Séance à distance – Corrigé

Réduction : diagonaliser une matrice
Intégrales généralisées : fonctions continues par morceaux sur un segment

Rappels utilisés tout au long du corrigé

Deux outils

Contrôler une diagonalisation. Si les colonnes de P forment une base et si $AP = PD$, alors P est inversible et $A = PDP^{-1}$ (on multiplie à droite par P^{-1}). L'égalité $AP = PD$ se vérifie colonne par colonne : la colonne j de AP est A fois la colonne j de P, celle de PD est la colonne j de P multipliée par le j-ème coefficient diagonal de D.

Montrer qu'une fonction est continue par morceaux sur un segment. On utilise la caractérisation : on repère les points où la fonction n'est pas continue, on vérifie qu'ils sont en nombre fini, et qu'en chacun d'eux les limites à gauche et à droite existent et sont *finies*.

1 Fin du chapitre Réduction : diagonaliser une matrice

1.1 La méthode

Exercice 1 – guidé, pour tous : diagonaliser en suivant la méthode.

1. Pour $t \in \mathbb{K}$, en développant selon la troisième colonne,
$$\det(tI_3 - C) = \begin{vmatrix} t-3 & 1 & 0 \\ -2 & t & 0 \\ -2 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t-1)(t^2-3t+2) = (t-1)^2(t-2).$$
Donc $\chi_C = (X-1)^2(X-2)$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(C) = \{1, 2\}$, la valeur propre 1 est double et la valeur propre 2 simple.
2. On a
$$C - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
dont les trois lignes sont égales et non nulles : $C - I_3$ est de rang 1, et $\dim E_1(C) = 3 - 1 = 2$. Le système $(C - I_3)X = 0$ se réduit à $y = 2x$: ses solutions sont les
$$\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x, z \in \mathbb{K},$$
et ces deux colonnes, non colinéaires, forment une base de $E_1(C)$. Le système $(C - 2I_3)X = 0$ s'écrit
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$
d'où $y = x$ et $z = x$: $E_2(C) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On a $\dim E_1(C) = 2 = m_1(C)$, et la valeur propre 2 est simple : C est diagonalisable.
4. En concaténant les bases de $E_1(C)$ et de $E_2(C)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie

$$CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = PD.$$

1.2 Calcul des puissances

Exercice 2 – ⋆ une symétrie.

1. Pour $t \in \mathbb{K}$, $\chi_S(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Donc $\chi_S = (X-1)(X+1) : S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ admet deux valeurs propres distinctes, 1 et -1, elle est diagonalisable.
2. Le système $(S - I_2)X = 0$ s'écrit $-x + y = 0$ (deux fois) : $y = x$, et $E_1(S) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le système $(S + I_2)X = 0$ s'écrit $x + y = 0$: $y = -x$, et $E_{-1}(S) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$, donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}P$. De plus

$$SP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = PD.$$

En multipliant à droite par P^{-1}, $S = PDP^{-1}$.
4. $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$: si k est pair, $D^k = I_2$, et si k est impair, $D^k = D$.
5. D'après la proposition, $S^k = PD^kP^{-1}$. Si k est pair, $S^k = PP^{-1} = I_2$; si k est impair, $S^k = PDP^{-1} = S$. Directement, $S^2 = I_2$: pour $k = 2q$, $S^k = (S^2)^q = I_2$, et pour $k = 2q + 1$, $S^k = (S^2)^q S = S$.

Exercice 3 – guidé, pour tous : les puissances de M.

1. On calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3.$$

Comme P est carrée, P est inversible et P^{-1} est la matrice annoncée.
2. On a

$$P\Delta = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & -b & 0 \\ a & 0 & -b \end{pmatrix},$$

et en multipliant à droite par P^{-1}, on obtient la matrice annoncée : par exemple, le coefficient d'indice $(1, 1)$ est $\frac{1}{3}(a + b + b)$ et celui d'indice $(1, 2)$ est $\frac{1}{3}(a - 2b + b)$.

