Séance à distance

Réduction : diagonaliser une matrice
Intégrales généralisées : fonctions continues par morceaux sur un segment

Mode d'emploi

— **Travail par groupe de colle** dans votre salle. Je passe régulièrement dans chaque groupe. Si vous êtes bloqués, signalez-le (chat ou main levée) plutôt que d'attendre.

— Les étoiles indiquent la difficulté : $\star$ application directe, $\star\star$ demande de l'initiative, $\star\star\star$ difficile.

— Les exercices marqués « bonus » peuvent être laissés au premier passage.

Dans toute la fiche, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Fin du chapitre Réduction : diagonaliser une matrice

1.1 La méthode

Méthode : diagonaliser une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour diagonaliser A :

1. **Calculer χ_A et ses racines.** Pour $t \in \mathbb{K}$, on calcule $\chi_A(t) = \det(tI_n - A)$ en cherchant à le factoriser directement : développement selon une ligne ou une colonne qui contient des zéros, opérations sur les lignes ou les colonnes qui font apparaître un facteur commun. On en déduit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et la multiplicité de chaque valeur propre. Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
2. **Déterminer une base de chaque sous-espace propre.** Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on résout le système $(A - \lambda I_n)X = 0$. On a $\dim E_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.
3. **Conclure sur la diagonalisabilité par les dimensions.** La matrice A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$ pour toute valeur propre λ. Cette égalité est automatique pour une valeur propre simple : on commence donc par les valeurs propres multiples. Si l'une d'elles vérifie $\dim E_\lambda(A) < m_\lambda(A)$, la matrice A n'est pas diagonalisable et l'on s'arrête.
4. **Construire P et D.** On concatène les bases des sous-espaces propres : on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, dont les vecteurs forment les colonnes de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. La matrice D est diagonale, et son j-ème coefficient diagonal est la valeur propre associée à la j-ème colonne de P. Alors $A = PDP^{-1}$. Le calcul de P^{-1} n'est utile que pour exploiter cette égalité, par exemple pour calculer les puissances de A.

Exemple détaillé. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On suit les quatre étapes de la méthode.

Étape 1 : le polynôme caractéristique. Soit $t \in \mathbb{K}$. On a

$$\chi_M(t) = \det(tI_3 - M) = \begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix}.$$

La somme des coefficients de chaque ligne vaut $t-2$. On ajoute donc la deuxième et la troisième colonne à la première, ce qui ne change pas le déterminant, puis on met $t-2$ en facteur dans la première colonne :

$$\chi_M(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ t-2 & t & -1 \\ t-2 & -1 & t \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}.$$

On retranche ensuite la première ligne à la deuxième et à la troisième ; la matrice obtenue est triangulaire supérieure, et son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\chi_M(t) = (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t-2)(t+1)^2.$$

Donc $\chi_M = (X-2)(X+1)^2$. Il est scindé, ses racines sont 2 et -1 : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M) = \{2, -1\}$, avec $m_2(M) = 1$ et $m_{-1}(M) = 2$.

Étape 2 : une base de chaque sous-espace propre. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

Pour $\lambda = -1$, on résout $(M + I_3)X = 0$. Comme $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les trois équations du système sont identiques :

$$(M + I_3)X = 0 \iff x + y + z = 0 \iff x = -y - z.$$

Les solutions sont donc les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{K}.$$

Ainsi

$$E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : ils forment une famille libre, donc une base de $E_{-1}(M)$, et $\dim E_{-1}(M) = 2$. On le retrouve par le rang : $M + I_3$ a ses trois lignes égales et non nulles, elle est de rang 1, et $\dim E_{-1}(M) = 3 - 1 = 2$.

Pour $\lambda = 2$, on résout $(M - 2I_3)X = 0$:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \iff x = y = z,$$

où l'on a remplacé la première ligne par sa différence avec la deuxième, et la troisième par sa différence avec la deuxième ; si $x = y = z$, la deuxième équation est vérifiée. Ainsi

$$E_2(M) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de dimension 1.

Étape 3 : la diagonalisabilité. La valeur propre 2 est simple, donc $\dim E_2(M) = 1 = m_2(M)$ sans autre vérification. Pour la valeur propre double -1, on a trouvé $\dim E_{-1}(M) = 2 = m_{-1}(M)$. Le

polynôme χ_M est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre : M est diagonalisable.

Étape 4 : les matrices P et D. On met bout à bout la base de $E_2(M)$ et celle de $E_{-1}(M)$: on obtient trois vecteurs, qui forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de M. La matrice P a pour colonnes ces trois vecteurs, dans cet ordre. La matrice D est diagonale, et son coefficient diagonal de la colonne j est la valeur propre associée à la colonne j de P : 2 pour la première colonne, -1 pour la deuxième et la troisième. Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est inversible, puisque ses colonnes forment une base, et $M = PDP^{-1}$. Pour le contrôler sans calculer P^{-1}, on vérifie l'égalité équivalente $MP = PD$: la colonne j de MP est l'image par M de la colonne j de P, et celle de PD est la colonne j de P multipliée par le j-ème coefficient diagonal de D. Par exemple,

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un autre ordre des vecteurs donne une autre matrice P et les mêmes coefficients diagonaux dans D, rangés dans le même ordre que les colonnes de P.

