x) - p(x) = 0$: 0 est valeur propre de p , et $E_0(p) = \text{Ker}(p)$.

Comme $p \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) \neq 0$. Le vecteur $y = p(x)$ est non nul et $p(y) = p(x) = y$: 1 est valeur propre de p , et $E_1(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}) = \text{Im}(p)$.

Ainsi $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$. Pour $x \in E$,

$$x = (x - p(x)) + p(x), \quad x - p(x) \in \text{Ker}(p) = E_0(p), \quad p(x) \in \text{Im}(p) = E_1(p),$$

donc $E = E_0(p) + E_1(p)$. La somme des sous-espaces propres de p est égale à E : p est diagonalisable.

Ses sous-espaces propres sont $E_0(p) = \text{Ker}(p)$ et $E_1(p) = \text{Im}(p)$.

ATTENDUS

- ☐ $X^2 - X$ annule p , donc $\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$
- ☐ $p \neq \text{Id}$: $y = x - p(x) \neq 0$ vérifie $p(y) = 0$, donc 0 est valeur propre
- ☐ $p \neq 0$: $y = p(x) \neq 0$ vérifie $p(y) = y$, donc 1 est valeur propre
- ☐ $x = (x - p(x)) + p(x)$ avec $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ et $p(x) \in \text{Im}(p)$, donc $E = E_0(p) + E_1(p)$
- ☐ Somme des sous-espaces propres égale à E : p est diagonalisable
- ☐ $E_0(p) = \text{Ker}(p)$ et $E_1(p) = \text{Im}(p)$