3. D'après la proposition, $M^k = PD^kP^{-1}$, où D^k est diagonale de coefficients diagonaux 2^k, $(-1)^k$, $(-1)^k$. Avec $a = 2^k$ et $b = (-1)^k$,

$$M^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^k + 2(-1)^k & 2^k - (-1)^k & 2^k - (-1)^k \\ 2^k - (-1)^k & 2^k + 2(-1)^k & 2^k - (-1)^k \\ 2^k - (-1)^k & 2^k - (-1)^k & 2^k + 2(-1)^k \end{pmatrix}.$$

4. Les coefficients diagonaux 2, -1, -1 de D sont non nuls : d'après la proposition, M est inversible et $M^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, où D^{-1} est diagonale de coefficients diagonaux $\frac{1}{2}$, -1, -1. Avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -1$, $a + 2b = -\frac{3}{2}$ et $a - b = \frac{3}{2}$, donc

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie

$$MM^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3.$$

1.3 Suites récurrentes

Exercice 4 – ⋆ deux suites couplées.

1. Avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On calcule

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = PD \quad \text{et} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

Donc P est inversible, $P^{-1} = \frac{1}{2}P$, et en multipliant $AP = PD$ à droite par P^{-1}, $A = PDP^{-1}$. D'après la proposition sur les puissances, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^n & -(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

3. D'après la proposition, $X_n = A^nX_0$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, X_n est la première colonne de A^n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}.$$

4. Pour $n = 1$, les formules donnent $u_1 = 1$ et $v_1 = 2$, et les relations de récurrence donnent $u_1 = u_0 + 2v_0 = 1$ et $v_1 = 2u_0 + v_0 = 2$.

Exercice 5 – ⋆ une suite récurrente d'ordre 2.

1. Avec $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Pour $t \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1).$$

On a $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: ces deux colonnes non nulles sont des vecteurs propres associés à 2 et à -1. Les valeurs propres 2 et -1 sont simples, donc leurs sous-espaces

propres sont de dimension 1, ce qui donne les égalités annoncées. La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ admet 2 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable, et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On a $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3I_2$: comme P est carrée, P est inversible et P^{-1} est la matrice annoncée. D'après la proposition, $X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$, avec

$$P^{-1}X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad D^n P^{-1} X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n \\ -(-1)^n \end{pmatrix}.$$

   Le terme u_n est la seconde coordonnée de X_n, soit la seconde ligne de P appliquée à ce vecteur : $u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.
4. La formule donne $u_2 = \frac{4-1}{3} = 1$, et la relation de récurrence $u_2 = u_1 + 2u_0 = 1$.

2 Intégrales généralisées : fonctions continues par morceaux sur un segment

Exercice 6 – guidé, pour tous : la partie entière.

1. Le graphe est formé des segments horizontaux d'ordonnée m sur $[m, m+1[$ pour $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$, et du point $(3, 3)$.
2. La fonction f est constante, égale à m, sur chacun des intervalles $[m, m+1[$, pour $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$, et $f(3) = 3$. Elle est donc continue en tout point de $]m, m+1[$, ainsi qu'en -1, où elle vaut -1 sur $[-1, 0[$. Elle n'est pas continue en 0, 1, 2 et 3, où elle vaut m alors qu'elle vaut $m-1$ juste à gauche.
3. En $m \in \{0, 1, 2\}$, la limite à gauche est $m-1$ et la limite à droite est m ; en 3, la limite à gauche est 2. Toutes sont finies.
4. La fonction f est continue sur $[-1, 3]$ sauf en quatre points, en chacun desquels elle admet des limites finies à gauche et à droite (à gauche seulement en 3) : d'après la caractérisation, elle est continue par morceaux sur $[-1, 3]$. La subdivision $(-1, 0, 1, 2, 3)$ lui est adaptée.
5. Sur $]m, m+1[$, avec $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$, la restriction de f est la constante m, qui se prolonge en la fonction constante égale à m sur $[m, m+1]$.