Exercice 1 – guidé, pour tous : diagonaliser en suivant la méthode.

Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On diagonalise C en suivant la méthode.

1. En développant $\det(tI_3 - C)$ selon la troisième colonne, montrer que $\chi_C = (X-1)^2(X-2)$. Donner les valeurs propres de C et leurs multiplicités.
2. Déterminer le rang de $C - I_3$, puis une base de $E_1(C)$. On doit trouver
$$E_1(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
Déterminer ensuite une base de $E_2(C)$.
3. La matrice C est-elle diagonalisable ?
4. Donner P et D telles que $C = PDP^{-1}$, et vérifier que $CP = PD$.

1.2 Calcul des puissances

Proposition : puissances d'une matrice diagonalisable

Soit $A = PDP^{-1}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$A^k = PD^kP^{-1},$$
où D^k est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1^k, \dots, d_n^k$.

De plus A est inversible si et seulement si D l'est, c'est-à-dire si et seulement si tous les d_i sont non nuls, et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Exercice 2 – $\star$ une symétrie.

Soit $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Calculer χ_S. En déduire que S est diagonalisable.
2. Déterminer $E_1(S)$ et $E_{-1}(S)$. On doit trouver $E_1(S) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $E_{-1}(S) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. Vérifier que $P^2 = 2I_2$ et que $SP = PD$. En déduire $S = PDP^{-1}$.
4. Calculer D^k, en distinguant selon la parité de k.
5. En déduire S^k. Retrouver ce résultat à partir de $S^2 = I_2$.

Exercice 3 – guidé, pour tous : les puissances de M.

Soit $M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a vu que $M = PDP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et Δ la matrice diagonale de coefficients diagonaux a, b, b. Montrer que
$$P\Delta P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a+2b & a-b & a-b\\a-b & a+2b & a-b\\a-b & a-b & a+2b\end{pmatrix}.$$
3. En déduire M^k.
4. Justifier que M est inversible, calculer M^{-1}, et vérifier que $MM^{-1} = I_3$.

1.3 Suites récurrentes

Les puissances d'une matrice servent à exprimer les termes de deux suites définies par des relations de récurrence couplées.

Proposition : récurrences linéaires couplées

Soient (u_n) et (v_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases}u_{n+1} = au_n + bv_n\\v_{n+1} = cu_n + dv_n\end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$. On a $X_{n+1} = AX_n$ et :

$$X_n = A^n X_0.$$

Exercice 4 – ⋆ deux suites couplées.

Soit (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases}u_{n+1} = u_n + 2v_n\\v_{n+1} = 2u_n + v_n\end{cases}$$

1. Écrire ces relations sous la forme $X_{n+1} = AX_n$, en précisant X_n et la matrice A.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AP = PD$ et que $P^2 = 2I_2$. En déduire que $A = PDP^{-1}$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}.$$
3. En déduire u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Vérifier le résultat pour $n = 1$.

Proposition : récurrences linéaires d'ordre 2

Soit (u_n) telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
On note $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $X_{n+1} = AX_n$ et :
$$X_n = A^n X_0.$$

Exercice 5 – ⋆ une suite récurrente d'ordre 2.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire cette relation sous la forme $X_{n+1} = AX_n$, en précisant X_n, X_0 et la matrice A.
2. Vérifier que $\chi_A = (X-2)(X+1)$, que $E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que $E_{-1}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire que A est diagonalisable, et donner P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.
4. Vérifier le résultat pour $n = 2$.

À retenir

— **Diagonaliser** : χ_A factorisé, puis une base de chaque sous-espace propre, puis comparaison des dimensions et des multiplicités, puis P (les vecteurs propres en colonnes) et D (les valeurs propres associées, dans le même ordre).
— **Contrôler** : on vérifie $AP = PD$, colonne par colonne, sans calculer P^{-1}.
— **Puissances** : $A^k = PD^kP^{-1}$, et D^k s'obtient en élevant les coefficients diagonaux à la puissance k. C'est ce qui donne le terme général des suites récurrentes linéaires.

2 Intégrales généralisées : fonctions continues par morceaux sur un segment

En première année, l'intégrale $\int_a^b f$ a été définie pour une fonction f continue sur un segment $[a, b]$. On l'étend ici à des fonctions qui présentent un nombre fini de sauts : on découpe le segment en morceaux sur lesquels la fonction se comporte comme une fonction continue, et on ajoute les aires.