Exercice 7 – ⋆ la tangente.

1. Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, la fonction f coïncide avec la tangente, qui y est continue.
2. $\tan t \to +\infty$ quand $t \to \pi/2^-$.
3. Non. D'après la caractérisation, une fonction continue par morceaux sur $[-\pi/2, \pi/2]$ admet une limite finie à gauche en $\pi/2$, ce qui n'est pas le cas de f.
4. Non. La limite à gauche en $\pi/2$ ne dépend que des valeurs de f sur $]-\pi/2, \pi/2[$, et reste $+\infty$ quelles que soient les valeurs choisies en $\pm\pi/2$.

Exercice 8 – ⋆ application des opérations.

1. D'après l'exercice 6, la partie entière est continue par morceaux sur $[-1, 3]$; sa restriction au segment $[0, 2] \subset [-1, 3]$ l'est donc sur $[0, 2]$.
2. La fonction $t \mapsto t^2$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[0, 2]$: la combinaison linéaire $3\lfloor t \rfloor + t^2$ l'est aussi.
3. C'est le produit de $t \mapsto t$, continue, et de la partie entière.

4. La fonction $t \mapsto \lfloor t \rfloor - 1$ est la différence de la partie entière et d'une constante ; sa valeur absolue est continue par morceaux.
5. Sa partie réelle $t \mapsto \cos t$ est continue, et sa partie imaginaire $t \mapsto \sin t + \lfloor t \rfloor$ est continue par morceaux comme somme : la fonction l'est donc.

Exercice 9 – ⋆ bonus : l'inverse.

1. La fonction f est continue sur $]0,1]$, et admet la limite finie 0 à droite en 0 : d'après la caractérisation, elle est continue par morceaux sur $[0,1]$. Elle vaut $t > 0$ en $t \in]0,1]$ et 1 en 0, donc ne s'annule pas.
2. Pour $t > 0$, $1/f(t) = 1/t \to +\infty$ quand $t \to 0^+$.
3. Non : d'après la caractérisation, une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ admet une limite finie à droite en 0.

Exercice 10 – ⋆⋆ bonus : la composée.

1. La fonction f est continue sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$ comme produit et composée de fonctions continues. En 0, $|f(t)| \leqslant |t|$ pour tout t, donc $f(t) \to 0 = f(0)$ quand $t \to 0$: f est continue en 0.
2. La fonction g est constante sur $[-1,0]$ et sur $]0,1]$: elle est continue sauf en 0, où elle admet 0 pour limite à gauche et 1 pour limite à droite. D'après la caractérisation, elle est continue par morceaux, avec la subdivision $(-1,0,1)$.
3. Pour t dans le premier intervalle, $1/t \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$, donc $\sin(1/t) > 0$ et $f(t) > 0$. Pour t dans le second, $1/t \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$, donc $\sin(1/t) < 0$ et $f(t) < 0$.
4. D'après la question précédente, $g \circ f$ vaut 1 sur le premier intervalle et 0 sur le second. Soit $\varepsilon > 0$: pour k assez grand, ces deux intervalles sont inclus dans $]0,\varepsilon[$, sur lequel $g \circ f$ prend donc les valeurs 0 et 1. Elle n'a pas de limite à droite en 0. D'après la caractérisation, elle n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$, alors que f et g le sont.

3 Exercices pour ceux qui vont vite

Exercice 11 – ⋆ diagonalisable ou non ?.

1. $\chi_N = (X-1)^2$ (N est triangulaire) : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(N) = \{1\}$, avec $m_1(N) = 2$. La matrice $N - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $\dim E_1(N) = 2 - 1 = 1 < 2 = m_1(N)$: N n'est pas diagonalisable.
2. Pour $t \in \mathbb{K}$, $\chi_R(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$.

   Sur $\mathbb{R}$: χ_R n'a pas de racine réelle, il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$: R n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   Sur $\mathbb{C}$: $\chi_R = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$, et $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Le système $(R - \mathrm{i}I_2)X = 0$ s'écrit $-\mathrm{i}x - y = 0$ et $x - \mathrm{i}y = 0$, deux équations proportionnelles (la première est $-\mathrm{i}$ fois la seconde) : $x = \mathrm{i}y$, et $E_{\mathrm{i}}(R) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.

   De même $E_{-\mathrm{i}}(R) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $R = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

   Vérification : $R\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. La matrice T est triangulaire : $\chi_T = (X-1)(X-2)(X-3)$. La matrice $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ admet trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Pour $\lambda = 1$, $(T - I_3)X = 0$ s'écrit $y + z = 0$, $y + z = 0$, $2z = 0$: $y = z = 0$, et $E_1(T) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Pour $\lambda = 2$: $-x + y + z = 0$, $z = 0$, $z = 0$, d'où $z = 0$ et $y = x$: $E_2(T) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Pour $\lambda = 3$: $-2x + y + z = 0$, $-y + z = 0$, d'où $y = z$ et $x = z$: $E_3(T) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi $T = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Exercice 12 – ⋆⋆ une matrice à paramètre.

La matrice T_a est triangulaire : $\chi_{T_a} = (X-1)^2(X-2)$. La valeur propre 2 est simple ; T_a est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(T_a) = 2$, c'est-à-dire $\text{rg}(T_a - I_3) = 1$. Or

$$T_a - I_3 = \begin{pmatrix}0&a&1\\0&0&a\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

— Si $a = 0$, les lignes sont $(0,0,1)$, $(0,0,0)$, $(0,0,1)$: le rang est 1, et T_0 est diagonalisable.

— Si $a \neq 0$, les deux premières lignes $(0,a,1)$ et $(0,0,a)$ ne sont pas colinéaires, et la troisième vaut $\frac{1}{a}$ fois la deuxième : le rang est 2, donc $\dim E_1(T_a) = 1 < 2 = m_1(T_a)$, et T_a n'est pas diagonalisable.

Exercice 13 – ⋆ trois suites couplées.

On pose $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$. Les relations s'écrivent $X_{n+1} = MX_n$ avec $M = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. On montre par récurrence que $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $M^0 X_0 = X_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $X_n = M^n X_0$. Alors $X_{n+1} = MX_n = MM^n X_0 = M^{n+1} X_0$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, X_n est la première colonne de M^n, donnée par l'exercice 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \qquad v_n = w_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Vérification pour $n = 1$: $u_1 = v_0 + w_0 = 0$, $v_1 = w_1 = 1$, et les formules donnent $\frac{2-2}{3} = 0$ et $\frac{2+1}{3} = 1$.

Exercice 14 – ⋆⋆ une racine carrée de matrice.

1. On calcule

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\2&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Comme P est carrée, P est inversible et P^{-1} est la matrice annoncée.

2. La matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ vérifie $\Delta^2 = D$. On pose $B = P\Delta P^{-1}$. Alors

$$B^2 = P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = C.$$

On calcule $P\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, puis

$$B = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2}-2 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 – ⋆⋆ l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

1. Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel (densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).
2. Soit $t_0 \in [0, 1[$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que $t_0 + \frac{1}{k} \leqslant 1$, il existe un rationnel r_k et un irrationnel s_k dans $]t_0, t_0 + \frac{1}{k}[$. Les suites (r_k) et (s_k) tendent vers t_0 par valeurs strictement supérieures, et $f(r_k) = 1$, $f(s_k) = 0$. Si f avait une limite ℓ à droite en t_0, on aurait $\ell = 1$ et $\ell = 0$: c'est impossible.
3. Non : d'après la caractérisation, une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ admet une limite finie à droite en 0, ce qui n'est pas le cas de f.