Définition : fonction continue par morceaux sur un segment

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est **continue par morceaux** sur I s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de I, c'est-à-dire une famille finie de réels telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, vérifiant : pour chaque indice $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$.

Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

La définition ne regarde que les restrictions de f aux intervalles ouverts $]x_k, x_{k+1}[$: sur chacun d'eux, f est continue et admet une limite finie aux deux bornes. On en tire une reformulation, plus commode en pratique.

Proposition : caractérisation

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. La fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si elle est continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, en chacun desquels elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite (à droite seulement en a, à gauche seulement en b).

Exercice 6 – guidé, pour tous : la partie entière.

Soit $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \lfloor t \rfloor$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Sur quels intervalles la fonction f est-elle constante ? En déduire les points de $[-1, 3]$ où elle n'est pas continue.
3. En chacun de ces points, déterminer la limite à gauche et, sauf en 3, la limite à droite de f.
4. À l'aide de la caractérisation, conclure que f est continue par morceaux sur $[-1, 3]$, et donner une subdivision adaptée.
5. Pour chaque morceau ouvert de cette subdivision, donner le prolongement continu de la restriction de f, comme le demande la définition.

Exercice 7 – ⋆ la tangente.

Soit f la fonction définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par $f(t) = \tan t$ si $|t| < \pi/2$ et $f(\pm\pi/2) = 0$.

1. Justifier que f est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
2. Déterminer la limite de f à gauche en $\pi/2$.
3. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[-\pi/2, \pi/2]$?
4. La réponse change-t-elle si l'on remplace les valeurs $f(\pm\pi/2)$ par d'autres réels ?

Les fonctions continues par morceaux se combinent comme les fonctions continues.

Proposition : opérations

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions $f + g$, λf et fg sont continues par morceaux sur $[a, b]$.
2. La restriction de f à tout segment $[c, d] \subset [a, b]$ est continue par morceaux sur $[c, d]$.
3. La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

Exercice 8 – ⋆ application des opérations.

Justifier que les fonctions suivantes sont continues par morceaux sur $[0, 2]$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 6.

1. $t \mapsto \lfloor t \rfloor$.
2. $t \mapsto 3\lfloor t \rfloor + t^2$.
3. $t \mapsto t\lfloor t \rfloor$.
4. $t \mapsto |\lfloor t \rfloor - 1|$.
5. $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\lfloor t \rfloor$, à valeurs complexes.

La liste ne contient ni l'inverse ni la composée : les deux exercices suivants montrent qu'ils ne se comportent pas comme pour les fonctions continues.

Exercice 9 – ⋆ bonus : l'inverse.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$ si $t > 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $[0,1]$ et qu'elle ne s'annule pas.
2. Déterminer la limite à droite en 0 de $1/f$.
3. La fonction $1/f$ est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?

Exercice 10 – ⋆⋆ bonus : la composée.

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\sin(1/t)$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$, et soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = 1$ si $u > 0$ et $g(u) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$. On pourra majorer $|f(t)|$.
2. Montrer que g est continue par morceaux sur $[-1,1]$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de f sur $\left]\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{(2k+2)\pi}, \frac{1}{(2k+1)\pi}\right[$.
4. En déduire que $g \circ f$ n'a pas de limite à droite en 0. Est-elle continue par morceaux sur $[-1,1]$?

À retenir

— **Sur un segment**, on montre qu'une fonction est continue par morceaux par la caractérisation : continue sauf en un nombre fini de points, avec des limites *finies* à gauche et à droite en ces points.

— **Opérations** : sommes, combinaisons linéaires, produits, restrictions à un segment et valeurs absolues de fonctions continues par morceaux sont continues par morceaux ; ni l'inverse ni la composée ne le sont en général.

3 Exercices pour ceux qui vont vite

Exercice 11 – ⋆ diagonalisable ou non ?.

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, donner P et D.

1. $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$.
3. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 – ⋆⋆ une matrice à paramètre.

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que T_a est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Exercice 13 – ⋆ trois suites couplées.

Soit (u_n), (v_n), (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n, à l'aide de l'exercice 3.

Exercice 14 – ⋆⋆ une racine carrée de matrice.

On reprend la matrice C et les matrices P et D de l'exercice 1.

1. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *(si vous avez rangé les vecteurs propres dans l'ordre* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*)*.
2. Trouver une matrice diagonale Δ telle que $\Delta^2 = D$, puis une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = C$. Calculer B.

Exercice 15 – ⋆⋆ l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1$ si $t \in \mathbb{Q}$ et $f(t) = 0$ sinon.

1. Soit $t_0 \in [0,1]$. Justifier que tout intervalle $]t_0, t_0 + \eta[$, avec $\eta > 0$, contient un rationnel et un irrationnel.
2. En déduire que f n'admet de limite à droite en aucun point de $[0,1[$.
3. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?